МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2005

УДК 539.375

© 2005 г. А.В. АНДРЕЕВ

ПРЯМОЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ОБОБЩЕННЫМИ ЯДРАМИ

Работа посвящена развитию методов прямого численного решения сингулярного интегрального уравнения (СИУ) первого рода с ядром типа Коши в случае, когда его решение имеет асимптотику степенного типа на концах промежутка интегрирования, в частности, произвольные (интегрируемые) вещественные особенности.

1. Предварительные замечания. Рассмотрим СИУ первого рода с сингулярным ядром типа Коши

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi-\eta}+\int_{-1}^{1}k(\xi,\eta)\phi(\xi)d\xi = p(\eta), \quad |\eta|<1 \tag{1.1}$$

Здесь $\phi(\xi)$ – неизвестная функция, $p(\eta)$ – заданная на отрезке $[-1, 1]$ ограниченная непрерывная функция, а ядро $k(\xi, \eta)$ может иметь неподвижные особенности на концах промежутка интегрирования, т.е. становится неограниченным, когда ξ и η одновременно стремятся к одному из концов отрезка $[-1, 1]$ ($\xi = \eta \to \pm 1$). Ядро $k(\xi, \eta)$ является, таким образом, сингулярным в специальном смысле, а если эти особенности имеют форму ρ^{-1} ($\rho \to 0$), то его принято называть обобщенным ядром Коши [1]. Поведение неизвестной функции на концах промежутка интегрирования в этом случае определяется не только "подвижной" сингулярной составляющей типа Коши (первый интеграл (1.1)), но и неподвижными особенностями ядра $k(\xi, \eta)$.

Теория СИУ (1.1) хорошо изучена в случае, когда ядро $k(\xi, \eta)$ ограничено и непрерывно [2], разработаны методы его прямого численного решения [1, 3], которые успешно применялись в прикладных задачах [1, 4]. Отметим, что в этом случае решение СИУ (1.1) может иметь корневую особенность на конце промежутка интегрирования, либо стремиться здесь к нулю (как $\sqrt{\rho}$ при $\rho \to 0$) [2]. Если же ядро $k(\xi, \eta)$ является обобщенным, то решение СИУ (1.1) может не иметь особенности на конце промежутка интегрирования, иметь особенность, отличающуюся от корневой, либо стремится к нулю (как ρ^{α}, $\alpha > 0$ при $\rho \to 0$) [1, 2, 5]. Теория СИУ с одной или двумя неподвижными особенностями в ядре рассмотрена в [2, 5]; в [5], в частности, получены формулы для решения характеристических уравнений, исследована гладкость и асимптотика решений. Далее будем полагать, если не оговорено противное, что решение СИУ (1.1) существует и единственно без наложения необходимых дополнительных условий на его решение или правую часть. Условия адекватного такого предположения, а также дополнительные условия при его нарушении, обеспечивающие единственность решения, приведены, например, в [2].

Асимптотика решения СИУ (1.1), связанная как с подвижной особенностью типа Коши, так и с неподвижными особенностями ядра $k(\xi, \eta)$, может быть учтена на основе введения специальной весовой функции [1, 2]. В соответствии с этим далее будем полагать, что неизвестная функция имеет степенную асимптотику на концах промежутка интегрирования и представима в виде

$$\phi(\xi) = u(\xi)w(\xi) \tag{1.2}$$

Здесь $u(\xi)$ – ограниченная непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ функция, а весовая функция имеет вид

$$w(\xi) = (1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta}, \quad \alpha, \ \beta > -1 \tag{1.3}$$

Можно выделить два основных метода определения показателей асимптотики весовой функции (1.3). Первый метод основан на асимптотическом анализе главной (характеристической) части СИУ (в рассматриваемом случае это левая часть (1.1)), описывающего некую краевую задачу [1, 2, 6]. Альтернативой этому методу служит встречающийся в приложениях метод, основанный на асимптотическом анализе этой краевой задачи [7–9] до построения СИУ, ее описывающего. Отметим, что число $\kappa = -(\alpha + \beta)$, которое в некоторых случаях совпадает с индексом интегрального уравнения, является важной его характеристикой, определяющей фундаментальную функцию (1.3) и класс решения [1, 2].

Прямые (без регуляризации) численные методы решения СИУ (1.1) заключаются в численной аппроксимации сингулярного и регулярного (без "подвижной" особенности типа Коши) интегралов в виде суммы и последующем использовании метода коллокации для формирования алгебраической системы относительно неизвестных коэффициентов аппроксимации – значений неизвестной функции в дискретном наборе точек. Среди таких методов следует отметить метод механических квадратур, характерной особенностью которого является вычисление интегралов на основе квадратурных формул типа Гаусса [1, 4, 6]. Среди недавних работ, направленных на развитие прямых методов решения СИУ, отметим исследование сходимости и устойчивости решения СИУ второго рода методом дискретной коллокации (при $\kappa = 0, \pm 1$) [10]. Возможно также использование модифицированных методов, в частности, решение сингулярных и гиперсингулярных уравнений с использованием расщепления области интегрирования [11] (рассматривались интегральные уравнения с ядрами без неподвижных особенностей).

Вычисление интегралов (сингулярных и несингулярных), точнее аппроксимация их в виде суммы, является, таким образом, важной и неотъемлемой частью прямых методов решения СИУ. Методы вычисления интегралов с произвольными (интегрируемыми) степенными особенностями на концах промежутка интегрирования (но без "подвижной" особенности) получили существенное развитие в [12]. Среди недавних работ, посвященных методам вычисления таких интегралов, отметим работу [13], в которой получены явные выражения для весов и узлов квадратурных формул в виде собственных чисел и векторов трехдиагональной матрицы Якоби. В [14] рассматривался общий вид весовой функции (1.3), при этом "подвижные" особенности различного типа лежали вне промежутка интегрирования. Кроме того, были разработаны методы вычисления сингулярных (с "подвижной" особенностью в промежутке интегрирования) интегралов [15] и решения СИУ (1.1) [1] при $\kappa = 0, \pm 1$, а в [16] на основе тригонометрической замены рассматривался ультрасферический ($\alpha = \beta$) случай, при этом κ полагалось нецелым. Круг исследований, связанных с прямым численным решением СИУ при $\kappa \neq 0, \pm 1$, весьма узок, за исключением [16], отметим лишь работы [6, 17]. Предложенный в [1] метод решения такого рода уравнений является приближенным, поскольку использовавшиеся формально квадратурные формулы имеют достаточно большую погрешность. Этот вопрос подробно обсуждался в [18].

В данной работе акцент делается на развитии методов решения СИУ (1.1) с общим видом весовой функции, т.е. без ограничений накладываемых на взаимосвязь показателей асимптотики ($\kappa \neq 0, \pm 1$): разработаны удобные для численного применения методы и алгоритмы решения, на основе асимптотических разложений получены явные (в элементарных функциях) выражения для узлов и весов квадратурных формул, выявлены области применимости последних. Основой развитого метода численного решения СИУ (1.1) является работа [19], посвященная методу вычисления сингулярных интегралов типа Коши с весовой функций (1.3).

Отметим, что СИУ вида (1.1) возникают при формулировке некоторых краевых задач физики и механики, в частности, при решении краевых задач теории упругости в двумерных областях методов граничных интегральных уравнений [4]. Изложенная в данной работе методика ранее частично использовалась при решении двумерных задач теории упругости, связанных с исследованием предельного равновесия краевых трещин [20].

2. Прямой численный метод решения СИУ. Для сингулярного интеграла с ядром Коши справедлива квадратурная формула Гаусса – Якоби [19]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi = \sum_{k=1}^{n} W_k \frac{u(\xi_k)}{\xi_k-\eta} + u(\eta)\frac{q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}, \quad |\eta|<1, \quad \eta \neq \xi_k \tag{2.1}$$

$$W_k = \frac{1}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)} \int_{-1}^{1} \frac{w(\xi)P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)}{\xi-\xi_k}d\xi \tag{2.2}$$

$$q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta) = \int_{-1}^{1} \frac{w(\xi)P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)}{\xi-\eta}d\xi \tag{2.3}$$

которая является точной, если $u(\xi) \in P_{2n}$, т.е. $u(\xi)$ представляет собой полином степени, не превышающей $2n$; корни полинома Якоби вещественного аргумента $P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ представляют собой множество значений ξ_k:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.4}$$

Отметим, что при $\alpha, \beta > -1$ нули полиномов Якоби простые и лежат в интервале $(-1, 1)$ [21].

Для несингулярного интеграла имеем квадратурную формулу (см., например, [1]):

$$\int_{-1}^{1} k(\xi,\eta)u(\xi)w(\xi)d\xi = \sum_{k=1}^{n} W_k k(\xi_k,\eta)u(\xi_k) \tag{2.5}$$

которая точна, если плотность интеграла $k(\xi,\eta)u(\xi) \in P_{2n-1}$.

