

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Используя метод функционально-инвариантных решений, получены и аналитически исследованы решения задачи отражения и преломления плоских волн на границе раздела изотропных и анизотропных сред при различных соотношениях упругих постоянных контактирующих сред. Упругие постоянные анизотропных сред удовлетворяют необходимым и достаточным условиям положительной определенности формы упругой энергии.

1. Введение. Изучение закономерностей распространения плоских волн в анизотропных средах имеет важное значение, так как почти все сейсмические поля приближенно могут рассматриваться, как локально плоские волны и многие волновые процессы могут быть представлены в виде суперпозиции плоских волн. Эти обстоятельства вызывают особый интерес к изучению волновых процессов в анизотропных средах, связанных с распространением плоских волн [1–12]. При определении решений уравнений движения анизотропных сред, которые не приводятся к волновым уравнениям, применяются хорошо известные методы динамики изотропных сред [3–5]. Так как волновые процессы в анизотропных средах сложны и многообразны, качественно зависят от соотношений упругих постоянных и направлений движения волн, анализ решений рассматриваемых волновых задач проводится либо аналитически при определенных ограничениях, накладываемых на упругие постоянные, либо численными методами. В том и другом случаях исследования остаются логически незавершенными, как правило, наиболее интересные и сложные случаи, связанные с аномальной анизотропией сред, остаются неизученными.

В данной работе методом функционально-инвариантных решений изучается плоская задача отражения и преломления плоских волн, падающих из изотропной среды на границу с анизотропной средой с четырьмя другими постоянными. Метод функционально-инвариантных решений В.И. Смирнова и С.Л. Соболева для волновых уравнений впервые был применен для уравнений движения анизотропных сред в [1, 2], затем был обобщен в [13–15].

2. Плоские волны в изотропных и анизотропных средах. Плоские волны в изотропных средах

$$u_k = u_k(\tilde{\Omega}_k), \quad v_k = v_k(\tilde{\Omega}_k); \quad (2.1)$$
$$\tilde{\Omega}_k = t - \theta x + \eta_k y, \quad \eta_1 = (1/a_0 - \theta^2)^{1/2}, \quad \eta_2 = (1/d_0 - \theta^2)^{1/2} \quad (k = 1, 2)$$

где a_0, d_0 – квадраты фазовых скоростей продольных ($k = 1$) и поперечных ($k = 2$) волн, можно представить выражениями [14]:

$$u_1 = -\theta w_1(\tilde{\Omega}_1), \quad v_1 = \eta_1 w_1(\tilde{\Omega}_1), \quad u_2 = \eta_2 w_2(\tilde{\Omega}_2), \quad v_2 = \theta w_2(\tilde{\Omega}_2) \quad (2.2)$$

Уравнения движения анизотропных сред имеют вид [14]:

$$au_{xx} + du_{yy} + cv_{xy} = u_{tt}, \quad cu_{xy} + dv_{xx} + bv_{yy} = v_{tt} \quad (2.3)$$

Для реальных сред отношения упругих постоянны к плотности среды a, b, d, c удовлетворяют условиям [14]:

$$a > d, \quad b > d, \quad d > 0, \quad ab - (c - d)^2 > 0 \quad (2.4)$$

Решения уравнений (2.3), выражающие плоские волны имеют вид [14]:

$$u_k = u(\Omega_k), \quad v_k = v(\Omega_k), \quad \Omega_k = t - \theta x + \lambda_k y \quad (2.5)$$

$$\lambda_k = [A + (-1)^k (A^2 - B)^{1/2}]^{1/2} (2bd)^{-1/2} \quad (2.6)$$

$$A = (b + d) - L\theta^2, \quad B = 4abd^2(1/a - \theta^2)(1/d - \theta^2), \quad L = ab + d^2 - c^2$$

Решения (2.5) могут быть представлены выражениями [14]:

$$u_k = E_k w(\Omega_k), \quad v_k = -F_k w(\Omega_k) \quad (2.7)$$

$$E_k = r_k - c\theta\lambda_k, \quad F_k = p_k - c\theta\lambda_k, \quad r_k = d\theta^2 + b\lambda_k^2 - 1, \quad p_k = a\theta^2 + d\lambda_k^2 - 1 \quad (k = 1, 2)$$

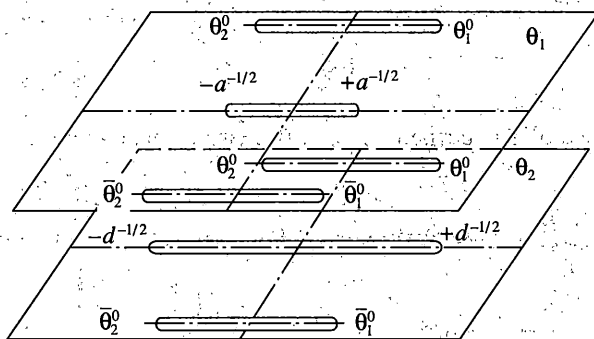
Функции λ_1 и λ_2 – ветви алгебраической функции λ , однозначно определенной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных.

При условии [14]:

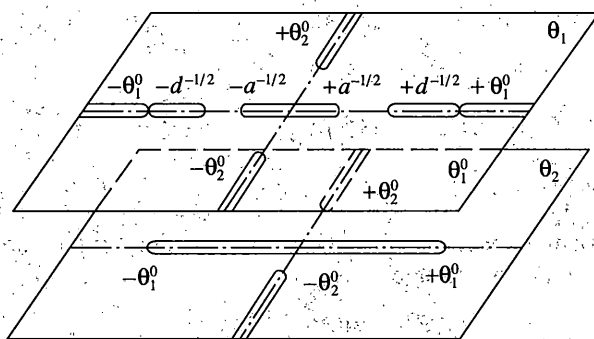
$$N_2 = (a - d)b - c^2 > 0 \quad (2.8)$$

риманова поверхность состоит из плоскостей θ_1 и θ_2 с разрезами $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$, где $\pm a^{-1/2}$ и $\pm d^{-1/2}$ – точки разветвления для внешних радикалов (2.6) при $k = 1$ и $k = 2$, склеенных крест-накрест вдоль разрезов, соединяющих точки разветвления θ_i^0 для внутренних радикалов (2.6). Точки θ_i^0 могут быть комплексными, мнимыми и вещественными, на фиг. 1 изображена риманова поверхность, когда точки θ_i^0 – комплексные попарно-сопряженные. На берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ плоскости θ_1 и $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$ плоскости θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения, функции (2.5) и (2.7) выражают вещественные квазипродольные ($k = 1$) и квазипоперечные ($k = 2$) волны.

При $N_2 < 0$ [3] внешний радикал функций λ_1 имеет точки разветвления $\pm a^{-1/2}, \pm d^{-1/2}$, функции λ_2 не имеет точек разветвления. Из четырех точек разветвления θ_i^0 две имеют вещественные значения $\pm\theta_1^0$, две – мнимые значения $\pm\theta_2^0$. Риманова поверхность (фиг. 2) состоит из плоскости θ_1 с разрезами $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ и плоскости θ_2 с разрезом $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$, склеенных крест-накрест вдоль берегов разрезов $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ и $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$. На берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2}), (\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ плоскости θ_1 и $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения. Функции (2.5), (2.7) выражают вещественные плоские волны [14]: квазипродольные при $k = 1$ на берегах раз-



Фиг. 1



Фиг. 2

реза $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ плоскости θ_1 ; квазипоперечные при $k = 2$ на берегах разреза $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 и при $k = 1$ на берегах разрезов $(\pm d^{-1/2}, \pm \theta_1^0)$ плоскости θ_1 .

Фиксируем функции λ_1 и λ_2 на плоскостях θ_1 и θ_2 римановых поверхностей (фиг. 1, 2) так, чтобы они были положительными при $\theta = i\beta$, где β – достаточно малая положительная величина.

Под w понимается произвольная непрерывная дважды дифференцируемая функция, если в функции w коэффициенты при переменных величинах вещественны. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства x, y, t – комплексные величины, под w понимается аналитическая функция в этой области.

