

УДК 532.595:534.6

© 2005 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, С. В. НЕСТЕРОВ

ИНЕРЦИОННЫЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Предложена и построена динамическая модель пористой среды, пропитанной вязкой жидкостью. Определены инерционные и диссипативные характеристики среды, обусловленные взаимодействием твердого скелета и вязкой жидкости, заполняющей поры. Установлена существенная зависимость указанных характеристик от частоты внешнего воздействия и от структурных параметров среды. Обнаружена полная аналогия свойств пористой и гранулированной сред.

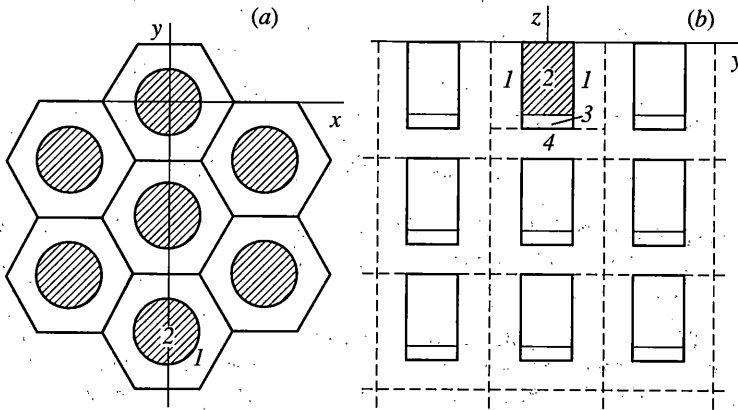
1. Введение. Проблемы добычи жидких и газообразных полезных ископаемых, строительство гидротехнических сооружений и др. стимулировали развитие теории фильтрации. Исследования в этой области механики жидкости и газа особенно интенсивно проводились в 1930–1950 гг. вследствие увеличения потребления нефти и газа, строительства плотин, каналов и т.п. В настоящее время вопросы разработки новых технологий по сверхтонкой очистке веществ, создания емкостей с использованием нанокпиллярных материалов и ряд других требуют дальнейшего развития теории фильтрации.

Имеющиеся значительные достижения в этой области гидромеханики и механики сплошных сред относятся, в основном, к исследованиям при статических и квазистатических воздействиях на среду, заполненную жидкостью и газом. При таких воздействиях не удается выявить инерционные, диссипативные и упруго-диссипативные свойства пористой среды, пропитанной жидкостью или газом.

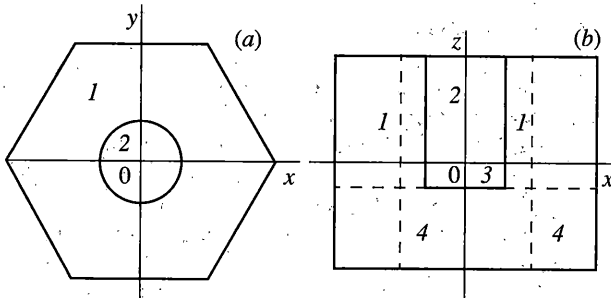
Периодические или импульсные воздействия на такие среды позволяет выявить их инерционные и диссипативные свойства. Теоретические и экспериментальные исследования, а также натурные испытания прохождения и поглощения звука в пористых средах остаются весьма актуальными. Это обусловлено развитием радиовещания, звукозаписи и важно при проектировании концертных залов и других помещений с высокими требованиями, предъявляемыми к их акустическим свойствам. Увеличение скоростей и мощностей двигателей как на транспорте, так и в машиностроении требует создания комфортных условий для персонала, что приводит к необходимости создания новых звукопоглощающих и звукоизолирующих материалов.

Первая математическая модель пористой среды, заполненной жидкостью, была изложена в [1], однако она была весьма идеализированной и неполной, так как не позволяла описать ряд существенных эффектов. Позже были разработаны несколько теоретических и полуэмпирических моделей, которые страдали одними и теми же недостатками. С их помощью не удавалось связать частотные характеристики (инерционные и диссипативные), скорость звука и его затухание со структурными элементами сред и физическими свойствами материалов.