В точках η_m, таких что

$$q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_m) = 0, \quad |\eta_m|<1, \quad \eta_m \neq \xi_k \tag{2.6}$$

квадратурная формула (2.1) принимает наиболее простую форму

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)w(\xi)}{\xi-\eta_m}d\xi = \sum_{k=1}^{n} W_k \frac{u(\xi_k)}{\xi_k-\eta_m} \tag{2.7}$$

которая справедлива в дискретном наборе точек η_m и точна при $u(\xi) \in P_{2n}$. Отметим, что при таком выборе η_m формулы (2.5) и (2.7) оказываются аналогичными по структуре.

Интерполяционный полином Лагранжа позволяет определить значение неизвестной функции в произвольной точке $\eta \in [-1, 1]$ по дискретному набору значений функции $u(\xi_k)$ в точках $\xi_k \in (-1, 1)$ в соответствии с формулой

$$u(\eta) = \sum_{k=1}^{n} L_k(\eta)u(\xi_k), \quad L_k(\eta) = \prod_{j \neq k} \frac{\eta - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \tag{2.8}$$

Данное представление является точным, если $u(\xi) \in P_{n-1}$. Приведем здесь также иную запись коэффициентов Лагранжа

$$L_k(\eta) = \frac{\chi_n(\eta)}{(\eta - \xi_k)\chi_n'(\xi_k)}, \quad \chi_n(\eta) = (\eta - \xi_1)(\eta - \xi_2)\ldots(\eta - \xi_n) \tag{2.9}$$

из которой следует, что $L_k(\eta) \sim 1/n$.

Подстановка (2.8) во второй член правой части (2.1) позволяет получить квадратурную формулу:

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)w(\xi)}{\xi - \eta} d\xi = \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\left[\frac{W_k}{\xi_k - \eta} + \frac{q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)} L_k(\eta)\right], \quad |\eta| < 1 \tag{2.10}$$

которая, таким образом, точна при $u(\xi) \in P_n$ и справедлива в произвольной точке $\eta \in (-1, 1)$ $(\eta \neq \xi_k)$.

Используя квадратурные формулы (2.5) и (2.10), СИУ (1.1) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\left\{W_k\left[\frac{1}{\xi_k - \eta} + k(\xi_k, \eta)\right] + \frac{q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)} L_k(\eta)\right\} = p(\eta), \quad |\eta| < 1, \quad \eta \neq \xi_k \tag{2.11}$$

Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестной функции в дискретном наборе точек ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, следует записать выражение (2.11) в n точках коллокации η_m $(m = 1, 2, \ldots, n;\ \eta_m \neq \xi_k)$. После решения системы значение неизвестной функции в произвольной точке промежутка $[-1, 1]$ восстанавливается с помощью интерполяционного полинома Лагранжа (2.8).

Таким образом, использование квадратурных формул для вычисления сингулярных интегралов совместно с методом коллокации позволяет свести решение СИУ (1.1) к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестной функции в дискретном наборе точек. Положение этих точек аппроксимации (узлов квадратурных формул) является жестко фиксированным и диктуется асимптотикой решения – величинами α и β (при заданном параметре дискретизации n, см. (2.4)). При этом применяемая методика перехода от СИУ к алгебраической системе уравнений дает возможность варьировать размещением точек коллокации, что позволяет, как показывают численные эксперименты, в некоторых случаях существенно повысить точность решения СИУ. В то же время произвольность выбора точек коллокации (в рамках $|\eta_m| < 1$ и $\eta_m \neq \xi_k$) может повлечь за собой некоторое снижение точности решения по отношению к решению, получаемому в соответствии с изложенной ниже альтернативной методикой получения алгебраической системы. Это относительное уменьшение точности связано с использованием интерполирования неизвестной функции методом Лагранжа (2.8), который является точным только лишь для полиномов степени не ниже n $(u(\xi) \in P_{n-1})$.

Если записать выражение (2.11) в точках η_m ($m = 1, 2, \ldots, n$; $\eta_m \neq \xi_k$), определяемых уравнением (2.6) (это соответствует применению квадратурной формулы (2.7)), то система алгебраических уравнений (2.11) принимает более простой вид

$$\sum_{k=1}^{n} W_k u(\xi_k)\left[\frac{1}{\xi_k - \eta_m} + k(\xi_k, \eta_m)\right] = p(\eta_m) \tag{2.12}$$

Такая методика перехода к алгебраической системе теоретически позволяет получить более точное решение СИУ (1.1) поскольку осуществляется на основе квадратурных формул, являющихся точными для полиномов вплоть до степени $2n - 1$. После решения системы (2.12) значение неизвестной функции в произвольной точке промежутка [–1, 1] следует восстанавливать, во избежание потери достигнутой точности, с помощью естественного интерполяционного полинома (см. (2.1)):

$$u(\eta) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)}\left[p(\eta) - \sum_{k=1}^{n} W_k u(\xi_k)\left(\frac{1}{\xi_k - \eta} + k(\xi_k, \eta)\right)\right], \quad |\eta| \le 1 \tag{2.13}$$

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с записью (2.11) в виде (2.12) и определенностью получаемой алгебраической системы уравнений.

Очевидно, что число уравнений системы (2.12) определяется количеством корней функции $q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)$ в промежутке (–1, 1). В частности, в случаях, когда $\alpha = -\beta = \pm 1/2$, $\alpha = \beta = 1/2$ и $\alpha = \beta = -1/2$, функция $q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)/w(\eta)$ является полиномом степени n, $n + 1$ и $n - 1$ соответственно, что однозначным образом определяет число корней уравнения (2.6). В первом случае решение СИУ (1.1) и, как следствие, системы (2.12) существует и единственно без наложения на него дополнительных условий, а во втором случае одно из уравнений (2.12) должно быть отброшено [1]. Если же $\alpha = \beta = -1/2$, то решение СИУ (1.1) единственно при выполнении дополнительного условия [2]:

$$\int_{-1}^{1} \phi(\xi)d\xi = A, \quad A = \text{const} \tag{2.14}$$

дискретный (квадратурный) аналог которого (см. (2.5)):

$$\sum_{k=1}^{n} W_k u(\xi_k) = A \tag{2.15}$$

позволяет замкнуть систему алгебраических уравнений (2.12). Отметим, что перечисленные случаи конкретных сочетаний значений α и β соответствуют индексу интегрального уравнения, совпадающему с $\kappa = 0, \pm 1$, а численные методы решения СИУ (1.1) в этих случаях получили достаточно полное развитие в [1]. Возможность записи дискретного аналога СИУ (1.1) в наиболее простой и точной форме (2.12) при произвольных значениях α и β обсуждается ниже.

В заключение отметим, что квадратурные формулы, изложенные выше, остаются справедливыми и при $\alpha = \beta = 0$ [19], при этом $w(x) = 1$, а полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ вырождаются в полиномы Лежандра $P_n(x)$ поскольку [21] $P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x)$.

3. Методика численного решения. Для вычисления полиномов Якоби удобно использовать рекуррентное соотношение [21]:

$$a_n P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (b_n + c_n x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - d_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1 \tag{3.1}$$

$$a_n = 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta), \quad b_n = (2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2) \tag{3.2}$$

$$c_n = (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2), \quad d_n = 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)$$

в качестве стартовых значений в котором можно использовать полиномы нулевого $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ и первого $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = (\alpha - \beta + (2+\alpha+\beta)x)/2$ порядка.

Корни полиномов Якоби можно вычислять по следующему алгоритму. Выбирая подходящее начальное приближение $\xi_k^{(0)}$ для k-го корня, его значение с заданной точностью можно достаточно быстро определить в итерационном процессе, построенном на основе метода касательных (Ньютона), осуществляя последовательное уточнение положения корня с помощью выражения (i – номер итерации):

$$\xi_k^{(i+1)} = \xi_k^{(i)} - \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_k^{(i)})}{P_n^{\prime(\alpha,\beta)}(\xi_k^{(i)})} \; (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

Поскольку производная от полинома Якоби выражается через два последовательных полинома соответствующих порядков с теми же параметрами α, β и аргументом x [21]:

$$(1-x^2)P_n^{\prime(\alpha,\beta)}(x) = (\tilde{a}_n + \tilde{b}_n x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \tilde{c}_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3.4}$$

$$\tilde{a}_n = n(\alpha-\beta)/(2n+\alpha+\beta), \quad \tilde{b}_n = -n, \quad \tilde{c}_n = 2(n+\alpha)(n+\beta)/(2n+\alpha+\beta) \tag{3.5}$$

то ее вычисление сводится к расчету коэффициентов (3.5) и подстановкой их в (3.4) на заключительном этапе рекуррентного процесса (3.1).

