МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2005

УДК 539.374

 Б. Г. МИРОНОВ

О СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОЙ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

В работе [1] рассмотрена плоская задача в предположении, что предельное условие зависит только от направления главных напряжений. В данной работе рассматривается пространственная задача. Предполагается также, что предельное условие зависит только от направлений главных напряжений.

1. Предельное условие в общем случае пространственной задачи теории идеальной пластичности запишем в виде

$$f_k(\sigma_{ij}) = 0 \tag{1.1}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат xyz.

Соотношения связи между главными напряжениями σ_i и компонентами напряжений σ_{ij} имеют вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j \tag{1.2}$$

Для направляющих косинусов справедливы соотношения

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij} \tag{1.3}$$

Из (1.2) согласно (1.3) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y l_2^2 + \sigma_z l_3^2 + \tau_{xy} l_1 l_2 + \tau_{yz} l_2 l_3 + \tau_{xz} l_1 l_3 \\ \sigma_{12} &= \sigma_x l_1 m_1 + \sigma_y l_2 m_2 + \sigma_z l_3 m_3 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ &+ \tau_{yz}(l_2 m_3 + l_3 m_2) + \tau_{xz}(l_1 m_3 + l_3 m_1) = 0 \quad (123,\ lmn,\ xyz) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где символ (123, lmn, xyz) здесь и далее означает, что недостающие уравнения получаются путем циклической перестановки 1, 2, 3, l, m, n, x, y, z.

Используя (1.2), условия (1.1) можно переписать в виде

$$f_k(\sigma_i, l_i, m_i, n_i) = 0 \tag{1.5}$$

Наличие l_i, m_i, n_i в соотношениях (1.5) определяет свойства материала в зависимости от направления и характеризует анизотропию материала.

Ниже рассмотрим случай, когда соотношения (1.5) не зависят от σ_i, т.е.

$$f_k(l_i, m_i, n_i) = 0 \tag{1.6}$$

Подобную (1.6) среду назовем предельно анизотропной.

В плоском случае условие (1.6) согласно [3] имеет вид

$$\varphi = \text{const}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_z - \sigma_y} \tag{1.7}$$

где φ – угол, определяющий направление первого главного напряжения в ортогональной системе координат x, y, z. Из (1.7) следует

$$(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi - 2\tau_{xy}\cos 2\varphi = 0 \tag{1.8}$$

Условие (1.8) означает отсутствие касательных напряжений на главных площадках

В общем случае условие отсутствия касательных напряжений на главных площадках задается в виде

$$\begin{gathered}\sigma_x l_1 m_1 + \sigma_y l_2 m_2 + \sigma_z l_3 m_3 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ + \tau_{yz}(l_2 m_3 + l_3 m_2) + \tau_{xz}(l_1 m_3 + l_3 m_1) = 0 \quad (123, lmn, xyz)\end{gathered} \tag{1.9}$$

В дальнейшем предположим l_i, m_i, n_i постоянными, независящими от координат x, y, z. При помощи функций напряжений Максвелла

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 X_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 X_3}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 X_3}{\partial x \partial y} \quad (xyz, 123) \tag{1.10}$$

удовлетворим уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 0 \quad (xyz)$$

Из (1.9) согласно (1.10) получим

$$\begin{gathered}l_3 m_3 \frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} - (l_2 m_3 + l_3 m_2)\frac{\partial^2 X_1}{\partial y \partial z} + l_2 m_2 \frac{\partial^2 X_1}{\partial z^2} + \\ + l_3 m_3 \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} - (l_1 m_3 + l_3 m_1)\frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial z} + l_1 m_1 \frac{\partial^2 X_2}{\partial z^2} + \\ + l_2, m_2 \frac{\partial^2 X_3}{\partial x^2} - (l_1 m_2 + l_2 m_1)\frac{\partial^2 X_3}{\partial x \partial y} + l_1 m_1 \frac{\partial^2 X_3}{\partial y^2} = 0 \quad (123, lmn, xyz)\end{gathered} \tag{1.11}$$

Характеристические поверхности $\mu(x, y, z) = C$ системы (1.11) определяются из уравнений

$$l_1 \frac{\partial \mu}{\partial x} + l_2 \frac{\partial \mu}{\partial y} + l_3 \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0 \quad (lmn) \tag{1.12}$$

Общее решение системы (1.11) может быть представлено в виде

$$X_i = A_i X(l_1 x + l_2 y + l_3 z) + B_i Y(m_1 x + m_2 y + m_3 z) + C_i Z(n_1 x + n_2 y + n_3 z) \tag{1.13}$$