В настоящее время наиболее претенциозной является модель Био [2]. Однако она имеет существенные недостатки, связанные с чрезмерной громоздкостью, широтой и универсальностью, т.е. стремлением объяснить “все явления в пористых средах”. Кроме того, модель Био содержит множество неизвестных параметров, функций и операторов, которые должны быть введены “ad hoc” (к случаю). Это не позволяет



Фиг. 1



Фиг. 2

проводить достаточно надежные расчеты конкретных реальных образцов сред, пропитанных жидкостью, и сопоставить эти расчеты с экспериментальными результатами.

Ниже приводится простая модель пористой среды, пропитанной вязкой жидкостью. На ее основе получены инерционные и диссипативные свойства среды, которые определяются частотой внешнего воздействия, физическими характеристиками материалов и структурными элементами образцов пористой среды. Параметры модели могут быть просто определены для конкретных образцов пористых сред на основе измерений структурных элементов.

2. Описание модели и постановка задачи. Будем считать, что пористая среда состоит из твердого скелета и пор. Поры представляют собой одинаковые цилиндры, симметрично расположены в правильных шестиугольниках. Объединение шестиугольных ячеек образует плоскую пористую среду, аналогичную сотовой структуре. Поры частично заполнены вязкой жидкостью. На фиг. 1, *a*, *b* показаны вид сверху и сбоку (условно горизонтальные и вертикальные сечения) такой среды. На фиг. 2, *a* показан вид сверху, а на фиг. 2, *b* вид сбоку отдельной ячейки среды.

Каждая ячейка разбита на четыре области: области 1 и 4 принадлежат сплошному твердому скелету, область 2 (часть поры) заполнена жидкостью (жидкая пробка). Дополнительно введена область 3 – часть поры, занятой газом, обладающим малой упругостью. Объем области 3 считается достаточно малым по сравнению с объемом всей поры (см. далее). Ячейка имеет следующие геометрические размеры: диаметр твердого основания $2a$, диаметр поры $2b$ ($b < a$), высота поры $h = h_1 + h_2$; где h_1 – высота жидкой пробки ($h_2 \ll h_1$); высота всей ячейки $H > h$.

Ставится задача построения динамической модели пористой среды. Перпендикулярно плоскости слоя приложено давление, периодически изменяющееся во времени. Предполагается, что максимальный размер ячейки значительно меньше длины звуковой волны, вызывающей периодическое изменение давления во времени. Требуется определить в квазистатическом приближении инерционные и диссипативные свойства пористой среды, проявляющиеся при этом воздействии.

3. Движение жидкой пробки. Далее широко используется электромеханическая аналогия [3], согласно которой масса эквивалентна индуктивности, упругость – емкости, механические диссипативные элементы – омическому сопротивлению. Выделенная элементарная ячейка с точки зрения электромеханической аналогии эквивалентна последовательному соединению элементов Z_{12} и L , где электрический импеданс Z_{12} эквивалентен акустическому импедансу частей 1 и 2, индуктивность L эквивалентна m_4 – массе части 4. В том случае, если части 1 и 2 (каркас и пробка) жестко связаны, импеданс Z_{12} совпадает с массой $m_1 + m_2$ (индуктивностью).

Поскольку массы m_1 и m_2 движутся одна относительно другой и между ними имеется взаимодействие посредством вязких сил, то импеданс Z_{12} является комплексной величиной. Для решения поставленной задачи сначала вычислим импеданс Z_{12} , а затем получим на основе суммарного импеданса $Z = Z_{12} + m_4$ искомые инерционные и диссипативные характеристики пористой среды. Такой подход позволяет определить поведение масс m_1 и m_2 при различных частотах внешнего воздействия.

Так как максимальный размер ячейки значительно меньше длины звуковой волны λ , то можно считать, что жидкость несжимаемая. Ось z – цилиндрической системы координат направим вдоль оси цилиндра (поры). Уравнение движения для несжимаемой вязкой жидкости имеет вид

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} + \mu \left(\text{rot rot } \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \right) = -e_3 \frac{\partial P}{\partial z} e^{i\omega t} \quad (3.1)$$

Здесь вектор смещения частиц жидкости ζ_2 имеет только одну ненулевую координату ζ_2^* , направленную вдоль оси z , ρ_2 – плотность жидкости, μ – коэффициент вязкости. В правой части уравнения (3.1) стоит выражение, характеризующее градиент звукового давления, который считается постоянным на протяжении одной ячейки, т.е. $\partial P / \partial z = P' = \text{const}$. Это допущение оправдывается тем, что $\lambda \ll H$.