Рассмотрим вопрос о выборе начального приближения $\xi_k^{(0)}$ для k-го корня. Осцилляция полинома Якоби на отрезке $-1 < \xi < 1$, частота которой увеличивается с ростом n, а также быстрое перемещение наименьших (наибольших) корней к левому (правому) концу отрезка при уменьшении $\beta(\alpha)$, предъявляют высокие требования к начальным приближениям при вычислении по итерационной схеме (3.3). В такой ситуации адекватным оказывается их выбор в соответствии с [22]:

$$\xi_1^{(0)} = 1 - \frac{(1+\alpha)[2.78/(4+n^2) + 0.768\alpha/n^2]}{1 + 1.48\alpha/n + 0.96\beta/n + 0.452\alpha^2/n^2 + 0.83\alpha\beta/n^2}$$

$$\xi_2^{(0)} = \xi_1 - \frac{(1-\xi_1)(4.1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+0.156\alpha)}\left[1 + \frac{0.06(n-8)(1+0.12\alpha)}{n}\right]\left[1 + \frac{0.012\beta(1+0.25|\alpha|)}{n}\right]$$

$$\xi_3^{(0)} = \xi_2 - (\xi_1 - \xi_2)\frac{1.67+0.28\alpha}{1+0.37\alpha}\left[1 + \frac{0.22(n-8)}{n}\right]\left[1 + \frac{8\beta}{(6.28+\beta)n^2}\right] \tag{3.6}$$

$$\xi_k^{(0)} = 3\xi_{k-1} - 3\xi_{k-2} + \xi_{k-3} \; (3 < k < n-1)$$

$$\xi_{n-1}^{(0)} = \xi_{n-2} + (\xi_{n-2} - \xi_{n-3})\frac{1 + 0.235\beta}{0.766 + 0.119\beta}\left[1 + \frac{1 + 0.639(n-4)}{1 + 0.71(n-4)}\right]^{-1}\left[1 + \frac{20\alpha}{(7.5 + \alpha)n^2}\right]^{-1}$$

$$\xi_{n}^{(0)} = \xi_{n-1} + (\xi_{n-1} - \xi_{n-2})\frac{1 + 0.37\beta}{1.67 + 0.28\beta}\left[1 + \frac{0.22(n-8)}{n}\right]^{-1}\left[1 + \frac{8\alpha}{(6.28 + \alpha)n^2}\right]^{-1}$$

Здесь без верхнего индекса обозначены истинные (найденные с достаточно высокой точностью) значения корней. Такой выбор начального приближения позволяет определить положение искомого корня с точностью $|\xi_k^{(i+1)} - \xi_k^{(i)}| < 10^{-15}$, как правило, не более чем за шесть итераций (3.3), причем вплоть до $n = 1000$, в том числе и при $\alpha = \beta = -0.999$.

Формулы (3.1) и (3.4) остаются справедливыми и при $\alpha = \beta = 0$, что дает возможность аналогичным образом вычислять значения полиномов Лежанра $P_n(x)$ и находить их корни. Адекватным начальным приближением для корней в этом случае будет выражение

$$\xi_k^{(0)} = \cos\left(\frac{4k-1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.7}$$

Такое начальное приближение позволяет определить положение искомого корня с точностью $|\xi_k^{(i+1)} - \xi_k^{(i)}| < 10^{-15}$ не более чем за шесть итераций (3.3) вплоть до $n = 1000$. Отметим, что корни полиномов Лежандра симметричны относительно центра отрезка $-1 < \xi < 1$, а веса (2.2) (см. ниже), соответствующие симметричным корням, одинаковы. Это обстоятельство дает возможность существенно сократить количество вычислений при построении квадратур Гаусса – Лежандра.

Выражение (2.2) для весов квадратурных формул можно записать в явной форме (см., например, [1]):

$$W_k = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(1-\xi_k^2)[P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)]^2} \tag{3.8}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Весьма быстрым и точным методом вычисления гамма-функции является метод Ланцоша [23, 24], в соответствии с которым

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\frac{(x+C_1-1/2)^{x-1/2}}{e^{x+C_1-1/2}}\left[s_1 + \sum_{k=2}^{m}\frac{s_k}{x+k-2}\right], \quad x > 0 \tag{3.9}$$

Уже при $m = 15$ и коэффициентах, равных

$C_1 = 607/128, \quad s_1 = 0.999999999999997$

$s_2 = 57.15623566586292, \quad s_3 = -59.59796035547549$

$s_4 = 14.1360979747174, \quad s_5 = -0.491913816097620$

$s_6 = 0.339946499848118 \times 10^{-4}, \quad s_7 = 0.465236289270485 \times 10^{-4}$

$s_8 = -0.983744753048795 \times 10^{-4}, \quad s_9 = 0.158088703224912 \times 10^{-3}$

$s_{10} = -0.210264441724104 \times 10^{-3}, \quad s_{11} = 0.217439618115212 \times 10^{-3}$

$$s_{12} = -0.164318106536763 \times 10^{-3}, \quad s_{13} = 0.844182239838527 \times 10^{-4}$$

$$s_{14} = -0.261908384015814 \times 10^{-4}, \quad s_{15} = 0.368991826595316 \times 10^{-5}$$

формула (3.9) дает по крайней мере тринадцать верных значащих цифр, а при небольших значениях аргумента ($x \lesssim 9$) – пятнадцать верных значащих цифр, что вплотную приближается к максимально достижимой точности в рамках операций с типом числа "double". Для вычисления гамма-функции при отрицательных значениях аргумента следует использовать функциональное соотношение $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ [21].

Для вычисления интеграла (2.3) используем представления функции Якоби второго рода [21]:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{w(z)}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{t-z}dt, \quad z \notin [-1, 1] \tag{3.10}$$

через гипергеометрическую функцию $F(a, b, c, z)$, имеющие вид [21]:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\frac{2^{n+\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)(1+z)^{n+1}w(z)}F\left(n+1, n+\beta+1, 2n+\alpha+\beta+2, \frac{2}{1+z}\right) =$$
$$= \frac{(-1)^n 2^{n+\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)(1-z)^{n+1}w(z)}F\left(n+1, n+\alpha+1, 2n+\alpha+\beta+2, \frac{2}{1-z}\right) \tag{3.11}$$

Используя функциональные соотношения для гипергеометрической функции, ее связь с полиномами Якоби и формулу дополнения для гамма-функции (см., например, [21]), можно переписать (3.11) в виде

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\frac{\pi P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{(-1)^\beta\sin(\pi\beta)} + \frac{(-1)^n 2^{\alpha+\beta}}{w(z)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}F\left(n+1, -n-\alpha-\beta, 1-\beta, \frac{1+z}{2}\right) =$$
$$= \frac{\pi P_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{(-1)^\alpha\sin(\pi\alpha)} - \frac{2^{\alpha+\beta}}{w(z)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}F\left(n+1, -n-\alpha-\beta, 1-\alpha, \frac{1-z}{2}\right) \tag{3.12}$$

Используя, как обычно, предельное соотношение (см., например, [21]):

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}[Q_n^{(\alpha,\beta)}(x+i0) + Q_n^{(\alpha,\beta)}(x-i0)], \quad i^2 = -1 \tag{3.13}$$

и, замечая, что $(-1)^{-\lambda} = e^{i\pi\lambda} = e^{-i\pi\lambda}$, получим выражение для функции Якоби второго рода в двух формах

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\pi P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\mathrm{tg}(\pi\beta)} + \frac{(-1)^n 2^{\alpha+\beta}}{w(x)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}F\left(n+1, -n-\alpha-\beta, 1-\beta, \frac{1+x}{2}\right) =$$
$$= \frac{\pi P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\mathrm{tg}(\pi\alpha)} - \frac{2^{\alpha+\beta}}{w(x)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}F\left(n+1, -n-\alpha-\beta, 1-\alpha, \frac{1-x}{2}\right), \quad |x| < 1 \tag{3.14}$$

Используя выражение [21]

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{w(x)}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{t-x}dt, \quad |x| < 1 \tag{3.15}$$

и сравнивая (2.3) и (3.15), получим

$$q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta) = Q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)w(\eta), \quad |\eta| < 1 \tag{3.16}$$

и, следовательно, вычисление интеграла (2.3) сводится к расчету значения функции Якоби второго рода в соответствии с (3.14). Отметим, что первую форму (3.14) можно использовать при $\beta \neq 0$, вторую – при $\alpha \neq 0$.

Для вычисления гипергеометрической функции $F(a, b, c, t)$ при $-1 < t = (1 \pm x)/2 < 1$ можно использовать ее представление в виде ряда Гаусса [21]:

$$F(a, b, c, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i}{(c)_i i!} t^i, \quad (\lambda)_i = \prod_{j=1}^{i} (\lambda + j - 1) \tag{3.17}$$

Как следует из представления (3.14), при целом $\kappa = -(\alpha + \beta)$ функция второго рода, ему соответствующая, является полиномом, поскольку гипергеометрический ряд (3.17) обрывается [21]. В этом случае, используя соотношение, связывающее полиномы Якоби и гипергеометрическую функцию [21], получим более простые и удобные для вычислений выражения для функции Якоби второго рода

$$\begin{aligned} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= -\pi \operatorname{ctg}(\pi\beta) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \pi \frac{(-1)^{\kappa} 2^{-\kappa}}{w(x)\sin(\pi\beta)} P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(x) = \\ &= \pi \operatorname{ctg}(\pi\alpha) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \pi \frac{2^{-\kappa}}{w(x)\sin(\pi\alpha)} P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(x), \quad \kappa = -(\alpha+\beta) \in Z \end{aligned} \tag{3.18}$$

Из последнего выражения, в частности, следует, что в случаях, когда $\alpha = -\beta = \pm 1/2$ ($\kappa = 0$), $\alpha = \beta = 1/2$ ($\kappa = -1$) и $\alpha = \beta = -1/2$ ($\kappa = 1$), функция второго рода является полиномом степени n, $n + 1$ и $n - 1$ соответственно, что и определяет число корней функции $q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta) = Q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)w(\eta)$ в промежутке $(-1, 1)$.