3. Решения задачи отражения и преломления продольных волн. Из изотропной среды $y > 0$ падает на границу раздела $y = 0$ с анизотропной средой $y < 0$ плоская продольная волна (2.1):

$$u_1 = u_1(\tilde{\Omega}_1), \quad v_1 = v_1(\tilde{\Omega}_1) \tag{3.1}$$

$$\tilde{\Omega}_1 = t - \theta x + \eta_1 y, \quad \eta_1 = (1/a_0 - \theta^2)^{1/2}$$

Фазовая скорость и углы падения волны определяются выражениями

$$b_1 = a_0^{1/2}, \quad \text{tg } \alpha_1 = \theta \eta_1^{-1} \tag{3.2}$$

В интервале

$$0 \leq \theta \leq a_0^{-1/2} \quad (3.3)$$

функции (3.1) выражают вещественную волну с углами падения

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2 \quad (3.4)$$

Согласно (2.2) и (2.7) падающую волну (3.1) и отраженные и преломленные волны представляем в форме

$$\begin{aligned} u_1 &= -\theta w_1(\tilde{\Omega}_1), & v_1 &= \eta_1 w_1(\tilde{\Omega}_1) \\ u_{11} &= -\theta w_1(\tilde{\Omega}_1^-) A_{11}, & v_{11} &= -\eta_1 w_1(\tilde{\Omega}_1^-) A_{11} \\ u_{21} &= -\eta_2 w_1(\tilde{\Omega}_2^-) A_{21}, & v_{21} &= \theta w_1(\tilde{\Omega}_2^-) A_{21} \\ u_{12} &= E_1 w_1(\Omega_1) A_{12}, & v_{12} &= -F_1 w_1(\Omega_1) A_{12} \\ u_{22} &= E_2 w_1(\Omega_2) A_{22}, & v_{22} &= -F_2 w_1(\Omega_2) A_{22} \\ \tilde{\Omega}_k^- &= t - \theta x - \eta_k y \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Считая, что на границе раздела сред смещения и напряжения в них равны, граничные условия в смещениях принимают вид

$$\begin{aligned} U_I &= U_{II}, & V_I &= V_{II}, & \rho_0 \left[a_0 \left(\frac{\partial U_I}{\partial x} + \frac{\partial V_I}{\partial y} \right) - 2d_0 \frac{\partial U_I}{\partial x} \right] &= \rho \left[b \frac{\partial V_{II}}{\partial y} + (c-d) \frac{\partial U_{II}}{\partial x} \right] \\ \rho_0 d_0 \left[\frac{\partial V_I}{\partial x} + \frac{\partial U_I}{\partial y} \right] &= \left[\rho d \frac{\partial V_{II}}{\partial x} + \frac{\partial U_{II}}{\partial y} \right] \quad (y = 0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где ρ_0 и ρ — плотность изотропной и анизотропной среды.

Удовлетворяя (3.5) условиям (3.6), определив из них коэффициенты A_{kn} и, подставляя их значения в (3.5), получим решение задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\theta w_1(\tilde{\Omega}_1), & v_1 &= \eta_1 w_1(\tilde{\Omega}_1) \\ u_{11} &= -\theta w_1(\tilde{\Omega}_1^-) (R_1/R), & v_{11} &= -\eta_1 w_1(\tilde{\Omega}_1^-) (R_1/R) \\ u_{21} &= -\theta w_1(\tilde{\Omega}_2^-) (\eta_1 \eta_2 R_2/R), & v_{21} &= \eta_1 w_1(\tilde{\Omega}_2^-) (\theta^2 R_2/R) \\ u_{12} &= \theta w_1(\Omega_1) (c \lambda_1 \eta_1 R_3/R), & v_{12} &= \eta_1 w_1(\Omega_1) (p_1 R_3/R) \\ u_{22} &= -\theta w_1(\Omega_2) (c \lambda_2 \eta_1 R_4/R), & v_{22} &= -\eta_1 w_1(\Omega_2) (p_2 R_4/R) \\ R_1 &= cd_0^{-1} [(1 - 2d_0\theta^2)^2 - 4d_0^2\theta^2\eta_1\eta_2] (\lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1) + \sigma c \theta^2 [(1 - 2d_0\theta^2) + 2d_0\eta_1\eta_2] \times \\ &\times (\lambda_1 B_2 - \lambda_2 B_1) - \sigma \eta_2 (p_1 B_2 - p_2 B_1) + \frac{\rho}{\rho_0} cd_0^{-1} \eta_1 \lambda_1 \lambda_2 (D_1 - D_2) + \\ &+ \frac{\rho}{\rho_0} d_0^{-1} [(1 - 2d_0\theta^2) + 2d_0\eta_1\eta_2] (\lambda_1 p_2 D_1 - \lambda_2 p_1 D_2) + \frac{\rho}{\rho_0} \sigma (\theta^2 - \eta_1 \eta_2) (\lambda_1 B_2 D_1 - \lambda_2 B_1 D_2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$R_2 = 2 \left[\sigma c (1 - 2d_0 \theta^2) (\lambda_1 B_2 - \lambda_2 B_1) - 2c (1 - 2d_0 \theta^2) (\lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\rho}{\rho_0} (\lambda_1 p_2 D_1 - \lambda_2 p_1 D_2) + \frac{\rho}{\rho_0} \sigma (\lambda_1 B_2 D_1 - \lambda_2 B_1 D_2) \right] \quad (3.8)$$

$$R_3 = 2 \left\{ d_0^{-1} \lambda_2 \left[\frac{\rho}{\rho_0} D_2 + c (1 - 2d_0 \theta^2) \right] - \eta_2 (\sigma B_2 - 2p_2) \right\}$$

$$R_4 = 2 \left\{ d_0^{-1} \lambda_1 \left[\frac{\rho}{\rho_0} D_1 + c (1 - 2d_0 \theta^2) \right] - \eta_2 (\sigma B_1 - 2p_1) \right\}$$

$$R = cd_0^{-1} [(1 - 2d_0 \theta^2)^2 + 4d_0^2 \theta^2 \eta_1 \eta_2] (\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2) + \sigma c \theta^2 [(1 - 2d_0 \theta^2) - 2d_0 \eta_1 \eta_2] \times \\ \times (\lambda_2 B_1 - \lambda_1 B_2) + \sigma \eta_2 (p_2 B_1 - p_1 B_2) + \frac{\rho}{\rho_0} cd_0^{-1} \eta_1 \lambda_1 \lambda_2 (D_1 - D_2) + \\ + \frac{\rho}{\rho_0} d^{-1} [(1 - 2d_0 \theta^2) - 2d_0 \eta_1 \eta_2] (\lambda_2 p_1 D_2 - \lambda_1 p_2 D_1) + \frac{\rho}{\rho_0} \sigma (\theta^2 + \eta_1 \eta_2) (\lambda_2 B_1 D_2 - \lambda_1 B_2 D_1)$$

Согласно (3.1) и первых выражений (3.5) решение задачи (3.7) можно представить в следующей форме:

$$u_1 = u_1(\tilde{\Omega}_1), \quad v_1 = v_1(\tilde{\Omega}_1)$$

$$u_{11} = (R_1/R)u_1(\tilde{\Omega}_1), \quad v_{11} = -(R_1/R)v_1(\tilde{\Omega}_1)$$

$$u_{21} = (\eta_1 \eta_2 R_2/R)u_1(\tilde{\Omega}_2), \quad v_{21} = (\theta^2 R_2/R)v_1(\tilde{\Omega}_2) \quad (3.9)$$

$$u_{12} = -(c\lambda_1 \eta_1 R_3/R)u_1(\Omega_1), \quad v_{12} = (p_1 R_3/R)v_1(\Omega_1)$$

$$u_{22} = (c\lambda_2 \eta_1 R_4/R)u_1(\Omega_2), \quad v_{22} = -(p_2 R_4/R)v_1(\Omega_2)$$