По существу принятые допущения позволяют ввести цилиндрические координаты r , ϕ , z и ограничиться плоской задачей, решение которой не зависит от угловой координаты ϕ и координаты z .

Граничные условия, которыми подчиняется искомое решение ζ_2^* , можно сформулировать следующим образом. В центре жидкой пробки выполняется условие ограниченности

$$|\zeta_2^*|_{r \rightarrow 0} \leq M < \infty \quad (3.2)$$

На границе жидкой пробки и твердого скелета выполняется условие прилипания вязкой жидкости к твердой стенке

$$\zeta_2^*|_{r=b} = \zeta_1^* \quad (3.3)$$

Здесь ζ_1^* – смещение твердого скелета (боковой поверхности цилиндрической стенки).

Искомые величины ζ_2^* и ζ_1^* будем считать периодическими и искать в виде

$$\zeta_2^* = \zeta_2(r)e^{i\omega t}, \quad \zeta_1^* = \zeta_1 e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

При замене (3.4) уравнение движения (3.1) жидкой пробки принимает вид:

$$-\rho_2 \omega^2 \zeta_2 + i\omega \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\zeta_2}{dr} \right) = -P' \quad (3.5)$$

Если положить $\zeta_2 = \zeta_{20} + \zeta_{21}(r)$, где ζ_{20} не зависит от r , то уравнение (3.5) преобразуется к виду

$$i\omega \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\zeta_{21}}{dr} \right) - \rho_2 \omega^2 \zeta_{21} - \zeta_{20} \rho_2 \omega^2 = -P' \quad (3.6)$$

Из уравнения (3.6) находим

$$\zeta_{20} = P' / (\rho_2 \omega^2) \quad (3.7)$$

Функция ζ_{21} должна быть определена из уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\zeta_{21}}{dr} \right) - \frac{\rho_2 \omega^2}{i\omega \mu} \zeta_{21} = 0 \quad (3.8)$$

и условий (3.2), (3.3). Полагая

$$\gamma^2 = \frac{\rho_2 \omega}{i\mu}; \quad \gamma = \sqrt{\frac{i\rho_2 \omega}{\mu}} = \pm(1+i)\theta, \quad \theta = \sqrt{\frac{\rho_2 \omega}{2\mu}}$$

найдем решения уравнения (3.8), удовлетворяющее предельному условию (3.2):

$$\zeta_{21} = C_1 J_0(\gamma r) \quad (3.9)$$

Здесь J_0 – функция Бесселя нулевого порядка комплексного аргумента γr .

Итак, решение уравнения (3.5) приводится к виду

$$\zeta_2 = \frac{P'}{\rho_2 \omega^2} + C_1 J_0(\gamma r) \quad (3.10)$$

Удовлетворяя краевому условию (3.3), определим постоянную C_1 и, соответственно, смещение жидкой пробки

$$\zeta_2 = \left(\zeta_1 - \frac{P'}{\rho_2 \omega^2} \right) \frac{J_0(\gamma r)}{J_0(\gamma b)} + \frac{1}{\rho_2 \omega^2} P' \quad (3.11)$$

Дальнейшему определению подлежит неизвестная функция ζ_1 – перемещение твердой части 1 ячейки, контактирующей с жидкой пробкой 2.

4. Уравнение движения твердой оболочки. Сила F , действующая со стороны жидкой пробки на твердую оболочку (область 1), вычисляется по стандартным формулам гидродинамики и имеет вид

$$F = 2\pi b h_1 i \omega \mu \left. \frac{\partial \zeta_2}{\partial r} \right|_{r=b} e^{i\omega t} = -2\pi b h_1 i \omega \gamma \left(\zeta_1 - \frac{1}{\rho_2 \omega^2} P' \right) \Psi(\gamma b) e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

где $\Psi = J_1/J_0$, J_1 – функция Бесселя первого порядка. В периодическом режиме уравнение движения части 1 твердой оболочки имеет вид:

$$m_1 \omega^2 \zeta_1 = S_1 P' h + 2\pi b h_1 i \omega \mu \gamma \left(\zeta_1 - \frac{1}{\rho_2 \omega^2} P' \right) \Psi(\gamma b) \quad (4.2)$$

Здесь m_1 – масса части 1 оболочки, S_1 – площадь поперечного сечения той же части. Так как $h_2 \ll h_1$, то положим $h_1 \approx h$.