При $\alpha = \beta = 0$ ($w(\xi) = 1$) вычислим (2.3) с использованием интеграла [25]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{t - z} dt = -2Q_n(z), \quad z \notin [-1, 1] \tag{3.19}$$

Здесь $Q_n(z)$ – функция Лежандра второго рода. Используя предельное соотношение (3.13) при $\alpha = \beta = 0$, получим

$$q_n^{(0,0)}(\eta) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(\xi)}{\xi - \eta} d\xi = -2Q_n(\eta), \quad |\eta| < 1 \tag{3.20}$$

Величину функции Лежандра второго рода можно рассчитать, например, в соответствии с формулой [25]:

$$Q_n(\eta) = \frac{1}{2} P_n(\eta) \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} - \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}(\eta) P_{n-k}(\eta)/k \tag{3.21}$$

связывающей функцию второго рода с целым индексом и соответствующие полиномы.

Формулы (3.14) следует использовать для численного расчета функции Якоби второго рода при не слишком больших значениях n ($n \lesssim 20$). Если же n велико, двойная внутренняя точность вычислений в (3.17) оказывается недостаточной и ряд сходится к ложному значению гипергеометрической функции. Это связано с тем, что значение второго ее параметра в (3.14) $(-n-\alpha-\beta)$ приводит к существенному отличию в величинах значимых членов ряда, что приводит к накоплению вычислительной ошибки. Так, например, уже при $n = 25$ относительная погрешность вычисления гипергеометрической функции может достигать 15%. В такой ситуации функцию Якоби второго рода следует вычислять в соответствии со следующей, более универсальной и удобной численной методикой.

Прежде всего, заметим, что функции Якоби второго рода в виде (3.14) удовлетворяет на отрезке $-1 < x < 1$ тому же рекуррентному соотношению, что и полиномы Якоби [21], т.е.

$$a_n Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (b_n + c_n x) Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) - d_n Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3.22}$$

где a_n, b_n, c_n и d_n имеют вид (3.2).

Поскольку $F(0, b, c, x) = 1$, то, полагая в (3.14) $n = -1$, получим

$$Q_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{2^{\alpha+\beta}}{w(x)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0 \tag{3.23}$$

Аналогично, полагая $n = 0$, имеем

$$Q_0^{(\alpha,\beta)}(x) = -\pi\operatorname{ctg}(\pi\beta) + \frac{2^{\alpha+\beta}}{w(x)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} F\left(1, -\alpha-\beta, 1-\beta, \frac{1+x}{2}\right) =$$
$$= \pi\operatorname{ctg}(\pi\alpha) - \frac{2^{\alpha+\beta}}{w(x)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} G\left(1, -\alpha-\beta, 1-\alpha, \frac{1-x}{2}\right) \tag{3.24}$$

Выражения (3.23) и (3.24) могут служить стартовыми значениями для вычисления значений функции Якоби второго рода в соответствии с (3.22) при $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Если же $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, первым стартовым значением может служить одно из выражений (3.24). Второе стартовое значение в двух формах получим, полагая в (3.14) $n = 1$, и, следовательно

$$Q_1^{(\alpha,\beta)}(x) = -\pi\frac{\alpha-\beta+(2+\alpha+\beta)x}{2\operatorname{tg}(\pi\beta)} - \frac{2^{\alpha+\beta}}{w(x)}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} F\left(2, -1-\alpha-\beta, 1-\beta, \frac{1+x}{2}\right) =$$
$$= \pi\frac{\alpha-\beta+(2+\alpha+\beta)x}{2\operatorname{tg}(\pi\alpha)} - \frac{2^{\alpha+\beta}}{w(x)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} F\left(2, -1-\alpha-\beta, 1-\alpha, \frac{1-x}{2}\right) \tag{3.25}$$

Параметры гипергеометрической функции в (3.24) и (3.25) удобны для расчета в соответствии с (3.17), причем, если $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то для ускорения сходимости ряда Гаусса можно выбирать форму стартового значения (3.24) так, чтобы аргумент гипергеометрической функции был минимален по модулю.

Функцию Лежандра второго рода также можно вычислить на основе рекуррентного соотношения (3.22) $(\alpha = \beta = 0)$, при этом для нее стартовыми значениями могут служить элементарные функции [25]

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1 \tag{3.26}$$

Как отмечалось выше, при выборе точек коллокации в соответствии с (2.6), дискретный аналог (2.11) СИУ (1.1) принимает наиболее простую и точную форму (2.12). Рассмотрим вопрос о количестве корней функции $q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)$, которые внутри промежутка $-1 < \eta < 1$, очевидно, совпадают с корнями функции Якоби второго рода $Q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)$ (см. (3.16)). При целом $\kappa = -(\alpha + \beta)$ ($\kappa = 1, 0, -1, 2, \ldots$) число корней функции второго рода определяется степенью представляющего ее в данном случае полинома (3.18). Если же κ не равно целому числу, то функция $Q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)$ не является полиномом, и число ее корней в промежутке $-1 < \eta < 1$ зависит, вообще говоря, как от величины α, так и от величины β, а не только от комбинации $\alpha + \beta$. Количество корней функции второго рода можно определить, основываясь на том обстоятельстве, что корни полинома и соответствующей ему функции второго рода перемежаются, т.е. между двумя последовательными корнями полинома лежит один (и только один) корень функции второго рода, причем находится он вблизи центра этого промежутка. Кроме того, в каждом из граничных промежутков $-1 < \eta < \xi_n$ и $\xi_1 < \eta < 1$ (ξ_n и ξ_1 – соответственно минимальный и максимальный корень полинома) может лежать один корень функции второго рода. Наличие такого корня в промежутке $-1 < \eta < \xi_n$ ($\xi_1 < \eta < 1$) связано с величиной $\beta(\alpha)$, которая определяет поведение функции второго рода вблизи $-1(+1)$. Как показывает анализ, основанный на сравнении знаков функции второго рода на концах граничного промежутка, левый (правый) граничный промежуток $-1 < \eta < \xi_n$ ($\xi_1 < \eta < 1$) содержит корень, когда $\beta > -1/2$ ($\alpha > -1/2$).

Таким образом, решение СИУ (1.1) можно свести к решению алгебраической системы уравнений в наиболее простой и точной форме (2.12) при $\alpha > -1/2$ или $\beta > -1/2$. Следует отметить, что особенности вида $\alpha \geq -1/2$ и $\beta \geq -1/2$ (при $\alpha = \beta = -1/2$ следует использовать явные квадратурные формулы Гаусса-Чебышева [1, 4], которые точны для полиномов порядка P_{2n-1}) характерны для достаточно широкого класса задач, в частности, для краевых задач линейной теории упругости.

Процесс определения положения корней функции второго рода можно реализовать аналогично описанному выше процессу поиска корней полинома, т.е. на основе итерационного процесса (i – номер итерации):

$$\eta_k^{(i+1)} = \eta_k^{(i)} - \frac{Q_n^{(\alpha,\beta)}(\eta_k^{(i)})}{Q_n^{\prime(\alpha,\beta)}(\eta_k^{(i)})} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.27}$$

Производная от функции второго рода вычисляется аналогично (3.4) в соответствии с формулой [21]:

$$(1 - x^2)Q_n^{\prime(\alpha,\beta)}(x) = (\tilde{a}_n + \tilde{b}_n x)Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \tilde{c}_n Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3.28}$$

где $\tilde{a}_n$, $\tilde{b}_n$ и $\tilde{c}_n$ имеют вид (3.5). Ее вычисление, следовательно, также сводится к расчету коэффициентов (3.5) и подстановкой их в (3.28) на завершающем этапе рекуррентного процесса (3.22).

Как показывают численные эксперименты, начальные приближения для корней можно выбирать в виде

$$\begin{aligned} &\eta_k^{(0)} = (\xi_k + \xi_{k-1})/2 \quad (k = 2, 3, \ldots, n) \\ &\eta_1^{(0)} = 1 - n^{-5/2}(\alpha + 1/2)^2(1 + \xi_1), \quad \alpha > -1/2; \\ &\eta_{n+1}^{(0)} = -1 - n^{-5/2}(\beta + 1/2)^2(-1 + \xi_n), \quad \beta > -1/2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

где ξ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) – корни полинома Якоби порядка n. Такое начальное приближение позволяет определить положение искомого корня с точностью $|\xi_k^{(i+1)} - \xi_k^{(i)}| < 10^{-15}$, как правило, не более чем за семь итераций (3.27) вплоть до $n = 1000$, в том числе при $\alpha = \beta = -0.499$. При очень малых значениях $-1 < \alpha, \beta < -1/2$ и небольших значениях n число итераций, необходимое для поиска минимального и максимального корня с указанной точностью, несколько возрастает, вплоть до 20 при $\alpha = \beta = -0.999$. Отметим, что начальные приближения (3.29) позволяют найти все корни функции Якоби второго рода и при целом κ.