Функции (3.9) выражают решение поставленной задачи, если коэффициенты при x и y имеют вещественные значения. В этом случае функции (3.9) выражают вещественные плоские волны, распространяющиеся с фазовыми скоростями

$$b_1 = b_{11} = a_0^{1/2}, \quad b_{21} = d_0^{1/2}, \quad b_{k2} = (\theta^2 + \lambda_k^2)^{-1/2} \quad (3.10)$$

Углы отражения продольных и поперечных волн и углы преломления квазипродольных и квазипоперечных волн определяются формулами

$$\operatorname{tg} \alpha_{k1} = \theta \eta_k^{-1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{k2} = \theta \lambda_k^{-1} \quad (k = 1, 2) \quad (3.11)$$

угол падения продольной волны $\alpha_1 = \alpha_{11}$. Закон синусов имеет выражение

$$\frac{\sin \alpha_1}{b_1} = \frac{\sin \alpha_{11}}{b_{11}} = \frac{\sin \alpha_{21}}{b_{21}} = \frac{\sin \alpha_{12}}{b_{12}} = \frac{\sin \alpha_{22}}{b_{22}} = \theta \quad (3.12)$$

Если в решении (3.9) некоторые из коэффициентов при переменных x и y имеют комплексные значения, то поставленная задача решается с помощью функции комплексного переменного.

Из теории функций комплексного переменного известно, что вещественная функция $f(x)$, определенная при всех вещественных значениях аргумента и удовлетворяющая неравенству $|x^2 f''(x)| \leq M$ ($M > 0$), может быть представлена в виде $f(x) = 1/2[f_1(x) + f_2(x)]$, где $f_1(x)$ – функция комплексного переменного, определенная и регулярная в верхней полуплоскости, производная которой $f_1'(x)$ определена в этой полуплоскости; $f_2(x)$ – функция, удовлетворяющая этим же условиям в нижней полуплоскости, причем на вещественной полуоси $\text{Re}[f_1(x)] = \text{Re}[f_2(x)] = f(x)$.

Так как вещественные функции u_1 и v_1 в (3.5) удовлетворяют выше указанным условиям, то их можно представить в виде

$$u_1 = 1/2[-\theta w_{11}(\tilde{\Omega}_1) - \theta w_{12}(\tilde{\Omega}_1)], \quad v_1 = 1/2[\eta_1 w_{11}(\tilde{\Omega}_1) + \eta_1 w_{12}(\tilde{\Omega}_1)]$$

Решив задачу отражения и преломления для первых членов в квадратных скобках и выделив вещественную часть полученного решения, придем к решению поставленной задачи в комплексной форме

$$\begin{aligned} u_1 &= \text{Re}[u_{11}(\tilde{\Omega}_1)], \quad v_1 = \text{Re}[v_{11}(\tilde{\Omega}_1)] \\ u_{11} &= \text{Re}[(R_1/R)u_{11}(\tilde{\Omega}_1)], \quad v_{11} = \text{Re}[-(R_1/R)v_{11}(\tilde{\Omega}_1)] \\ u_{21} &= \text{Re}[(\eta_1 \eta_2 R_2/R)u_{11}(\tilde{\Omega}_2)], \quad v_{21} = \text{Re}[(\theta^2 R_2/R)v_{11}(\tilde{\Omega}_2)] \\ u_{12} &= \text{Re}[-(c\lambda_1 \eta_1 R_3/R)u_{11}(\Omega_1)], \quad v_{12} = \text{Re}[(p_1 R_3/R)v_{11}(\Omega_1)] \\ u_{22} &= \text{Re}[(c\lambda_2 \eta_1 R_4/R)u_{11}(\Omega_2)], \quad v_{22} = \text{Re}[-(p_2 R_4/R)v_{11}(\Omega_2)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

В решениях (3.13) в зависимости от угла падения продольной волны на границу раздела и соотношений упругих постоянных контактирующих сред некоторые коэффициенты при переменной y имеют комплексные значения, функции R_i и R определяются выражениями (3.8) при комплексных значениях этих коэффициентов. Функции u_{11} и v_{11} – регулярные функции в верхней полуплоскости комплексного переменного.

4. Решения задачи отражения и преломления поперечных волн. Пусть из изотропной среды падает на границу раздела с анизотропной средой плоская поперечная волна

$$u_2 = u_2(\tilde{\Omega}_2), \quad v_2 = v_2(\tilde{\Omega}_2) \quad (4.1)$$

$$\tilde{\Omega}_2 = t - \theta x + \eta_2 y, \quad \eta_2 = (1/d_0 - \theta^2)^{1/2}$$

фазовая скорость и углы падения волны определяются выражениями

$$b_2 = d_0^{1/2}, \quad \text{tg} \alpha_2 = \theta \eta_2^{-1} \quad (4.2)$$

В интервале

$$0 \leq \theta \leq d_0^{-1/2} \quad (4.3)$$

функции (4.1) выражают вещественную волну с углами падения

$$0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2 \quad (4.4)$$

Повторяя рассуждения предыдущего раздела, решение задачи отражения и преломления плоских поперечных волн получим в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_2(\tilde{\Omega}_2), \quad v_2 = v_2(\tilde{\Omega}_2) \\ u_{11} &= (\theta^2 R_{21}/R)u_2(\tilde{\Omega}_1), \quad v_{11} = (\eta_1 \eta_2 R_{21}/R)v_2(\tilde{\Omega}_1) \end{aligned}$$

$$u_{21} = (R_{22}/R)u_2(\tilde{\Omega}_2), \quad v_{21} = -(R_{22}/R)v_2(\tilde{\Omega}_2) \quad (4.5)$$

$$u_{12} = (R_{23}/R)u_2(\Omega_1), \quad v_{12} = (c\lambda_1\eta_2R_{23}/r_1R)v_2(\Omega_1)$$

$$u_{22} = (R_{24}/R)u_2(\Omega_2), \quad v_{22} = (c\lambda_2\eta_2R_{24}/r_2R)v_2(\Omega_2)$$

$$R_{21} = 2 \left[\frac{\rho}{\rho_0} \sigma (B_2 D_1 \lambda_1 - B_1 D_2 \lambda_2) - \frac{\rho}{\rho_0} (1 - \eta_2^2 / \theta^2) (p_2 D_1 \lambda_1 - p_1 D_2 \lambda_2) + \right. \\ \left. + 2 \sigma c d_0 \theta^2 (B_1 \lambda_2 - B_2 \lambda_1) + 2c(1 - 2d_0 \theta^2) (p_1 \lambda_2 - p_2 \lambda_1) \right] \quad (4.6)$$

$$R_{22} = \frac{\rho}{\rho_0} \sigma (\eta_1 \eta_2 - \theta^2) (B_2 D_1 \lambda_1 - B_1 D_2 \lambda_2) - \frac{\rho}{\rho_0} [(\eta_2^2 - \theta^2) + \eta_1 \eta_2] (p_2 D_1 \lambda_1 - p_1 D_2 \lambda_2) + \\ + \sigma d_0 c \theta^2 [(\eta_2^2 - \theta^2) + 2\eta_1 \eta_2] (B_1 \lambda_2 - B_2 \lambda_1) + c d_0 [(\eta_2^2 - \theta^2)^2 - 4\theta^2 \eta_1 \eta_2] (p_1 \lambda_2 - p_2 \lambda_1) + \\ + \sigma \eta_2 (p_1 B_2 - p_2 B_1) - \frac{\rho}{\rho_0} c d_0^{-1} \lambda_1 \lambda_2 \eta_1 (D_2 - D_1),$$

$$R_{23} = -2c\lambda_1 d_0^{-1} \left[\frac{\rho}{\rho_0} D_2 \lambda_2 \eta_1 + \sigma d_0 \theta^2 B_2 + (1 - 2d_0 \theta^2) p_2 - 2c d_0 \theta^2 \lambda_2 \eta_1 \right]$$

$$R_{24} = 2c\lambda_2 d_0^{-1} \left[\frac{\rho}{\rho_0} D_1 \lambda_1 \eta_1 + \sigma d_0 \theta^2 B_1 + (1 - 2d_0 \theta^2) p_1 - 2c d_0 \theta^2 \lambda_1 \eta_1 \right]$$

Значение R определяется (3.8). Функции (4.5) выражают решение задачи, если коэффициенты при переменных x и y – вещественные.