Разрешая уравнение (4.2) относительно ζ_1 , получим

$$\zeta_1 = P' h \omega^{-2} \left(S_1 - i \frac{2\pi b}{\rho_2 \omega} \gamma \mu \Psi(\gamma b) \right) \left(m_1 - i \frac{2\pi b h}{\omega} \gamma \mu \Psi(\gamma b) \right)^{-1} \quad (4.3)$$

5. Определение динамической плотности. Вычислим согласно электромеханической аналогии (см. выше) поток скорости X через поперечное сечение части 1 и поры 2 по формуле.

$$X = S_1 i \omega \zeta_1 + 2\pi i \omega \int_0^b \zeta_2 r dr \quad (5.1)$$

Подставляя (3.11) и (4.3) в выражение (5.1), получим

$$X = \frac{i P'}{D \rho_2^2 \omega} [(D + \Delta \rho S_1)^2 - D^2 + D(\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2)] \quad (5.2)$$

$$D = \rho_1 S_1 + 2\rho_2 S_2 \Psi/(\gamma b), \quad \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$$

Параметр D имеет смысл эффективной линейной (по z) плотности среды.

Подобно тому, как электрический импеданс определяется отношением напряжения к силе тока, акустический импеданс определяется как отношение силы звукового давления к потоку скорости [3]. Имеет место следующее выражение для акустического импеданса через геометрические и инерционные параметры задачи:

$$Z_{1,2} = -\frac{P'(S_1 + S_2)}{X} = i \omega D \rho_2^2 S [D(2\Delta \rho + \rho_1) S_1 + \Delta \rho^2 S_1^2 + D \rho_2 S_2]^{-1} \quad (5.3)$$

$$S = S_1 + S_2$$

Из выражений $Z_{12} = i \omega \rho_{12}$ и (5.3) следует, что части 1 и 2 имеют эффективную плотность

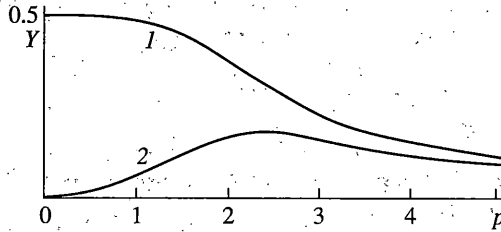
$$\rho_{12} = D \rho_2^2 S [D(2\Delta \rho + \rho_1) S_1 + \Delta \rho^2 S_1^2 + D \rho_2 S_2]^{-1} \quad (5.4)$$

Для получения средней плотности ячейки и, следовательно всей пористой среды, нужно к эффективной массе областей 1 и 2, используя (5.4), добавить массу $m_4 \approx S(H-h)\rho_1$ области 4 и затем усреднить по объему всей ячейки SH . В результате получим искомое выражение для средней объемной динамической плотности ρ_d пористой среды

$$\rho_d = \frac{H-h}{H} \rho_1 + \frac{h}{H} D \rho_2^2 S [D(2\Delta \rho + \rho_1) S_1 + \Delta \rho^2 S_1^2 + D \rho_2 S_2]^{-1} \quad (5.5)$$

Отметим три свойства общего характера (5.5).

1. Поскольку функция $\Psi(\gamma b)/(\gamma b)$ является комплексной, то ρ_d – также комплексная величина. Это означает, что в пористой среде, пропитанной вязкой жидкостью, имеется



Фиг. 3

затухание звуковых волн, обязанное своим происхождением взаимодействию жидких пробок со стенками пор.

2. Как действительная, так и мнимая части ρ_d зависят от частоты ω . Поэтому в такой среде должна наблюдаться дисперсия скорости звука.

3. Частотная зависимость динамической плотности ρ_d определяется величиной $\gamma b = \pm(1 + i)\theta b$.

6. Анализ динамической плотности. Динамическая плотность (см. (5.2)–(5.5)) существенно зависит от поведения функции

$$Y(\gamma b) = \frac{\Psi(\gamma b)}{\gamma b} = \frac{J_1(p\sqrt{i})}{p\sqrt{i}J_0(p\sqrt{i})} = Y_1(p) + iY_2(p), \quad p = b\sqrt{\frac{\rho_2\omega}{\mu}} \quad (6.1)$$

зависящей от частоты ω внешнего воздействия и других параметров.