Функция Лежандра второго рода порядка n также не является полиномом (см., например, (3.21)), при этом на отрезке $-1 < \eta < 1$ она всегда имеет $n + 1$ корень. Качественно они расположены также как и корни функции Якоби второго рода, однако в каждом из граничных промежутков $-1 < \xi_n$ и $\xi_1 < 1$ в этом случае ($\alpha = \beta = 0$) всегда имеется один корень. Следовательно, в данном случае имеем $n + 1$ точку η_m, такую что $q_n^{(0,0)}(\eta_m) = 0$. Адекватными начальными приближениями в итерационном процессе поиска корней (3.27) в такой ситуации являются значения

$$\begin{aligned}\eta_k^{(0)} &= (\xi_k + \xi_{k-1})/2 \quad (k = 2, 3, \ldots, n)\\ \eta_1^{(0)} &= 1 - n^{-5/2}(1 + \xi_1)/4, \quad \eta_{n+1}^{(0)} := -1 - n^{-5/2}(-1 + \xi_n)/4\end{aligned} \tag{3.30}$$

где ξ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) – корни полинома Лежандра порядка n. Такое начальное приближение позволяет определить положение искомого корня с точностью $|\xi_k^{(i+1)} - \xi_k^{(i)}| < 10^{-15}$ не более чем за семь итераций (3.27) вплоть до $n = 1000$.

Отметим, что корни функции Лежандра второго рода, также как и корни соответствующего полинома, симметричны относительно центра отрезка $-1 < \xi < 1$, что дает возможность сократить количество вычислений. Также, в ультрасферическом случае ($\alpha = \beta$) корни полинома Якоби (и функции второго рода) симметричны относительно центра отрезка $-1 < \xi < 1$, а веса (3.8), соответствующие симметричным корням, одинаковы. Это обстоятельство дает возможность существенно сократить количество вычислений при $\alpha = \beta$.

4. Асимптотическое представление квадратурных формул. Особенностью изложенной ниже квадратурной методики являются явные (в элементарных функциях) выражения для узлов и весов квадратурных формул, полученные при больших значениях параметра дискретизации n ($n \gg 1$). В этом случае полиномы Якоби представимы в виде [21]:

$$\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \frac{\cos\{[n + (\alpha+\beta+1)/2]\theta - (2\alpha+1)\pi/4\}}{\sqrt{\pi n}(\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2}(\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}} + O(n^{-3/2}), \quad 0 < \theta < \pi \tag{4.1}$$

а интеграл (2.3) выражается в элементарных функциях [26]:

$$\tilde{q}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = 2^{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin\{[n + (\alpha+\beta+1)/2]\theta - (2\alpha+1)\pi/4\}}{(\sin(\theta/2))^{-\alpha+1/2}(\cos(\theta/2))^{-\beta+1/2}} + O(n^{-3/2}) \tag{4.2}$$

Здесь и далее приближенные значения параметров и функций, т.е. значения, построенные на основе асимптотических разложений (4.1) и (4.2), отмечаются тильдой.

Из (2.4) и (4.1) получим

$$\tilde{\xi}_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{2\alpha - 1 + 4k}{2n + \alpha + \beta + 1}\frac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.3}$$

Используя (4.1) и (4.2), преобразуем (2.2) к виду [18]:

$$\tilde{W}_k \cong \frac{2\pi}{2n + \alpha + \beta + 1}\sqrt{1 - \tilde{\xi}_k^2}(1 - \tilde{\xi}_k)^{\alpha}(1 + \tilde{\xi}_k)^{\beta} + O(n^{-2}) \tag{4.4}$$

Здесь сохранен один из членов порядка $O(n^{-2})$ с тем, чтобы это выражение для весов квадратурных формул оказывалось точным при $\alpha = \pm 1/2$ и $\beta = \pm 1/2$ ($\forall\, n$) [1]. Отметим, что при таких значениях α и β выражение для точек аппроксимации (4.3) также оказывается точным для любых n. В то же время, погрешность представления весов в виде (4.4) имеет величину большую, нежели $O(n^{-2})$, поскольку последняя связана не только с использованием асимптотических разложений (4.1) и (4.2) (см. также (2.2)), но и с приближенностью определения точек аппроксимации (4.3). Это обстоятельство здесь и далее подчеркнуто использованием приближенного знака равенства. Вопрос о реальной точности предложенных в данном пункте квадратурных формул подробно обсуждался в [18].

На основе (4.1) и (4.2) введем функцию

$$\tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) \equiv \frac{\tilde{q}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)} = \pi 2^{\alpha+\beta} \frac{\operatorname{tg}\{[n+(\alpha+\beta+1)/2]\theta - (2\alpha+1)\pi/4\}}{(\sin(\theta/2))^{-2\alpha}(\cos(\theta/2))^{-2\beta}} \tag{4.5}$$

Тогда квадратурную формулу (2.10) можно записать в виде (см. также (2.9)):

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)w(\xi)}{\xi-\eta} d\xi \cong \sum_{k=1}^{n} u(\tilde{\xi}_k)\left[\frac{\tilde{W}_k}{\tilde{\xi}_k-\eta} + \tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)}(\arccos\eta)\tilde{L}_k(\eta)\right], \quad |\eta|<1, \quad \eta \neq \tilde{\xi}_k \tag{4.6}$$

Здесь и далее опущены члены порядка $O(n^{-2})$. Аналогично, (2.5) запишем в виде

$$\int_{-1}^{1} k(\xi,\eta)u(\xi)w(\xi)d\xi \cong \sum_{k=1}^{n} \tilde{W}_k k(\tilde{\xi}_k,\eta)u(\tilde{\xi}_k) \tag{4.7}$$

В дискретном наборе точек

$$\tilde{\eta}_m = \cos\theta_m, \quad \theta_m = \frac{2\alpha+1+4(m+j)\pi}{2n+\alpha+\beta+1}\,\frac{\pi}{2} \quad (m = 1, 2, \ldots, n), \quad j \in Z \tag{4.8}$$

таких, что $\tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)}(\theta_m) = 0$ (см. (4.5)) квадратурная формула (4.6) принимает наиболее простую форму

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)w(\xi)}{\xi-\eta_m} d\xi \cong \sum_{k=1}^{n} u(\tilde{\xi}_k)\frac{\tilde{W}_k}{\tilde{\xi}_k-\eta_m} \tag{4.9}$$

которая аналогична по структуре формуле (4.7).

Применяя квадратурные формулы (4.6) и (4.7) к СИУ (1.1), получим

$$\sum_{k=1}^{n} u(\tilde{\xi}_k)\left\{\tilde{W}_k\left[\frac{1}{\tilde{\xi}_k-\eta} + k(\tilde{\xi}_k,\eta)\right] + \tilde{M}_n^{(\alpha,\beta)}(\arccos\eta)\tilde{L}_k(\eta)\right\} \cong p(\eta), \quad |\eta|<1, \quad \eta \neq \tilde{\xi}_k \tag{4.10}$$

Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестной функции в дискретном наборе точек $\tilde{\xi}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), следует записать выражение (4.10) в n точках η_m ($m = 1, 2, \ldots, n$; $\eta \neq \tilde{\xi}_k$). Такая система будет эквивалентна системе, получаемой на основе (2.11), при больших значениях n.

В частности, в наборе точек $\tilde{\eta}_m$, определяемом (4.8), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{W}_k u(\tilde{\xi}_k)\left[\frac{1}{\tilde{\xi}_k-\tilde{\eta}_m} + k(\tilde{\xi}_k,\tilde{\eta}_m)\right] \cong p(\tilde{\eta}_m) \tag{4.11}$$

Отметим здесь, что целый параметр j ($j \in Z$) в (4.8) следует выбирать так, чтобы $0 < \theta_m < \pi$, т.е. в пределах $-(2\alpha + 5)/4 < j < (2\beta + 1)/4$, определяемых величинами α и β ($\alpha, \beta > -1$). В частности, при $\beta > -1/2$ можно положить $j = 0$ ($\forall\ \alpha > -1$), а при $\alpha > -1/2 - j = -1$ ($\forall\ \beta > -1$). Отметим, что такого рода анализ (4.8) позволяет сделать вывод о том, что формирование полной алгебраической системы в виде (4.11) возможно при $\alpha > -1/2$ или при $\beta > -1/2$, что полностью соответствует точной (см. предыдущий пункт) квадратурно-коллокационной методике.

Поскольку, как отмечалось выше, веса (4.4) и точки аппроксимации (4.3), а также точки коллокации (4.8), переходят в точные их выражения для любых n при $\alpha, \beta = \pm 1/2$, можно сделать вывод, что развитая в данном пункте методика решения СИУ (1.1) является, в определенном смысле, обобщением точных явных квадратурно-коллокационных методик Гаусса – Чебышева и Гаусса – Якоби [1].