где коэффициенты A_i, B_i, C_i удовлетворяют соотношениям

$$l_1 m_1 C_1 + l_2 m_2 C_2 + l_3 m_3 C_3 = 0 \quad (lmn, CAB) \tag{1.14}$$

Согласно (1.13) выражения (1.10) для компонент напряжений примут вид

$$\sigma_x = (A_2 l_3^2 + A_3 l_2^2)\varphi_1(\xi) + (B_2 m_3^2 + B_3 m_2^2)\varphi_2(\eta) + (C_2 n_3^2 + C_3 n_2^2)\varphi_3(\zeta) \tag{1.15}$$

$$\tau_{xy} = -A_3 l_1 l_2 \varphi_1(\xi) - B_3 m_1 m_2 \varphi_2(\eta) - C_3 n_1 n_2 \varphi_3(\zeta) \quad (xyz, 123)$$

$$\xi = l_1 x + l_2 y + l_3 z, \quad \eta = m_1 x + m_2 y + m_3 z, \quad \zeta = n_1 x + n_2 y + n_3 z \tag{1.16}$$

$$\varphi_1(\xi) = \frac{d^2 X}{d\xi^2}, \quad \varphi_2(\eta) = \frac{d^2 Y}{d\eta^2}, \quad \varphi_3(\zeta) = \frac{d^2 Z}{d\zeta^2}$$

Выражение мощности рассеяния механической энергии имеет вид

$$N = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\tau_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\tau_{yz}\varepsilon_{yz} + 2\tau_{xz}\varepsilon_{xz}$$

Согласно (1.2):

$$\begin{aligned} N &= \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_x l_1^2 + \varepsilon_y l_2^2 + \varepsilon_z l_3^2 + 2\varepsilon_{xy} l_1 l_2 + 2\varepsilon_{yz} l_2 l_3 + 2\varepsilon_{xz} l_1 l_3 \quad (123, lmn, xyz) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Величины ε_1, ε_2, ε_3 определяют скорости деформации вдоль направлений главных компонент напряжений и в общем случае не совпадают с главными компонентами скорости деформации.

Соотношения ассоциированного закона пластического течения определяются из условия экстремума функционала

$$A = N - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 - \lambda_3 F_3$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_x l_1 m_1 + \sigma_y l_2 m_2 + \sigma_z l_3 m_3 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ &+ \tau_{yz}(l_2 m_3 + l_3 m_2) + \tau_{xz}(l_1 m_3 + l_3 m_1) \quad (123, lmn, xyz) \end{aligned}$$

и имеют вид

$$\varepsilon_x = \lambda_1 l_1 m_1 + \lambda_2 m_1 n_1 + \lambda_3 n_1 l_1 \tag{1.18}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \lambda_1(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \lambda_2(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \lambda_3(n_1 l_2 + n_2 l_1) \quad (123, lmn, xyz) \tag{1.19}$$

Из (1.18), (1.19) получим

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \\ &\varepsilon_1 = \varepsilon_x l_1^2 + \varepsilon_y l_2^2 + \varepsilon_z l_3^2 + 2\varepsilon_{xy} l_1 l_2 + 2\varepsilon_{yz} l_2 l_3 + 2\varepsilon_{xz} l_1 l_3 = 0 \quad (xyz, lmn, 123) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Согласно (1.9), (1.20) имеем, что вдоль направлений главных напряжений нормальные составляющие скорости деформации равны нулю.

Из (1.17) и (1.20) следует, что в предельно анизотропном случае мощность рассеяния механической энергии N равна нулю как следствие отсутствия сцепления.

По формулам Коши от компонент скоростей деформаций перейдем к компонентам скоростей перемещений

$$\varepsilon_x = \partial u/\partial x, \quad \varepsilon_y = \partial v/\partial y, \quad \varepsilon_z = \partial w/\partial z \tag{1.21}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{1.22}$$

Тогда из (1.20)–(1.22) имеем

$$\begin{aligned}&l_1^2\frac{\partial u}{\partial x}+l_1l_2\frac{\partial u}{\partial y}+l_1l_3\frac{\partial u}{\partial z}+l_1l_2\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+l_2^2\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\\&+l_2l_3\frac{\partial \upsilon}{\partial z}+l_1l_3\frac{\partial w}{\partial x}+l_2l_3\frac{\partial w}{\partial y}+l_3^2\frac{\partial w}{\partial z}=0\quad(123,\,lmn,\,xyz)\end{aligned}\tag{1.23}$$

Уравнения для определения характеристических поверхностей $\nu(x, y, z) = C$ системы (1.23) будут

$$l_1\frac{\partial \nu}{\partial x}+l_2\frac{\partial \nu}{\partial y}+l_3\frac{\partial \nu}{\partial z}=0\quad(lmn)\tag{1.24}$$

Из (1.12) и (1.24) следует, что системы (1.11) и (1.23) имеют совпадающие характеристические поверхности.

Общее решение системы (1.23) можно записать в виде

$$u=a_1U(\xi)+b_1V(\eta)+c_1W(\zeta)\quad(u\upsilon w,\,xyz,\,123)\tag{1.25}$$

где a_i, b_i и c_i удовлетворяют соотношениям

$$a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3=0,\quad b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3=0,\quad c_1n_1+c_2n_2+c_3n_3=0\tag{1.26}$$

2. Рассмотрим случай, когда $A_1 = A_2 = A_3$, $B_1 = B_2 = B_3$, $C_1 = C_2 = C_3$ и $a_i = m_i$, $b_i = n_i$, $c_i = l_i$. Не нарушая общности можно считать, что $A_i = B_i = C_i = 1$.