На фиг. 3 представлены действительная Y_1 (кривая 1) и мнимая Y_2 (кривая 2) части функции Y (6.1). В интервале $0 \leq p \leq 0.5$, который условно соответствует низкочастотной области, имеется довольно слабое изменение функций Y_1 и Y_2 : Y_1 убывает, а Y_2 возрастает при увеличении безразмерного параметра p или частоты ω . В интервале $3 \leq p < \infty$, условно соответствующем высокочастотной области, имеется сближение и медленное убывание функций Y_1 и Y_2 . В средней части ($0.5 \leq p \leq 3$) функция Y_2 достигает слабо выраженного максимума при $p \approx 2.5$, а затем убывает. Функция Y_1 при росте p убывает монотонно.

В интервале $0.5 \leq p \leq 3$ происходит существенное изменение функций Y_1 и Y_2 , т.е. переход от низкочастотной к высокочастотной области. Следует ожидать, что поведение динамической плотности резко различается в областях низких, высоких и промежуточных частот.

Если $p \rightarrow 0$, то имеем для функции Y следующее представление

$$Y(\sqrt{i}p) = \frac{1}{2} + \frac{ip^2}{8} + \dots \quad (6.2)$$

Введем основные структурные элементы пористой среды: η – пористость, ξ – “просвет” по формулам

$$\eta = \frac{V_2}{V_1 + V_2 + V_4}, \quad \xi = \frac{S_1}{S_1 + S_2}$$

Подставляя (6.2) в (5.5), получим с учетом введенных структурных элементов приближенное выражение для динамической плотности в низкочастотной области

$$\rho_d \approx \rho_* = \rho_1(1 - \eta) + \rho_2\eta - \frac{i\omega b^2}{4\mu} \Delta\rho^2 \eta \xi (1 - \xi) \quad (6.3)$$

Условие $p \rightarrow 0$ означает, что вязкий пограничный слой в жидкости значительно больше радиуса жидкой пробки, поэтому пробка и скелет (твёрдая оболочка) движутся практически вместе, как целое. Из (6.2) следует, что в этом случае увеличение вязкости уменьшает мнимую часть ρ_* , следовательно, и затухание.

Если предположить, что плотность жидкости равна плотности твёрдого скелета, то затухание отсутствует. Действительная часть динамической плотности совпадает со средней плотностью пористой среды, которая определяется обычным статическим взвешиванием.

Если $p \gg 1$, то имеет место следующее асимптотическое представление

$$Y(\sqrt{i}p) = \frac{\sqrt{i}}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad (6.4)$$

Условие $p \gg 1$ означает, что вязкий пограничный слой значительно меньше радиуса жидкой пробки. Поэтому жидкие пробки движутся практически независимо от твёрдого скелета.

Подставляя (6.4) в (5.7), получим при выполнении условия $p \gg 1$:

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \text{Re}\rho_{12} + i\text{Im}\rho_{12}, \quad \text{Re}\rho_{12} = \frac{\rho_1\rho_2S}{\rho_1S_2 + \rho_2S_1} + \alpha \\ \text{Im}\rho_{12} &= \alpha = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2\mu\rho_2}{\omega}} \frac{\Delta\rho^2SS_2}{(\rho_1S_1 + \rho_2S_2)^2} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Величина α асимптотически мала и значительно меньше, чем первое слагаемое при достаточно больших ω ; поэтому при анализе $\text{Re}\rho_{12}$ (6.5) можно пренебречь величиной α и ограничиться простыми выражениями вида

$$\begin{aligned} \text{Re}\rho_{12} &= \frac{\rho_1\rho_2S}{\rho_1S_2 + \rho_2S_1} = S\left(\frac{S_1}{\rho_1} + \frac{S_2}{\rho_2}\right)^{-1} \\ \text{Re}\rho_{12} &= \rho, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho \end{aligned} \quad (6.6)$$

Второе равенство (6.6) показывает, что в высокочастотной области складывается обратные значения плотности частей 1 и 2 элементарной ячейки.