Закон синусов имеет вид

$$\frac{\sin \alpha_2}{b_2} = \frac{\sin \alpha_{11}}{b_{11}} = \frac{\sin \alpha_{21}}{b_{21}} = \frac{\sin \alpha_{12}}{b_{12}} = \frac{\sin \alpha_{22}}{b_{22}} = \theta \quad (4.7)$$

Если в (4.5) некоторые из коэффициентов при переменных x и y имеют комплексные значения, то решение задачи выражается функциями комплексного переменного и имеет вид

$$u_2 = \text{Re}[u_{21}(\tilde{\Omega}_2)], \quad v_2 = \text{Re}[v_{21}(\tilde{\Omega}_2)]$$

$$u_{11} = \text{Re}[(\theta^2 R_{21}/R)u_{21}(\tilde{\Omega}_1)], \quad v_{11} = \text{Re}[(\eta_1 \eta_2 R_{21}/R)v_{21}(\tilde{\Omega}_1)]$$

$$u_{21} = \text{Re}[(R_{22}/R)u_{21}(\tilde{\Omega}_2)], \quad v_{21} = \text{Re}[-(R_{22}/R)v_{21}(\tilde{\Omega}_2)] \quad (4.8)$$

$$u_{12} = \text{Re}[(R_{23}/R)u_{21}(\Omega_1)], \quad v_{12} = \text{Re}[(c\lambda_1\eta_2R_{23}/r_1R)v_{21}(\Omega_1)]$$

$$u_{22} = \text{Re}[(R_{24}/R)u_{21}(\Omega_2)], \quad v_{22} = \text{Re}[(c\lambda_2\eta_2R_{24}/r_2R)v_{21}(\Omega_2)]$$

Функции u_{21} и v_{21} – регулярные функции в верхней полуплоскости комплексного переменного.

5. Энергия упругих волн в анизотропных средах. С физической точки зрения направления распространения фронтов упругих волн определяются векторами плотности потоков энергии (лучевых скоростей), которые в анизотропных средах в отличие от изотропных сред не совпадают по направлениям с векторами фазовых скоростей.

Повторяя рассуждения [17] для сред с тремя упругими постоянными, получим комплекты векторов плотности потоков энергии волн (2.7) в виде

$$S_{kx} = \rho\theta p_k^{-1}(p_k - c\theta\lambda_k)^2 Q_k [w'(\Omega_k)]^2, \quad S_{ky} = -\rho\lambda_k p_k^{-1}(p_k - c\theta\lambda_k)^2 M_k [w'(\Omega_k)]^2 \quad (5.1)$$

$$Q_k = 2ad\theta^2 + L\lambda_k^2 - (a+d), \quad M_k = 2bd\lambda_k^2 + L\theta^2 - (b+d) \quad (5.2)$$

Углы, образованные векторами плотности потоков энергии (лучевых скоростей) и смещений частиц среды с отрицательной полуосью y согласно (5.1) и (2.7) определяются выражениями

$$\operatorname{tg}\beta_{k2} = \theta Q_k (\lambda_k M_k)^{-1}, \quad \operatorname{tg}\gamma_{k2} = c\theta\lambda_k p_k^{-1} \quad (5.3)$$

Углы, образованные векторами лучевых скоростей с векторами фазовых скоростей, учитывая $\varphi_{k2} = \beta_{k2} - \alpha_{k2}$ и формулы (3.11) и (5.3), определяются выражениями

$$\operatorname{tg}\varphi_{k2} = \theta\lambda_k (Q_k - M_k)(\theta^2 Q_k + \lambda_k^2 M_k)^{-1} \quad (5.4)$$

Углы, направленные против хода часовой стрелки, имеют положительные значения.

Чтобы установить выполнимость принципа излучения для преломленных волн в решениях (3.9) и (4.5), изучим закономерности движения энергии волн от направлений распространения. Качественная картина этих закономерностей зависит от значений

$$N_1 = (a-d)(b-d) - c^2, \quad N_2 = (a-d)b - c^2, \quad N_3 = (b-d)a - c^2, \quad N_4 = b-d-c \quad (5.5)$$

которые при (2.4) могут иметь разные знаки.

6. Закономерность движения энергии при $N_2 > 0$. При $N_2 > 0$ вещественные преломленные волны в решениях (3.9) и (4.5) на участках

$$0 \leq \theta \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq d^{-1/2} \quad (6.1)$$

верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 римановой поверхности (фиг. 1) представляют вещественные квазипродольные ($k=1$) и квазипоперечные ($k=2$) волны с углами преломления

$$0 \leq \alpha_{12} \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_{22} \leq \pi/2 \quad (6.2)$$

На участках (6.1) функции λ_k и p_k , определяемые (2.6) и (2.7), удовлетворяют условиям

$$b^{-1/2} \geq \lambda_1 \geq 0, \quad d^{-1/2} \geq \lambda_2 \geq 0, \quad p_1 < 0, \quad p_2 > 0 \quad (6.3)$$

Из (3.11), (5.3) и (5.4) на границах участков (6.1) имеем

$$\alpha_{k2} = \beta_{k2} = \varphi_{k2} = 0 \quad (k=1, 2), \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{22} = \pi/2 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad (6.4)$$

$$\alpha_{k2} = \beta_{k2} = \pi/2, \quad \varphi_{k2} = 0, \quad \gamma_{12} = \pi/2, \quad \gamma_{22} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = a^{-1/2} \quad \text{и} \quad \theta = d^{-1/2} \quad (6.5)$$

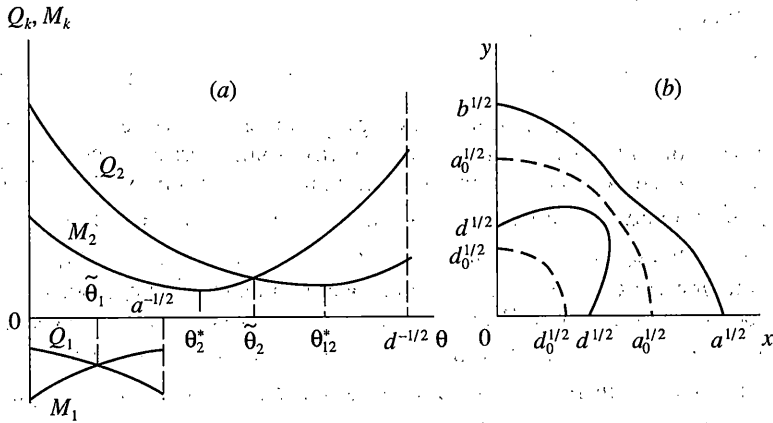
Следовательно, в направлениях осей упругой симметрии y и x квазипродольные и квазипоперечные волны переходят в чисто продольные и чисто поперечные волны.

Из (5.2) на границах участков (5.1) имеем

$$Q_1(0) = -R_2 b^{-1}, \quad Q_1(a^{-1/2}) = -(a-d), \quad M_1(0) = -(b-d), \quad M_1(a^{-1/2}) = -R_1 a^{-1}$$

$$Q_2(0) = N_3 d^{-1}, \quad Q_2(d^{-1/2}) = (a-d), \quad M_2(0) = (b-d), \quad M_2(d^{-1/2}) = N_2 d^{-1} \quad (6.6)$$

$$R_1 = (a-d)d + c^2 > 0, \quad R_2 = (b-d)d + c^2 > 0$$



Фиг. 3

Функции Q_k и M_k исследуются внутри участков (6.1) обычными методами математического анализа.

При $N_2 > 0$ в закономерностях движения энергии упругих волн имеем три основных случая.

Случай 1. Если $N_1 > 0$, то значения N_4 и N_5 могут иметь положительные или разные знаки, $N_3 > 0$.