Квадратурные формулы (4.6) и (4.7) остаются справедливыми в случае, когда $\alpha = \beta = 0$ (при этом в (4.8) можно положить $j = -1$), что дает возможность их использовать и при вычислении интегралов от функций, не имеющих особенностей на концах промежутка интегрирования. Приближенное положение точек аппроксимации (4.3), полученное на основе асимптотического разложения (4.1), при $\alpha = \beta = 0$ оказывается адекватным начальным приближением (3.7) в итерационном процессе поиска их истинного (определяемого с заданной точностью) положения.

Отметим, что численная реализация вычислений по (4.6) значительно проще, нежели по (2.7) и (2.10), поскольку она не требует вычисления специальных функций и построения итерационных процессов, связанных с определением их корней. Как следствие, значительно выше и скорость вычислений по формуле (4.6), особенно при использовании ее частного случая – квадратурной формулы (4.9), применение которой не требует вычисления коэффициентов Лагранжа. С другой стороны, максимальная достигаемая точность вычислений по (4.6) и (4.9) оказывается в значительной мере ограниченной, поскольку увеличение n влечет за собой не только повышение адекватности асимптотических представлений (4.1) и (4.2) (как следствие, и большую точность квадратурной формулы (4.6)), но и накопление ошибок вычислений. Подробный анализ этой и других особенностей применения изложенных квадратурных формул проведен в [18].

5. Результаты расчетов. Вопросы, связанные с точностью приведенных в *п.* 2 и 4 квадратурных формул для вычисления сингулярных интегралов, подробно рассмотрены в [18]. Приведем здесь лишь некоторые результаты решения СИУ на основе изложенных квадратурно-коллокационных методик (см. также [18]). Для этого рассмотрим СИУ Бюкнера [29]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi - \eta} + \int_{-1}^{1} \frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi + \eta + 2} = \pi f(\eta), \quad |\eta| < 1 \tag{5.1}$$

которое возникает при решении антиплоской задачи теории упругости о трещине, достигающей границы полупространства [17]. Как видно, ядро $k(\xi, \eta)$ ($k(\xi, \eta) = 1/(\xi + \eta + 2)$) имеет неподвижную особенность на левом конце промежутка интегрирования, поскольку ведет себя как ρ^{-1} ($\rho \to 0$) при $\xi = \eta \to -1$. Уравнение (5.1) имеет единственное решение, которое при $f(\eta) = q = \text{const}$ можно записать в форме [18, 29]:

$$\phi(\xi) = q\frac{1 + \xi}{\sqrt{1 - \xi}\sqrt{3 + \xi}} \tag{5.2}$$

Как видно, подынтегральная функция (5.1) оказывается простым нулем на левом конце промежутка интегрирования и имеет корневую особенность на правом, что соответствует показателям асимптотики $\alpha = -1/2$, $\beta = 1$ и весовой функции

$$w(\xi) = (1 - \xi)^{-1/2}(1 + \xi) \tag{5.3}$$

Таблица 1

ξ_k, $k = \overline{1.10}$ (2.4)	(5.2) (q = 1)	(2.12)–(2.6)	MTK1	MTK2	MTK3
0.9893260	9.6403765	9.6404492	9.6404703	9.6403789	9.6403761
0.9052947	3.1329122	3.1329380	3.1329458	3.1329131	3.1329128
0.7443578	1.7829153	1.7829327	1.7829399	1.7829158	1.7829156
0.5201627	1.1696656	1.1696808	1.1696894	1.1696661	1.1696659
0.2517209	0.8024521	0.8024673	0.8024944	0.8024526	0.8024523
–0.0382037	0.5484843	0.5485020	0.5484701	0.5484849	0.5484845
–0.3250257	0.3585215	0.3585450	0.3585305	0.3585223	0.3585218
–0.5844217	0.2124255	0.2124624	0.2124443	0.2124269	0.2124261
–0.7943919	0.1033516	0.1034262	0.1034016	0.1033547	0.1033528
–0.9371120	0.0314595	0.0317208	0.0316037	0.0314623	0.0314607

Отметим, что такие особенности решение уравнения (5.1) имеет для любой правой части, поскольку определяются они его главной, левой частью [2].

В табл. 1 приведены результаты численного решения СИУ (5.1) (при $f(\eta) = 1$) с весовой функцией (5.3) по квадратурно-коллокационным методикам (2.11) и (2.12). Решение получено на множестве точек аппроксимации ξ_k (2.4) ($\alpha = -1/2$, $\beta = 1$, $k = \overline{1, 10}$), которые представлены в первом столбце таблицы. Во втором столбце приведены значения аналитического решения (5.2) (при $q = 1$), вычисленные в этих точках

В третьем столбце табл. 1 приведено решение СИУ (5.1), полученное в соответствии с выражением (2.12), которое записывалось на множестве точек (2.6), построенном на основе изложенных в *п*. 3 методик. Как видно, уже при таких небольших величинах $n = 10$ численное решение дает от четырех до пяти верных значащих цифр. Отметим лишь некоторое увеличение относительной погрешности, которое наблюдается вблизи левого конца отрезка (–1, 1), где она составляет $\varepsilon_{max} = 0.83\%$ (в наименьшей точке аппроксимации). Причина этого увеличения обсуждается ниже.

Прежде чем продолжить анализ результатов, представленных в табл. 1, рассмотрим некоторые особенности реализации решения СИУ на основе квадратурных методик (2.11) и (4.10), характерной особенностью которых является произвольность выбора точек коллокации в промежутке (–1, 1) при единственном ограничении – $\eta \neq \xi_k$. Выбор множества этих точек в общем случае должен базироваться на следующих обстоятельствах.

С одной стороны точность аппроксимации интеграла в виде суммы, вообще говоря, зависит от положения точки η, причем зависимость эта может оказаться существенной [18]. Следовательно, необходим предварительный анализ квадратурных методик с целью выявления оптимальных с точки зрения минимизации максимальной погрешности (которая прямо влияет на точность решения СИУ [28]) множеств точек коллокации. Результаты такого рода анализа для рассматриваемых квадратурных методик представлены в [18].

С другой стороны, поскольку на точность решения СИУ, помимо максимальной погрешности вычисления интеграла, влияет также и погрешность, связанная с численным решением формируемой алгебраической системы [28], важную роль играет и мера обусловленности матрицы коэффициентов последней. Эти коэффициенты определяются параметрами неизвестной функции α, β и дискретизации n, а также являются функциями η. Так, для методики (2.10) эти коэффициенты имеют вид (для (4.10) вид аналогичен, необходимо лишь заменить точные величины приближенными):

$$A_k(\alpha, \beta, n; \eta) = W_k\left[\frac{1}{\xi_k - \eta} + k(\xi_k, \eta)\right] + \frac{q_n^{(\alpha, \beta)}(\eta)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(\eta)}L_k(\eta) \tag{5.4}$$

Не будем здесь останавливаться на строгих методах построения хорошо обусловленной системы с помощью подбора множества точек коллокации в (5.4), поскольку такой подход, очевидно, повлечет за собой неоправданно большой рост объема вычислений. Кроме того, этот подход сложно увязать с первым из отмеченных факторов, влияющих на точность решения СИУ – максимальной погрешностью вычисления интеграла. Выделим лишь некоторые ключевые моменты, следующие из (5.4) и определяющие обусловленность системы с такими коэффициентами, которая, как известно, связана с их масштабами (см., например, [30]).

Прежде всего, отметим, что ядро $k(\xi_k, \eta)$ сингулярно на одном либо на обоих концах промежутка интегрирования (в рассматриваемом случае только на левом конце). Особенности поведения ядра $k(\xi_k, \eta)$ совместно с "подвижной" сингулярной составляющей типа Коши (первый интеграл (1.1)) определяют тип весовой функции (1.3). Последняя в свою очередь непосредственным образом диктует характер поведения весов W_k (2.2). Так, например, в рассматриваемом случае (5.3) вес возрастает вблизи правого конца отрезка ($k = 1$) и быстро убывает при приближении к левому концу ($k = 10$). Следовательно, поведение веса W_k в некоторой степени компенсирует сингулярность ядра $k(\xi_k, \eta)$, выравнивая масштабы коэффициентов системы. В то же время, как показано ниже, уровень этой компенсации можно увеличить, варьируя положением крайних точек коллокации. Последнее, заметим, определенным образом смыкается с минимизацией максимальной погрешности для рассматриваемых методик вычисления интегралов [18].

Отметим также, что первый сингулярный член (5.4) $(1/(\xi_k - \eta))$ может сильно возрастать при сближении значений η и ξ_k, что может привести к ухудшению обусловленности системы. Как следствие, подбор множества точек коллокации должен, кроме того, базироваться на предотвращении сильного сближения значений η и ξ_k.

Одним из очевидных выборов множества точек коллокации, явно учитывающим это последнее требование, представляется следующий:

$$\eta_1 = (1 - \xi_1)/2, \quad \eta_m = (\xi_m + \xi_{m-1})/2 \quad (m = 2, 3, \dots, n), \quad \eta_{n+1} = (-1 - \xi_n)/2 \tag{5.5}$$

Геометрически такой выбор соответствует размещению точек коллокации в центре промежутка между соседними точками аппроксимации, а также между крайними точками аппроксимации и концами отрезка (–1, 1). Для решения СИУ (5.1) в рассматриваемом случае одну из точек (5.5) можно не использовать.