Пренебрегая в $\text{Re}\rho_{12}$ (6.5) величиной α и подставляя в (5.5), получим выражение для высокочастотной динамической плотности

$$\rho_d \approx \rho^* = \rho_1 \left[1 + \eta \frac{\Delta\rho}{\rho_1(1-\xi) + \rho_2\xi} \right] - i \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2\mu\rho_2}{\omega}} \eta \frac{\Delta\rho^2}{[\rho_2\xi + \rho_1(1-\xi)]^2} \quad (6.7)$$

Сравнивая ρ_* (6.3) и ρ^* (6.7), видим, что структурные элементы η и ξ как в действительной, так и мнимой частях входят в совершенно различных комбинациях. При $\rho_1 = \rho_2$ мнимая часть ρ^* обращается в нуль, поэтому затухание также отсутствует. Заметим, что действительную часть ρ^* пористой среды, пропитанной жидкостью, нельзя определить прямым статическим взвешиванием, а только динамическим, например, с помощью резонансного метода [4, 5]. Формулы (6.3) и (6.7) по своей структуре аналогичны выражениям, полученным для гранулированной среды, пропитанной жидкостью [5].

Отметим, что в выражения ρ_d (5.5), ρ_* (6.3) и ρ^* (6.7) входят структурные элементы и физические свойства материалов, которые могут быть измерены тем или иным способом для естественных пористых сред. В [4, 5] была проведена детальная экспериментальная проверка формул, полученных для гранулированных сред естественного

η	$\xi = 0.5$	$\xi = 0.8$
0	1.000	1.000
0.1	1.016	1.005
0.2	1.034	1.012
0.3	1.056	1.019
0.4	1.083	1.028
0.45	1.099	1.033
0.5	1.117	1.038

и искусственного происхождения. Установлено, что имеет место правильное описание наблюдаемых эффектов: зависимость скорости и диссипации звука как от частоты, так и от физических и структурных элементов. Полученные зависимости отвечают физическим представлениям, несмотря на существенное отличие естественных сред от той модельной среды, которая использовалась для вывода соответствующих формул. Поэтому имеются обоснованные предпосылки для применения формул (5.5), (6.3) и (6.7) при описании и качественного объяснения некоторых явлений, наблюдаемых в естественных пористых средах. В приведенных выше выводах было сделано существенное предположение о малости размера элементарной ячейки по сравнению с длиной звуковой волны, распространяющейся в этой среде. Оценки, в частности, свидетельствуют, что предположение выполняется для частот $f \leq 200$ кГц и размеров пор $b \leq 0.5$ см; $h \leq 0.5$ см. Естественно, чем ниже частота, тем больше могут быть размеры ячеек и, соответственно, пор.

Сравнение с теорией Био [2] показывает, что с помощью формул (5.5), (6.2) и (6.7) возможно удастся определить те параметры, которые в указанной теории приходится вводить ad hoc.

Покажем, что $\text{Re}p_* > \text{Re}p^*$. Имеем для разности $p_* - p^*$ соотношения

$$\rho_1(1 - \eta) + \eta\rho_2 - \rho_1 \left[1 + \eta \frac{\Delta\rho}{\rho_1(1 - \xi) + \rho_2\eta} \right] = \frac{\Delta\rho^2 \eta \xi}{\rho_1(1 - \xi) + \rho_2\xi} > 0 \quad (6.8)$$

Из неравенства (6.8) следует, что отношение

$$d = \text{Re}p_*/\text{Re}p^* > 1 \quad (6.9)$$

Для иллюстрации приведем численные оценки отношения d (6.9) при двух значениях просвета ξ и отношения плотностей $\rho_2/\rho_1 = 0.3704$ (мрамор-вода).

Из приведенных оценок видно, что при некоторых комбинациях структурных элементов η и ξ , а также плотностей твердого скелета ρ_1 и пропитывающей жидкости ρ_2 возможно надежное экспериментальное обнаружение различия между $\text{Re}p_*$ и $\text{Re}p^*$. Для естественных плотных пористых сред (мрамор, гранит), пропитанных водой или нефтью, различие едва ли превосходит 1–3%, поэтому экспериментальное обнаружение такого различия представляется сомнительным. Для рыхлых пород типа известняка (η и ξ достаточно велики) возможно установить и определить это различие.

В проведенном анализе полностью отсутствовал учет упругости газа, заполняющего область 3 поры. Если учесть упругость, то обнаруживается резонансное взаимодействие в системе “жидкая пробка–газ” на некоторой собственной частоте $\omega = \Omega$. Это явление приводит к резкому усложнению окончательных формул и требует дополнительного исследования. Особенно важным представляется эффект существенного увеличения

затухания колебаний пористой среды. Поэтому сделанные выводы справедливы для области частот вне резонансного взаимодействия, т.е. в случае, когда частота внешнего воздействия ω находится "далеко" от собственной частоты Ω .