При $N_4 > 0$ и $N_5 > 0$ графики функций Q_k и M_k на участках (6.1) имеют вид, изображенный на фиг. 3, а. В точках

$$\tilde{\theta}_1 = [(b-d-c)K_2^{-1}]^{1/2}, \quad \tilde{\theta}_2 = [(b-d+c)K_1^{-1}]^{1/2} \quad (6.7)$$

графики пересекаются, в точках θ_{12}^* и θ_2^* функции Q_2 и M_2 имеют положительные минимальные значения, причем $\theta_2^* < \tilde{\theta}_2 < \theta_{12}^*$.

При $N_1 > 0$, $N_4 > 0$, $N_5 > 0$ [18] фазовые скорости квазипродольных волн имеют минимальные значения в точках $\tilde{\theta}_1$, квазипоперечных волн – максимальные значения в точках $\tilde{\theta}_2$, графики фазовых скоростей изображены на фиг. 3, в. Следовательно, точки пересечения графиков Q_k и M_k соответствуют волнам с экстремальными фазовыми скоростями.

Из (3.11), (5.3) и (5.4) при (6.7) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\beta}_{12} = \tilde{\gamma}_{12} = \arctg(N_5 N_4^{-1})^{1/2}, \quad \tilde{\varphi}_{12} = \tilde{\varphi}_{22} = 0; \quad \tilde{\alpha}_{22} = \tilde{\beta}_{22} = \arctg(N_9 N_8^{-1})^{1/2}, \\ \tilde{\gamma}_{22} = \pi/2 + \tilde{\alpha}_{22} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$N_8 = a-d+c, \quad N_9 = b-d+c$$

Следовательно, квазипродольные и квазипоперечные волны в направлениях $\tilde{\alpha}_{12}$ и $\tilde{\alpha}_{22}$, не являющихся осями упругой симметрии среды, переходят в чисто продольные и чисто поперечные волны.

Из (3.11), (5.3) и (5.4), учитывая (6.3), имеем на участке $(0, a^{-1/2})$:

$$0 < \beta_{12} < \alpha_{12} < \tilde{\alpha}_{12}, \quad \varphi_{12} < 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_1), \quad \tilde{\alpha}_{12} < \alpha_{12} < \beta_{12} < \pi/2, \quad \varphi_{12} > 0 \quad \theta > \tilde{\theta}_1 \quad (6.9)$$

на участке $(0, a^{-1/2})$:

$$0 < \alpha_{22} < \beta_{22} < \tilde{\alpha}_{22}, \quad \varphi_{22} > 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_2), \quad \tilde{\alpha}_{22} < \beta_{22} < \alpha_{22} < \pi/2, \quad \varphi_{22} < 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_2) \quad (6.10)$$

Из условий (5.9) и (5.10) следует, что векторы лучевых скоростей (потоков энергии) отклоняются от направлений нормалей к фронтам волн в сторону возрастания фазовых скоростей. Это свойство потоков энергии объясняет причину образования остроугольных кромок в направлениях $\alpha_{22} = \tilde{\alpha}_{22}$ на фронтах квазипоперечных волн от точечных источников в средах $N_1 > 0$ при выполнении условия (2.8) в [16], так как с физической точки зрения векторы плотности потоков энергии определяют направления распространения фронтов волн. В этом случае на участках фронтов квазипоперечных волн, прилегающих к направлениям $\alpha_{22} = \tilde{\alpha}_{22}$ с максимальными фазовыми скоростями, векторы плотности потоков энергии отклоняются от нормалей к фронту волны в сторону направлений $\alpha_{22} = \tilde{\alpha}_{22}$, образуя остроугольные кромки (фиг. 2, в) [16].

При $N_4 > 0, N_5 < 0$ и $N_4 < 0, N_5 > 0$, если $N_1 > 0$, графики Q_1 и M_1 не пересекаются и соответственно выполняются условия $Q_1 < M_1 < 0$ и $M_1 < Q_1 < 0$. Из (3.11), (5.3) и (5.4) имеем условия:

$$0 < \alpha_{12} < \beta_{12} < \pi/2, \quad \varphi_{12} > 0 \quad \text{при} \quad N_4 > 0, \quad N_5 < 0 \quad (6.11)$$

$$0 < \beta_{12} < \alpha_{12} < \pi/2, \quad \varphi_{12} < 0 \quad \text{при} \quad N_4 < 0, \quad N_5 > 0 \quad (6.12)$$

Фазовые скорости квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ при $N_1 > 0, N_4 > 0$ и $N_5 < 0$ непрерывно возрастают, при $N_1 > 0, N_4 < 0$ и $N_5 > 0$ — непрерывно убывают [18]. Из (6.11) и (6.12) следует, что векторы лучевых скоростей отклоняются от нормалей к фронтам волн в сторону возрастания фазовых скоростей.

При $N_4 > 0, N_5 < 0$ и $N_4 < 0, N_5 > 0$, если $N_1 > 0$, графики функций Q_2 и M_2 и фазовых скоростей, квазипоперечных волн [18] имеют вид, изображенный на фиг. 3. Следовательно, для векторов фазовых и лучевых скоростей и смещений квазипоперечных волн выполняются соответственно условия (6.4), (6.5), (6.8), (6.10).

Случай 2. Считаем, что $N_1 < 0, N_3 > 0$. В этом случае значения N_4 и N_5 могут иметь отрицательные или разные знаки.

При $N_4 < 0$ и $N_5 < 0$ графики функций Q_k и M_k имеют вид, изображенный на фиг. 4, а.

Фазовые скорости [18] квазипродольных волн имеют максимум в точках $\tilde{\theta}_1$, квазипоперечных волн — минимум в точках $\tilde{\theta}_2$ (фиг. 4, в).

В направлениях осей упругой симметрии и экстремальных фазовых скоростей направления векторов фазовых и лучевых скоростей и смещений удовлетворяют условиям (6.4), (6.5) и (6.8).

Из формул (3.11), (5.3) и (5.4) и графиков функций Q_k и M_k (фиг. 4, а), учитывая (6.3), имеем:

на участке $(0, a^{-1/2})$:

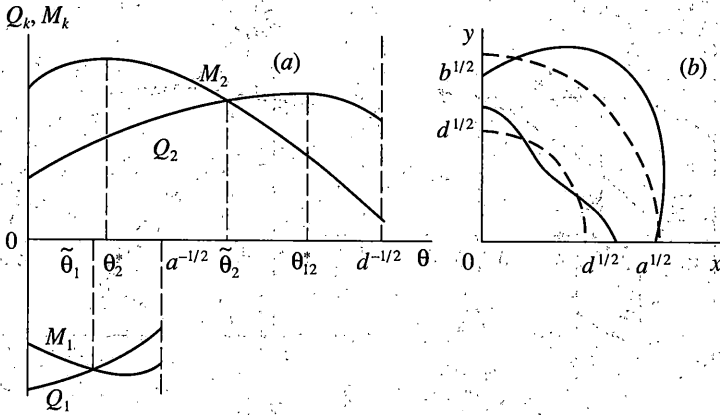
$$0 < \alpha_{12} < \beta_{12} < \tilde{\alpha}_{12}, \quad \varphi_{12} > 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_1), \quad \tilde{\alpha}_{12} < \beta_{12} < \alpha_{12} < \pi/2, \quad \varphi_{12} < 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_1) \quad (6.13)$$

на участке $(0, a^{-1/2})$:

$$0 < \beta_{22} < \alpha_{22} < \tilde{\alpha}_{22}, \quad \varphi_{22} < 0 \quad (\theta < \tilde{\theta}_2), \quad \tilde{\alpha}_{22} < \alpha_{22} < \beta_{22} < \pi/2, \quad \varphi_{22} > 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_2) \quad (6.14)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, векторы лучевых скоростей (потоков энергии) отклоняются от нормалей к фронтам волн в сторону возрастания фазовых скоростей.