Вернемся к анализу данных табл. 1. Представленные в ней результаты численного решения, полученные по методике (2.11), сопровождались выбором множества точек коллокации (МТК) в виде (5.5) без использования одной из следующих точек: центральной точки $\eta_{(n+1)/2}$ (для четных n; при $n = 10$ это η_6) – столбец МТК1, и последней точки η_{n+1} (η_{11} – столбец МТК2. Как видно, если первый выбор не позволил добиться значительного улучшения точности численного решения по сравнению с методикой (2.12) (те же 4–5 верных знаков при $\varepsilon_{max} = 0.45\%$), то второй дал возможность получить от пяти до семи верных знаков и существенно сократил максимальную погрешность, возникающую вблизи левого конца отрезка (–1, 1) ($\varepsilon_{max} = 0.009\%$). В этом последнем случае мера обусловленности полученной матрицы (т.е. отношение модулей наибольшего и наименьшего из собственных ее значений – $\nu(A) = \max|\lambda_A|/\min|\lambda_A|$ [30]) составила 16.64. Для сравнения, меры обусловленности матриц, построенных по методикам (2.12) и (2.11) (МТК1) были равны 83.44 и 45.69 соответственно. Поскольку точность вычисления интегралов по методикам (2.7) и (2.10) при $n = 10$ очень высока [18], основной причиной уменьшения погрешности для МТК2 следует признать лучшую обусловленность системы уравнений.

Следовательно, одним из важных критериев при выборе точек коллокации, необходимых для построения алгебраической системы по (2.11), следует признать меру обусловленности формируемой таким путем матрицы коэффициентов (5.4). Анализ этой меры для ограниченного набора точек коллокации (например, набора (5.5)) позволяет существенно повысить точность решения без значительного увеличения объема вычислений.

В столбце МТК3 табл. 1 также приведено решение СИУ (5.1), полученное в соответствии с выражением (2.11), которое записывалось на эквидистантных точках коллокации $\eta_m = -1 + 2m/11$ ($m = \overline{1, 10}$). При $n = 10$ такое множество точек коллокации обеспечивает высокую точность решения, однако рост n при сохранении равномерности сетки приводит к совершенно неприемлемому увеличению погрешности решения. Так, уже при $n = 50$ максимальная относительная погрешность составляет $\varepsilon_{max} = 83487\%$. Связано это с плохой обусловленностью формируемой алгебраической системы, вызванной неконтролируемым сближением точек коллокации и аппроксимации, что подтверждает сделанный ранее вывод о значимости исключения этого явления при выборе множества точек коллокации.

Напротив, численные решения, построенные с помощью других обсуждавшихся выше множеств точек коллокации не только устойчивы по отношению к росту n, но и увеличивают с ним свою точность. Так, методики (2.12) и (2.11) (МТК1) при $n = 50$ дают от пяти до восьми верных значащих цифр в численном решении СИУ. В то же время отметим, что максимальная погрешность вблизи левого конца отрезка (–1, 1) убывает очень медленно. В частности, при $n = 50$ для этих методик она составляет в наименьшей точке аппроксимации 0.80% и 0.44% соответственно (пять верных цифр). Это связано, с тем, что при таком параметре дискретизации сохраняется отмеченное выше отношение мер обусловленности матриц, получаемых на основе различных методик. Как следствие, методика (2.11) (МТК2), наименьшая точка коллокации которой удалена от левого конца отрезка, дает максимальную погрешность вблизи него 0.007% (семь верных цифр), а в других точках от восьми до десяти верных цифр.

Отметим, что проявленное выше внимание к погрешности решения в крайних точках аппроксимации связано с тем, что в прикладных задачах часто возникает необходимость в определении коэффициента при главном члене асимптотического разложения неизвестной функции вблизи концов промежутка интегрирования. Построение этого коэффициента путем экстраполяции из множества значений функции во внутренних точках промежутка накладывает особые требования на точность решения, получаемого вблизи этих концов. С другой стороны, в случаях, когда нет необходимости в точном определении неизвестной функции вблизи того конца промежутка интегрирования, в котором она стремится к нулю, в весовой функции можно не учитывать эту асимптотику. Об этом свидетельствует решения уравнения (5.1), полученные для весовой функции

$$w(\xi) = (1-\xi)^{-1/2} \tag{5.6}$$

(см. (5.3)). Расчеты показывают, что неучет асимптотики на левом конце отрезка (–1, 1) приводит только лишь к незначительному росту погрешности решения вблизи этого конца и не оказывает существенного влияния на решение на удалении от него. Так, в частности, расчет по методике (2.12) при $n = 10$ дает максимальную погрешность у левого конца $\varepsilon_{max} = 1.84\%$ (ранее, см. выше, $\varepsilon_{max} = 0.83\%$) и те же 4–5 верных значащих цифр во всех расчетных точках. Описанное обстоятельство несколько облегчает решение задачи на этапе исследования асимптотики решения на концах промежутка интегрирования, поскольку в этом случае необходимо отыскивать только сингулярность неизвестной функции (показатель асимптотики в диапазоне (–1, 0)).

В то же время, здесь необходимо обсудить одно существенное обстоятельство, которое сопровождает построение численного решения на основе весовых функций, приближенно отражающих главные члены асимптотических разложений решения вблизи концов промежутка интегрирования. Дело в том, что выбор весовой функции в приближенной форме может незначительно повлиять на точность решения $\phi(\xi)$ СИУ (1.1), однако ограниченная составляющая решения $u(\xi)$ (см. (1.2) и (1.3)), как правило, оказывается в этом случае сильно искаженной.

Действительно, как было показано выше, приближенное решение $\phi_{\text{appr}}(\xi)$ СИУ (5.1), полученное при использовании весовой функции (5.6) очень незначительно отличается от решения $\phi_{\text{true}}(\xi)$, построенного на основе адекватной весовой функции (5.3), т.е. $\phi_{\text{appr}}(\xi) \approx \phi_{\text{true}}(\xi)$. Следовательно, взаимосвязь соответствующих ограниченных составляющих решений дается выражением $u_{\text{appr}}(\xi) \approx u_{\text{true}}(\xi)/(1+\xi)$ (см. (1.2) и (1.3)). Как видно, эти составляющие существенно отличаются, в том числе вблизи правого конца промежутка интегрирования (здесь отличие в два раза), где приближенный вес (5.6) адекватно отражает асимптотику неизвестной функции (5.2).

Получение решения $\phi(\xi)$ в произвольной точке внутри промежутка (–1, 1) может базироваться на интерполяции (2.8), в которую вместо значений $u(\xi_k)$, получаемых после решения алгебраической системы, следует подставлять величины $\phi(\xi_k) = u(\xi_k)w(\xi_k)$. Однако для получения коэффициентов $u(\pm 1)$ при главных членах асимптотического разложения неизвестной функции вблизи концов промежутка интегрирования в (2.8) (или в (2.13)) необходимо подставлять именно ограниченную составляющую решения $u(\xi_k)$. Следствием этого может явиться весьма неточное определение этих коэффициентов в случае использования приближенного выражения для весовой функции.

Так, в частности, в [4, 32] в рамках исследования напряженного состояния упругой полуплоскости с краевым разрезом рассматривалось СИУ (1.1) с ядром

$$k(\xi,\eta) = -\frac{1}{\xi+\eta+2} - \frac{2(1+\eta)}{(\xi+\eta+2)^2} + \frac{4(1+\eta)^2}{(\xi+\eta+2)^3} \tag{5.7}$$

которое имеет неподвижную особенность рассматриваемого типа при $\xi = \eta \to -1$. Наличие этой особенности обуславливает ограниченность решения вблизи левого конца промежутка интегрирования ($\phi(-1) = \text{const} \neq 0$), в то время как на правом конце сохраняется корневая особенность (см., например, [31]). Таким образом, адекватной весовой функцией в данном случае будет

$$w(\xi) = (1-\xi)^{-1/2} \tag{5.8}$$

В [4] численное решение СИУ (1.1) с ядром (5.7) осуществлялось на основе приближенного выражения для весовой функции, которая выбиралась в виде

$$w(\xi) = (1-\xi)^{-1/2}(1+\xi)^{-1/2} \tag{5.9}$$

(на решение СИУ также налагалось дополнительное условие $u(-1) = 0$, указывающее на то, что подынтегральная функция имеет при $\xi = -1$ имеет особенность меньшего порядка, чем $1/\sqrt{1+\xi}$). Основным мотивом использования приближенного выражения (5.9) являлась возможность использования при такой весовой функции явных ква-