7. Диссипация колебаний в пористой среде. Если предположить, что сжимаемости твердого скелета и жидкости K_1 и K_2 не зависят от частоты и действительны, то эффективная сжимаемость пористой среды, заполненной жидкостью, также не зависит от частоты, действительна и определяется формулой [3]:

$$K = K_1(1 - \eta) + \eta K_2 \quad (7.1)$$

Имеются также экспериментальные данные, подтверждающих сделанное предположение [3].

Скорость звука для низких и высоких частот с помощью формул (6.2), (6.8) и (7.1) определяется соответствующими выражениями

$$c_* = \sqrt{\frac{1}{K \operatorname{Re} p_*}} = \frac{c_1}{\sqrt{(1 - \eta + \kappa \eta)(1 - \eta + \beta \eta)}} \quad (7.2)$$

$$c^* = \sqrt{\frac{1}{K \operatorname{Re} p^*}} = c_1 / [1 - \xi + \beta \xi + \eta(1 - \beta)]^{-1/2} \sqrt{\frac{1 - \xi + \beta \xi}{1 - \eta + \kappa \eta}} \quad (7.3)$$

$$\kappa = K_2 / K_1, \quad \beta = \rho_2 / \rho_1$$

Здесь c_1 – скорость звука в твердом скелете. Отношение скоростей c^* и c_* согласно (7.2) и (7.3) имеет вид:

$$c^*/c_* = \sqrt{d} > 1 \quad (7.4)$$

Как известно [3], волновое число k определяется равенствами

$$k = \omega/c = \omega \sqrt{\rho_d K} = k' - ik'' \quad (7.5)$$

где величина k'' представляет собой коэффициент затухания звука (диссипацию колебаний) в пористой среде, пропитанной жидкостью. Величина k'' определяется через $\operatorname{Im} \rho_d$.

В низкочастотной области подстановка (6.3) в формулу (7.5) приводит к выражению для коэффициента k'' :

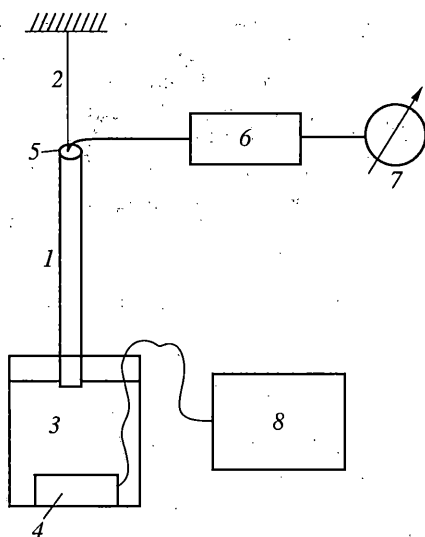
$$k_*'' = \frac{1}{8} \frac{\omega^2 b^2}{\mu \rho_1 c_1} \Delta \rho^2 \eta \xi (1 - \xi) \sqrt{\frac{1 - \eta + \kappa \eta}{1 - \eta + \beta \eta}} \quad (7.6)$$

В высокочастотной области подстановка (6.7) в формулу (7.5) приводит к выражению для коэффициента k'' :

$$k_*'' = \frac{\eta}{2b\rho_1 c_1} \sqrt{2\mu\rho_2} \omega \frac{(\beta - 1)^2}{[1 + \xi(\beta - 1)]^2} \sqrt{\frac{(1 - \eta + \kappa \eta)[1 + \xi(\beta - 1)]}{1 + (\xi + 1 - \eta)(\beta - 1)}} \quad (7.7)$$

Формулы (7.6), (7.7) оказываются весьма громоздкими. Отметим, что $k_*'' = k_*'' = 0$ при $\rho_1 = \rho_2$.

8. Качественный эксперимент. Имевшиеся образцы мрамора и измерительная аппаратура не позволили количественно определить с помощью экспериментов отличие отношения d от 1. Однако удалось наблюдать резкое возрастание затухания колебаний в мраморном стержне круглого сечения диаметром 0.5 см и длиной 15 см при пропитке его вазелиновым маслом. При проведении эксперимента использовался один из вариантов резонансного метода. Схема эксперимента приведена на фиг. 4.