При $N_4 > 0, N_5 < 0$ и $N_4 < 0, N_5 > 0$, если $N_1 < 0, N_3 > 0$, графики Q_1 и M_1 не пересекаются и соответственно выполняются условия $Q_1 < M_1 < 0$ и $M_1 < Q_1 < 0$. Направления



Фиг. 4

векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн удовлетворяют условиям (6.11) и (6.12). Фазовая скорость на участке $(0, a^{-1/2})$ при $N_4 > 0, N_5 < 0$ непрерывно возрастает, при $N_4 < 0, N_5 > 0$ – непрерывно убывает [18].

При тех и других условиях графики функций Q_2 и M_2 и фазовых скоростей квазипоперечных волн [18] имеют вид, изображенный на фиг. 4. Векторы фазовых и лучевых скоростей и смещений квазипоперечных волн удовлетворяют соответствующим условиям (6.4), (6.5), (6.8) и (6.14).

Случай 3. Если $N_1 < 0$ при $N_2 > 0, N_3 < 0$, то выполняется условие $a > v$ и могут иметь место условия $N_4 < 0, N_5 < 0$ и $N_4 > 0, N_5 < 0$.

При $N_4 < 0, N_5 < 0$ графики функций Q_k и M_k и фазовых скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн имеют вид, изображенный на фиг. 5. Скорость квазипродольной волны при $\tilde{\theta}_1$ имеет максимальное значение, квазипоперечной волны при $\tilde{\theta}_2$ – минимальное значение.

В направлениях осей упругой симметрии и экстремальных фазовых скоростей направления векторов фазовых и лучевых скоростей и смещений удовлетворяют условиям (6.4), (6.5) и (6.8).

Графики функций Q_1 и M_1 и график фазовой скорости квазипродольной волны (фиг. 5) имеют вид, изображенный на фиг. 4. Следовательно, направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.13).

Функции Q_2 и M_2 на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (фиг. 5, a):

$$Q_2 < 0, \quad M_2 > 0 \quad (\theta < \theta_0), \quad M_2 > Q_2 > 0 \quad (\theta_0 < \theta < \tilde{\theta}_2), \quad Q_2 > M_2 > 0 \quad (\theta > \tilde{\theta}_2). \quad (6.15)$$

Из (3.11), (5.3), (5.4) и (6.15), учитывая (6.3), имеем для квазипоперечных волн на участке $(0, \theta_0)$:

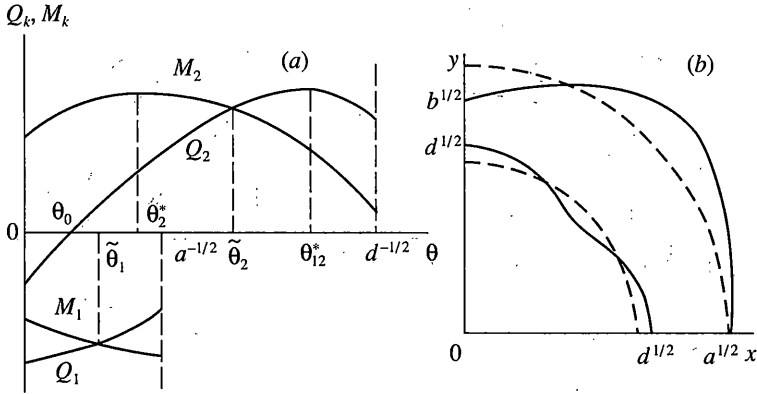
$$\alpha_{22} > 0, \quad \beta_{22} < 0, \quad \varphi_{22} = -(\alpha_{22} + |\beta_{22}|) < 0. \quad (6.16)$$

на участке $(\theta_0, \tilde{\theta}_2)$:

$$0 < \beta_{22} < \alpha_{22} < \tilde{\alpha}_{22}, \quad \varphi_{22} < 0 \quad (6.17)$$

на участке $(\tilde{\theta}_2, a^{-1/2})$:

$$\tilde{\alpha}_{22} < \alpha_{22} < \beta_{22} < \pi/2, \quad \varphi_{22} > 0 \quad (6.18)$$



Фиг. 5

На границах участка $(0, \theta_0)$ согласно (3.11), (5.3) и (5.4) при $k = 2$ углы, определяющие направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных волн имеют значения: при $\theta = 0$ имеем $\alpha_{22} = \beta_{22} = \varphi_{22} = 0$, при $\theta = \theta_0 - \alpha_{22} > 0, \beta_{22} = 0, \varphi_{22} = -\alpha_{22}$.

Следовательно, при $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ векторы лучевых скоростей квазипоперечных волн совпадают с направлением отрицательной полуоси y .

Из (6.16) следует, что квазипоперечные волны, определенные на участке $(0, \theta_0)$ в отличие от предыдущих случаев распространяются при положительных углах α_{22} векторов фазовых скоростей с отрицательными значениями углов β_{22} векторов лучевых скоростей. Эта особенность имеет прямую связь с существованием на фронтах квазипоперечных волн от точечных источников остроугольных кромок, распространяющихся в направлении оси y при $N_3 < 0$ [16], и является причиной образования остроугольных кромок.

Если $N_4 > 0, N_5 < 0$, графики функций Q_1 и M_1 не пересекаются, на участке $(0, a^{-1/2})$ выполняется условие $Q_1 < M_1 < 0$. Направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн удовлетворяют условиям (6.11). Фазовая скорость на участке $(0, a^{-1/2})$ непрерывно возрастает.

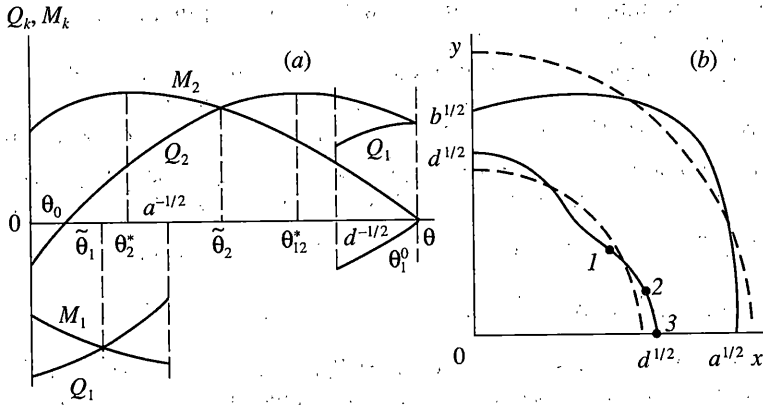
Графики функций Q_2 и M_2 и фазовых скоростей квазипоперечных волн [18] имеют вид, изображенный на фиг. 5. Следовательно, направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных волн, определенных на участке $(0, d^{-1/2})$, удовлетворяют условиям (6.16)–(6.18).

Из результатов анализа закономерностей движения энергии квазипродольных и квазипоперечных волн следует, что при условии $N_2 > 0$, для квазипродольных и квазипоперечных преломленных волн, определенных на участках $(0, a^{-1/2})$ и $(0, d^{-1/2})$, верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 (фиг. 1), принцип излучения выполняется, так как углы β_{12} и β_{22} определяющие направления векторов плотности потоков энергии, не превышают $\pi/2$. В этом случае энергия переломленных волн движется от границы раздела $y = 0$ вглубь анизотропной среды $y < 0$.

7. Закономерности движения энергии при $N_2 < 0$. При $N_2 < 0$ преломленные волны в решениях (3.9) и (4.5) определены на римановой поверхности, изображенной на фиг. 2.

На участках

$$0 \leq \theta \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1^0 \tag{7.1}$$



Фиг. 6

верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 преломленные волны предоставляют вещественные квазипродольные ($k = 1$) и квазипоперечные ($k = 2$) волны с углами преломления

$$0 \leq \alpha_{12} \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_{22} \leq \alpha_{22}^0 = \alpha_{22}(\theta_1^0) \quad (\alpha_{22}^0 < \pi/2) \quad (7.2)$$

На берегах разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 функции u_{12} и v_{12} в решениях (3.9) и (4.5) выражают вещественные квазипоперечные ($k = 1$) волны [15]. Функция λ_1 на участке

$$d^{-1/2} \leq \theta \leq \theta_1^0 \quad (7.3)$$

нижнего берега разреза принимает значение $(+\lambda_1)$, векторы фазовой скорости имеют направления

$$\alpha_{12}^0 = \alpha_{12}(\theta_1^0) \leq \alpha_{12} \leq \pi/2 \quad (\alpha_{12}^0 = \alpha_{22}^0) \quad (7.4)$$

верхнего берега разреза – значения $(-\lambda_1)$, векторы фазовых скоростей имеют направления

$$\pi/2 \leq \alpha_{12} \leq (\pi - \alpha_{12}^0) \quad (7.5)$$

При $N_2 < 0$ значения N_3 могут иметь разные знаки.