Таблица 2

$\tilde{\xi}_k$, $k = \overline{1.10}$ (4.3)	(5.2) ($q = 1$)	(4.11)	МТК1	МТК2
0.9893433	9.6482613	9.6482878	9.6483043	9.6482605
0.9054482	3.1356450	3.1356544	3.1356604	3.1356447
0.7447721	1.7846868	1.7846932	1.7846981	1.7846866
0.5209403	1.1710839	1.1710895	1.1710948	1.1710838
0.2529333	0.8037310	0.8037366	0.8037504	0.8037308
−0.0365220	0.5497328	0.5497392	0.5497262	0.5497326
−0.3228804	0.3598083	0.3598168	0.3598123	0.3598080
−0.5818589	0.2137952	0.2138087	0.2138038	0.2137949
−0.7914964	0.1048229	0.1048504	0.1048460	0.1048229
−0.9340161	0.0330099	0.0331076	0.0330793	0.0330101

дратурных формул высшей алгебраической точности Гаусса-Чебышева [4]. В [32] также использовалось приближенное выражение для весовой функции в форме

$$w(\xi) = (1-\xi)^{-1/2}(1+\xi)^{1/2} \tag{5.10}$$

что позволило использовать точные явные квадратурные формулы Гаусса – Якоби [2]. Поскольку основная цель работ [4, 32] состояла в определении коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) на правом конце разреза, после нахождения множества значений $u(\xi_k)$ с помощью (2.8) определялась величина $u(1)$, с точностью до постоянного множителя совпадающая с КИН. Это приводило, к завышенным [4] и заниженным [32] в $\sqrt{2}$ раз значениям КИН, что было отмечено в [20] на основе сравнения с решением, полученным по приведенной в *п.* 4 методике (при адекватной весовой функции (5.8)). Этот же результат нетрудно получить на основе сравнения весовых функций (5.8), (5.9) и (5.10), аналогичного проведенному выше для (5.3) и (5.6).

Таким образом, использование приближенных выражений для весовой функции может повлечь за собой существенную неточность некоторых результатов численного решения задачи, описываемой СИУ (1.1). С другой стороны, проведенный анализ позволяет предложить искусственный прием, позволяющий облегчить численное решение СИУ посредством использования приближенной весовой функции при сохранении приемлемой точности ограниченной составляющей решения $u(\xi)$. Действительно, предположим, что на основе использования приближенной весовой функции $w_{\text{appr}}(\xi)$ удается построить решение $\phi_{\text{appr}}(\xi)$, которое на некоторой части отрезка (–1, 1) оказывается достаточно близким к решению $\phi_{\text{true}}(\xi)$, построенному на основе точной весовой функции $w_{\text{true}}(\xi)$ ($\phi_{\text{appr}}(\xi) \approx \phi_{\text{true}}(\xi)$, $-1 \le a < \xi < b \le 1$). Тогда ограниченную составляющую решения СИУ можно с той же точностью определить с помощью выражения $u_{\text{true}}(\xi) \approx u_{\text{appr}}(\xi) w_{\text{appr}}(\xi)/w_{\text{true}}(\xi)$ $(-1 \le a < \xi < b \le 1)$. Если $a = -1$ или $b = 1$, то коэффициент при главном члене асимптотического разложения неизвестной функции вблизи соответствующего конца отрезка (–1, 1) можно достаточно точно определить на основе такой синтетической функции $u_{\text{true}}(\xi)$.

В табл. 2 приведены результаты численного решения СИУ (5.1) (при $f(\eta) = 1$) с весовой функцией (5.3) по квадратурно-коллокационным методикам (4.10) и (4.11). Решение получено на множестве точек аппроксимации $\tilde{\xi}_k$ ($k = \overline{1, 10}$) (4.3), которые представлены в первом столбце таблицы. Во втором столбце приведены значения аналитического решения (5.2) (при $q = 1$), вычисленные в этих точках.

В других столбцах табл. 2 приведены решения СИУ (5.1), полученные в соответствии с методикой (4.11), а также по методике (4.10) с выбором точек коллокации в виде (5.5) (с заменой точных значений ξ_k на приближенные $\tilde{\xi}_k$) без использования центральной (МТК1) и последней (МТК2) из них. Как видно, в данном случае приближенные методики позволяют получить исключительно точные результаты, близкие, а в некоторых случаях и более точные, нежели приведенные выше для точных методик (см. табл. 1). В частности, максимальная погрешность при расчете по (4.11) ($\varepsilon_{max} = 0.29\%$) меньше максимальной погрешности, полученной в соответствии с (2.12) ($\varepsilon_{max} = 0.83\%$). Достаточно малая погрешность решения СИУ при столь небольших значениях n связана с отмеченной в [18] высокой точностью приближенных формул (4.6) и (4.9) при вычислении интегралов от функций, имеющих корневую особенность на одном из концов промежутка интегрирования и, особенно, стремящихся к нулю на другом. Использование методики (4.10) на точках коллокации (5.5) при отбрасывании последней из них, лежащей у левого конца отрезка $(-1, 1)$, приводит к существенному уменьшению максимальной погрешности $\varepsilon_{max} = 0.0007\%$ (МТК2), наблюдаемой, как и ранее, вблизи этого конца. Столь значительное уменьшение погрешности в данном случае связано не только с улучшением обусловленности системы, но и со снижением максимальной погрешности аппроксимации интеграла, наблюдающейся у левого конца [18].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ (гранты МК-878.2003.01 и НШ-1849.2003.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S.* The numerical solutions of singular integral equations // Mechanics of Fracture. V. 1. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Noordhoff Intern. Pbul., 1973. P. 368–425.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
3. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
4. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
5. *Дудучава Р.В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР. 1979. Т. 60. 135 с.
6. *Theocaris P.S., Ioakimidis N.I.* The *V*-notched elastic half-plane problem // Acta mech. 1979. V. 32. № 1–3. P. 125–140.
7. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
8. *Каландия А.И.* Замечания об особенности упругих решений вблизи углов // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 132–135.
9. *Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Асимптотический анализ решения в окрестности точки излома трещины на границе раздела двух сред // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 865–870.
10. *Laurita C.* Condition numbers for singular integral equations in weighted L^2 spaces // J. Comput. and Appl. Math. 2000. V. 116. № 1. P. 23–40.
11. *Chen K.* Efficient iterative solution of linear systems from discretizing singular integral equations // Electronic Trans. on Numer. Analysis. 1994. V. 2. P. 76–91.
12. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физмагтиз, 1962. 500 с.
13. *Gautschi W.* Gauss – Radau formulae for Jacobi and Laguerre weight functions // Mathematics and Computers in Simulation. 2000. V. 54. № 4–5. P. 403–412.
14. *Kzaz M.* Convergence acceleration of Jacobi – Gauss quadrature formulae for analytic functions with poles // J. Comput. and Appl. Math. 1995. V. 57. № 1–2. P. 181–192.

15. *Kim P., Lee S.* A piecewise linear quadrature of Cauchy singular integrals // J. Comput. and Appl. Math. 1998. V. 95. № 1–2. P. 101–105.
16. *Kim P., Choi U.J.* A quadature rule for weighted Cauchy integrals // J. Comput. and Appl. Math. 2000. V. 126. № 1–2. P. 221–232.
17. *Theocaris P.S, Ioakimidis N.I.* Stress intensity factors at the tips of an antiplane shear crack terminating at b bimaterial interface // Intern. J. Fracture. 1977. V. 13. № 4. P. 549–552.
18. *Андреев А.В.* Об одном методе численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с обобщенным ядром типа Коши. Препринт № 743. М.: ИПМ РАН, 2004. 60 с.
19. *Chawla M.M., Ramacrishnan T.R.* Modified Gauss – Jacobi quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy type singular integrals // BIT. 1974. V. 14. № 1. P. 14–21.
20. *Андреев А.В.* Расчет предельного равновесия краевых криволинейных трещин в упругой полуплоскости с учетом асимптотики напряжений // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 82–96.
21. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
22. *Stroud A.H., Secrest D.* Gaussian Quadrature Formulas. N. J.: Prentice-Hall, 1966. 374 p.
23. *Lanczos C.J.* A precision approximation of the gamma function // SIAM J. Numer. Anal. Ser. B. 1964. V. 1. P. 86–96.
24. *Luke Y.L.* The Special Functions and their Approximations. V. 1. N. Y.: Acad. Press, 1969. 349 p.
25. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
26. *Elliott D.* Uniform asymptotic expansions of the Jacobi polynomials and an associated function // Math. Comput. 1971. V. 25. № 114. P. 309–315.
27. *Gautschi W.* Gauss quadrature approximations to hypergeometric and confluent hypergeometric functions // J. Comput. and Appl. Math. 2002. V. 139. № 1. P. 173–187.
28. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
29. *Bueckner H.F.* On a class of singular integral equations // J. Math. Analys. and Appl. 1966. V. 14. № 3. P. 392–426.
30. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
31. *Комогорцев В.Ф., Попов Г.Я., Радиолло М.В.* Внутренний контакт упругой шайбы с бесконечной пластинкой, имеющей круговой вырез и радиальную трещину // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 71–82.
32. *Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Расчет предельного равновесия внутренних и краевых трещин со взаимодействующими поверхностями в упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 96–112.

Москва

Поступила в редакцию
9.12.2003