Фиг. 4

Мраморный стержень 1 подвешивается на тонкой нити 2 так, что его нижний конец слегка погружается в вазелиновое масло, содержащееся в сосуде 3. На дне сосуда помещается пьезоэлектрический излучатель 4. К верхнему концу стержня приклеен легкий пьезоэлектрический приемник 5, воспринимающий продольные колебания стержня. Сигнал с пьезоприемника подается на усилитель 6 и индикатор резонанса 7.

Посредством быстрой настройки звукового генератора 8, с помощью индикатора резонанса 7 были найдены первые три резонансные частоты, совпадающие с собственными частотами продольных колебаний: $f_1 = 13$ кГц, $f_2 = 26$ кГц, $f_3 = 39$ кГц. На начальном этапе эксперимента первые несколько секунд резонансы были острыми, что свидетельствовало о весьма высокой добротности колебательной системы – мраморного стержня, совершающего продольные упругие колебания. Затем на генераторе была задана первая резонансная частота $f_1 = 13$ кГц. С помощью индикатора резонанса установлено, что в течение 5 минут амплитуда сигнала, снимаемого с приемного пьезоэлемента, постепенно уменьшалась практически до нуля. Перестройка на другие резонансные частоты показала, что резонансные колебания с частотами f_2 и f_3 также полностью отсутствовали. Повторные измерения, проведенные для новых стержней, подтвердили установленный качественный эффект.

Один из использованных в эксперименте стержней был сломан посередине. Было установлено визуально, что сечение стержня оказалось пропитанным вазелиновым маслом, которое в течение нескольких минут заполнило поры в мраморе. Этот процесс явился причиной резкого возрастания затухания. Высокодобротная колебательная система полностью потеряла свои резонансные свойства.

Согласно справочным сведениям по горным породам [6] можно утверждать, что в условиях проведенного эксперимента реализовалась высокочастотная динамическая плотность ρ^* . Теоретический анализ позволяет объяснить наблюдаемое в эксперименте сильное затухание звуковых волн в пористой среде, пропитанной вязкой жидкостью, на высоких частотах.

9. Заключение. Основными результатами работы являются следующие качественные выводы.

1. С помощью предложенной простой модели получены динамические инерционные и диссипативные характеристики пористой среды, пропитанной вязкой жидкостью. Существенной особенностью рассматриваемой модели является выделение элементарной ячейки, состоящей из твердой оболочки и поры, заполненной вязкой жидкостью. Примечательно, что в окончательные формулы входят только физические параметры скелета и жидкости, а также структурные элементы среды (пористость, просвет, диаметр пор). Поэтому возможно, что полученные формулы имеют более широкую область применимости по сравнению с принятой идеализированной моделью. Для их применения могут быть использованы усредненные характеристики реальных пород.

2. Аналогичные формулы, описывающие инерционные и диссипативные характеристики гранулированных сред, были ранее получены в [4, 5]. Подробные экспериментальные исследования показали, что их результаты достаточно хорошо согласуются с теоретическими. Для достижения более полного согласия следует изменить коэффициенты при мнимых частях динамической плотности. Это по-видимому требует учета формы частиц для реальных гранулированных сред.

3. Сравнение характеристик пористой и гранулированной сред, пропитанных вязкой жидкостью, показывает, что при динамических нагрузках они обладают весьма похожими инерционными и диссипативными свойствами. Исследуемые эффекты проявляются за счет взаимодействия вязкой жидкости и твердых частиц. Определяющую роль здесь играют толщина вязкого пограничного слоя и различие плотностей твердого скелета (частиц) и жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00252) и гранта государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1627.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Crandall I.B.* Theory of Vibrating Systems and Sound. New York: D. van Nostrand, 1927. 172 p.
2. *Biot M.A.* Generalized Theory of Acoustic Propagation in Porous Dissipative Media // *JASA*. 1962. V. 34. № 9. Part 1. P. 1254–1264.
3. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 618 с.
4. *Нестеров В.С.* Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации // *Акустический ж.* 1959. Т. 5. Вып. 3: С. 337–344.
5. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Исследование инерционных и упругих свойств пропитанных жидкостью гранулированных сред резонансным методом // *Изв. РАН. МТТ*. 2002. № 5. С. 145–156.
6. *Физические свойства горных пород и полезных ископаемых /*Под ред. Н.Б. Дортмана. М.: Недра, 1984. 456 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.07.2004