Случай 1. При $N_2 < 0$ и $N_3 < 0$ выполняются условия $N_1 < 0, N_4 < 0, N_5 < 0$. На участках (7.1) и (7.3) графики функций Q_k и M_k и фазовых скоростей [9] имеют вид, изображенный на фиг. 6. На участках (7.3) нижнего и верхнего берегов разреза $(+d^{-1/2}, \theta_1^0)$ графики Q_1 и M_1 имеют одинаковый вид. На графике фазовых скоростей квазипоперечных волн точками отмечены значения скоростей, соответствующие границам участков $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ на плоскостях θ_1 и θ_2 римановой поверхности: 1 – точке $\theta = d^{-1/2}$ на плоскости θ_2 , 2 – точке разветвления θ_1^0 , 3 – точке разветвления $\theta = d^{-1/2}$ на плоскости θ_1 . Участок графика 2–3 соответствует участку (7.3) нижнего берега разреза плоскости θ_1 . Участок графика фазовой скорости, определенной на участке (7.3) верхнего берега

разреза, может быть представлен участком 2'-3, симметричным участку 3-2 относительно оси x (фиг. 6, в).

Графики функций Q_k и M_k и фазовых скоростей на участках (7.1) (фиг. 6) и на участках (6.1) при $N_1 < 0, N_2 > 0, N_3 < 0$ (фиг. 5) имеют аналогичный вид.

Следовательно, при $N_2 < 0$ и $N_3 < 0$ направления векторов фазовых и лучевых скоростей удовлетворяют условиям: квазипродольных ($k = 1$) волн на участке $(0, a^{-1/2})$ – условиям (6.13), квазипоперечных ($k = 2$) волн на участке $(0, \theta_0)$ – условиям (6.16), на участке $(\theta_0, \tilde{\theta}_2)$ – условиям (6.17), на участке $(\tilde{\theta}_2, \theta_1^0)$ – условиям

$$\tilde{\alpha}_{22} < \alpha_{22} < \beta_{22} < \beta_{22}^0 = \beta_{22}(\theta_1^0), \quad \varphi_{22} > 0 \quad (7.6)$$

Как и в предыдущем случае на участке $(0, \theta_0)$ квазипоперечные волны имеют особенность, связанную с существованием остроугольных кромок на фронтах квазипоперечных волн от точечных источников при условии $N_3 < 0$.

Так как на нижнем и верхнем берегах разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 функции Q_1, M_1 и p_1 имеют одинаковые значения $Q_1 > 0, M_1 < 0$ и $p_1 > 0$, а функция λ_1 имеет значения противоположного знака $-(+\lambda_1)$ и $(-\lambda_1)$, то из (3.11), (5.3) и (5.4) следует, что направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных волн, определенных на берегах разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$, удовлетворяют условиям:

на нижнем (при “ $+\lambda_1$ ”):

$$\pi/2 \geq \alpha_{12} \geq \alpha_{12}^0, \quad \pi/2 \leq \beta_{12} \leq (\pi - \beta_{12}^0), \quad \varphi_{12} > 0 \quad (7.7)$$

на верхнем (при “ $-\lambda_1$ ”):

$$\pi/2 \leq \alpha_{12} \leq (\pi - \alpha_{12}^0), \quad \pi/2 \geq \beta_{12} \geq \beta_{12}^0, \quad \varphi_{12} < 0 \quad (7.8)$$

$$\alpha_{12}^0 = \alpha_{12}(\theta_1^0) = \alpha_{22}^0 = \alpha_{22}(\theta_1^0), \quad \beta_{12}^0 = \beta_{12}(\theta_1^0) = \beta_{22}^0 = \beta_{22}(\theta_1^0)$$

Случай 2. При $N_2 < 0, N_3 > 0$ выполняются условия $N_1 < 0$ и $N_4 < 0$, значение N_5 может иметь разные знаки.

При $N_4 < 0, N_5 > 0$ на участках (7.1) и (7.3) графики функций Q_k и M_k и фазовых скоростей [9] имеют вид, изображенный на фиг. 7.

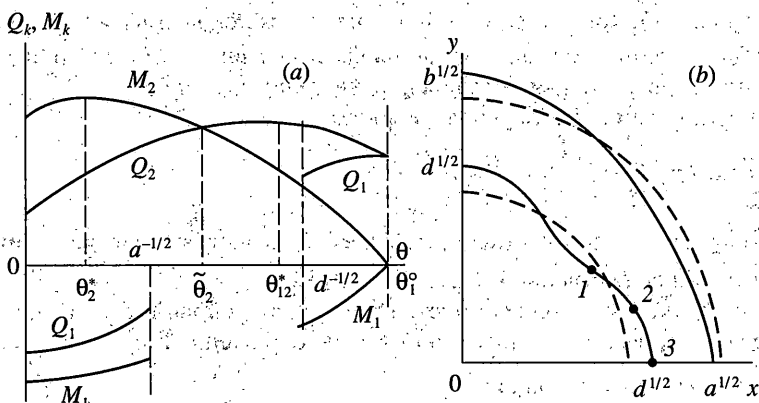
Из формул (3.11), (5.3) и (5.4), учитывая $M_1 < Q_1 < 0$ на участке $(0, a^{-1/2})$ и $p_1 < 0$, следует, что направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн, определенных на участке $(0, a^{-1/2})$, удовлетворяют условиям

$$0 < \beta_{12} < \alpha_{12} < \pi/2, \quad \varphi_{12} < 0 \quad (7.9)$$

При $N_4 < 0, N_5 < 0$ графики функций Q_1 и M_1 и фазовых скоростей квазипродольных волн, определенных на участке $(0, a^{-1/2})$ имеют вид, изображенный на фиг. 4. Следовательно, направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн, определенных на участке $(0, a^{-1/2})$, удовлетворяют условиям (6.19).

При $N_4 < 0, N_5 < 0$ как и при условиях $N_4 < 0, N_5 > 0$ графики функций Q_2, M_2 и Q_1, M_1 и фазовых скоростей квазипоперечных волн, определенных на участках $(0, \theta_1^0)$ плоскости θ_2 и $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ плоскости θ_1 , имеют вид, изображенный на фиг. 7.

На участках $(0, \tilde{\theta}_2)$ фиг. 7 и 4 графики функций Q_2 и M_2 и фазовых скоростей квазипоперечных волн ($k = 2$) имеют одинаковый вид.



Фиг. 7

Следовательно, направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных волн, определенных на участке $(0, \tilde{\theta}_2)$, удовлетворяют условиям (6.14) при $\theta < \tilde{\theta}_2$.

На участках $(\tilde{\theta}_2, \theta_1^0)$ плоскости θ_2 и $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ плоскости θ_1 фиг. 7 и 6 графики функций Q_2, M_2 и Q_1, M_1 и фазовых скоростей квазипоперечных волн имеют одинаковый вид.

Следовательно, направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных волн ($k = 2$), определенных на участке $(\tilde{\theta}_2, \theta_1^0)$ плоскости θ_2 , удовлетворяют условиям (7.6), квазипоперечных волн ($k = 1$), определенных на нижнем и верхнем берегах разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 , удовлетворяют условиям (7.7) и (7.8).

Из результатов анализа закономерностей движения энергии следует, что при $N_2 < 0$ для квазипродольных и квазипоперечных преломленных волн, определенных на участках $(0, a^{-1/2})$ и $(0, \theta_1^0)$, $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 (фиг. 2), принцип излучения выполняется, так как углы β_{12} и β_{22} , β_{12}^* , определяющие направления векторов плотности потоков энергии, не превышают $\pi/2$. Здесь β_{12}^* обозначены углы, определенные на верхнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 .