Тогда из (1.15), (1.16) и (1.25) получим

$$\sigma_x=(1-l_1^2)\varphi_1(\xi)+(1-m_1^2)\varphi_2(\eta)+(1-n_1^2)\varphi_3(\zeta)\tag{2.1}$$

$$\tau_{xy}=-l_1l_2\varphi_1(\xi)-m_1m_2\varphi_2(\eta)-n_1n_2\varphi_3(\zeta)\quad(xyz,\,123)\tag{2.2}$$

$$u=m_1U(\xi)+n_1V(\eta)+l_1W(\zeta),\quad(u\upsilon w,\,123)\tag{2.3}$$

Предположим, что на плоскости $z = 0$ заданы напряжения и скорости перемещений

$$\sigma_z=p(x,y),\quad\tau_{xy}=\tau_{xz}=0\tag{2.4}$$

$$u=\upsilon=0,\quad w=q(x,y)\tag{2.5}$$

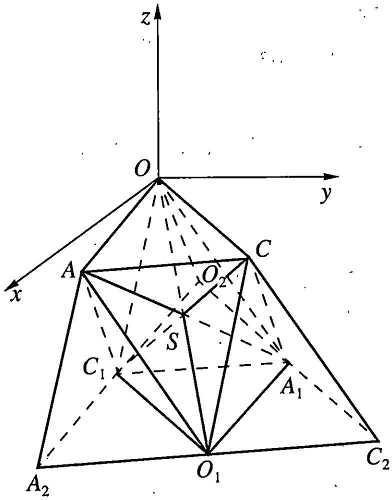
Согласно (2.1)–(2.3):

$$\sigma_x=\frac{1}{2}[(1-l_1^2)p(\xi)+(1-m_1^2)p(\eta)+(1-n_1^2)p(\zeta)]\tag{2.6}$$

$$\tau_{xy}=-\frac{1}{2}[l_1l_2p(\xi)+m_1m_2p(\eta)+n_1n_2p(\zeta)]\quad(xyz,\,123)\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&u=m_1m_3q(\xi)+n_1n_3q(\eta)+l_1l_3q(\zeta),\quad \upsilon=m_2m_3q(\xi)+n_2n_3(\eta)+l_2l_3q(\zeta)\\&w=m_3^2q(\xi)+n_3^2q(\eta)+l_3^2q(\zeta)\end{aligned}\tag{2.8}$$

где $p(\xi)$ и $q(\xi)$ – распространение функций $p(x, y)$ и $q(x, y)$ вдоль плоскостей $\xi = \xi_0$. Аналогично определяются $p(\eta)$, $p(\zeta)$, $q(\eta)$, $q(\zeta)$.



Фиг. 1

В качестве примера рассмотрим распределение постоянного давления в треугольнике AOC (фигура):

$$AO\colon\ l_1x + l_2y = 0, \quad OC\colon\ m_1x + m_2y = 0, \quad AC\colon\ n_1x + n_2y = d$$

$$\sigma_z = p - \text{const в } \Delta AOC, \quad \sigma_z = 0 \quad \text{вне} \quad \Delta AOC$$

Тогда согласно (2.6) и (2.7) имеем

в пирамиде $SAOC$:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

в пирамиде $SACO_1$:

$$\sigma_x = \frac{p}{2}(1 + n_1^2), \quad \tau_{xy} = \frac{p}{2}n_1n_2 \quad (xyz, 123)$$

в пирамиде $SACO_1$:

$$\sigma_x = \frac{p}{2}(1 + l_1^2), \quad \tau_{xy} = \frac{p}{2}l_1l_2 \quad (xyz, 123)$$

в пирамиде $SOCA_1$:

$$\sigma_x = \frac{p}{2}(1 + m_1^2), \quad \tau_{xy} = \frac{p}{2}m_1m_2 \quad (xyz, 123)$$

в зоне $CSO_1C_2A_1$:

$$\sigma_x = \frac{p}{2}(1 - l_1^2), \quad \tau_{xy} = -\frac{p}{2}l_1l_2 \quad (xyz, 123)$$

в зоне $ASO_1A_2C_1$:

$$\sigma_x = \frac{p}{2}(1 - m_1^2), \quad \tau_{xy} = -\frac{p}{2}m_1m_2 \quad (xyz, 123)$$

в зоне $OSC_1O_2A_1$:

$$\sigma_x = \frac{p}{2}(1-n_1^2), \quad \tau_{xy} = -\frac{p}{2}n_1n_2 \quad (xyz, 123)$$

В остальных зонах все компоненты напряжений равны нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. В 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
2. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
3. *Артемов М.А., Ивлев Д.Д.* Об одном случае предельного состояния тел // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 43–45.

Чебоксары

Поступила в редакцию
31.03.2003