Из условий (7.7) следует, что квазипоперечные ($k = 1$) волны, определенные на нижнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 , не могут быть преломленными волнами, для них принцип излучения не выполняется.

Из условий (7.7) и (7.8) следует, что в безграничной анизотропной среде направления векторов плотности потоков энергии квазипоперечных ($k = 1$) волн, определенных на нижнем и верхнем берегах разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 , пересекаются в точках оси симметрии x . Эта особенность потоков энергии является причиной образования на фронтах квазипоперечных волн от точечных источников остроугольных кромок, распространяющихся в направлении оси симметрии x при выполнении условия $N_2 < 0$ [16].

8. Анализ решений (3.9) и (3.13) при $N_2 > 0$. Изучим решения (3.9) и (3.13) при различных комбинациях соотношений упругих постоянных контактирующих сред.

Рассмотрим случай, когда при $N_2 > 0$ выполняются условия $N_1 > 0$, $N_4 > 0$ и $N_5 > 0$, графики фазовых скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн имеют вид, изображенный на фиг. 3, в, для определенности принимается $a > b$.

Если контактирующие среды удовлетворяют условиям

$$a_0 > d_0 > a > d \quad (a_0^{-1/2} < d_0^{-1/2} < a^{-1/2} < d^{-1/2}) \quad (8.1)$$

функции η_k и λ_k ($k = 1, 2$) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ имеют вещественные значения, решение задачи выражается вещественными функциями (3.9).

Согласно графиков фазовых скоростей (фиг. 3, в), условий (8.1) и закона синусов (3.13), фазовые скорости вторичных волн и углы отражения и преломления на участке $(0, a_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям

$$b_1 = b_{11} > b_{21} > b_{12} > b_{22}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} > \alpha_{12} > \alpha_{22} \quad (8.2)$$

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей преломленных волн на участке $(0, a_0^{-1/2})$ при $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1 < \tilde{\theta}_2$ (фиг. 3, а) удовлетворяют первым условиям (6.9) и (6.10). Если $\tilde{\theta}_1 < a_0^{-1/2}$, направления этих векторов квазипродольных преломленных волн удовлетворяют условиям (6.9).

При условии

$$a_0 > a > d_0 > d \quad (a_0^{-1/2} < a^{-1/2} < d_0^{-1/2} < d^{-1/2}) \quad (8.3)$$

решения (3.9) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выражают вещественные волны. В этом случае при $a^{-1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > b^{1/2}$ (фиг. 3, в) графики фазовых скоростей b_{12} и $b_{21} = d_0^{1/2}$ пересекаются в точке $\theta = \chi_1$, определяемой уравнением $b_{12}(\theta) = d_0^{1/2}$, причем $a_0^{-1/2} < \chi_1 < a^{-1/2}$.

Следовательно, как и в случае (8.1) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ фазовые скорости и углы отражения и преломления удовлетворяют условиям (8.2).

Если при (8.3) $b^{1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > \min b_{12}$, то графики фазовых скоростей b_{12} и $b_{21} = d_0^{1/2}$ пересекаются в точках χ_1 и χ_2 , причем $\chi_1 < \tilde{\theta}_1 < \chi_2 < a^{-1/2}$. Тогда на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия:

при $a^{-1/2} < \chi_1$:

$$b_1 = b_{11} > b_{12} > b_{21} = d_0^{1/2} > b_{22}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{12} > \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (8.4)$$

при $\chi_1 < a_0^{-1/2} < \chi_2$ на участке $(0, \chi_1)$ – условия (8.4), на участке $(\chi_1, a_0^{-1/2})$ – условия (8.2);
при $\chi_2 < a_0^{-1/2}$ на участках $(0, \chi_1)$ и $(\chi_2, a_0^{-1/2})$ – условия (8.4), на участке (χ_1, χ_2) – условия (8.2).

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей преломленных волн, определенных на участке $(0, a_0^{-1/2})$, так как $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_2$, при $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1$ удовлетворяют первым условиям (6.9) и (6.10). Если $a_0^{-1/2} > \tilde{\theta}_1$, для квазипродольных волн выполняются условия (6.9).

При условии

$$a > a_0 > d_0 > d \quad (a^{-1/2} < a_0^{-1/2} < d_0^{-1/2} < d^{-1/2}) \quad (8.5)$$

на участке $(0, a^{-1/2})$ функции η_k и λ_k ($k = 1, 2$) имеют вещественные значения, решение задачи выражается функциями (3.9).

Значению $\theta = a^{-1/2}$ соответствует критический угол падения, определяемый (3.2), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ функция λ_1 принимает мнимые значения. Решение задачи выражается функциями комплексного переменного (3.13) при

$$\lambda_1 = -i\lambda_1^*, \quad \lambda_1^* = [-A + (A^2 - B)^{1/2}]^{1/2} (2bd)^{-1/2} \quad (8.6)$$

Преломленная квазипродольная волна – комплексная волна с мнимой фазовой скоростью в направлении оси y , остальные волны – вещественные.

Если при (8.5) $a^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2} > b^{1/2}$ и $\min b_{12} > b_{21} = d_0^{1/2} > \max b_{22}$ (фиг. 3, в), графики скоростей b_{11} и b_{12} пересекаются в точке χ_{11} , определяемой уравнением $b_{12}(\theta) = a_0^{1/2}$, причем $\tilde{\theta}_1 < \chi_{11} < a^{-1/2}$.

При угла x падения α_1 , определенных на участке $(0, a_0^{-1/2})$, выполняются условия: на участке $(0, \chi_{11})$ – условия (8.4), на участке $(\chi_{11}, a^{-1/2})$:

$$b_{12} > b_1 = b_{11} > b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_{12} > \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (8.7)$$

на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$:

$$b_1 = b_{11} > b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (8.8)$$

Если при (8.5) $b^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2} > \min b_{12}$ и $\min b_{12} > b_{21} = d_0^{1/2} > \max b_{22}$, то графики скоростей b_{11} и b_{12} пересекаются в точках χ_{11} и χ_{12} , причем $\chi_{11} < \tilde{\theta}_1 < \chi_{12} < a^{-1/2}$. В этом случае на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участках $(0, \chi_{11})$ и $(\chi_{12}, a^{-1/2})$ – условия (8.7), на участке (χ_{11}, χ_{12}) – условия (8.4), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условия (8.8).

Если при (8.5) и $\min b_{12} > b_{11} = a_0^{1/2} > \max b_{22}$ и $\max b_{22} > b_{21} = d_0^{1/2} > \min b_{22} = d^{1/2}$, то графики скоростей b_{21} и b_{22} пересекаются в точках μ_1 и μ_2 , причем $\mu_1 < \tilde{\theta}_2 < \mu_2 < a_0^{-1/2}$. Так как $b_{11} = a_0^{1/2} > \max b_{22}$, то согласно (8.5) $a^{-1/2} < a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_2$. На участке $(0, a_0^{-1/2})$ при $\mu_1 < a^{-1/2} < a_0^{-1/2}$ выполняются условия: на участке $(0, \mu_1)$ – условия (8.7); на участке $(\mu_1, a^{-1/2})$:

$$b_{12} > b_1 = b_{11} > b_{22} < b_{21}, \quad \alpha_{12} > \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{22} > \alpha_{21} \quad (8.9)$$

на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$:

$$b_1 = b_{11} > b_{22} > b_{21}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{22} > \alpha_{21} \quad (8.10)$$

При $a^{-1/2} < \mu_1 < a_0^{-1/2}$ выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (8.7), на участке $(a^{-1/2}, \mu_1)$ – условия (8.8), на участке $(\mu_1, a_0^{-1/2})$ – условия (8.10).

При $a_0^{-1/2} < \mu_1 < \tilde{\theta}_2$ выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (8.7), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условия (8.8).

Так как при условии (8.5) $\tilde{\theta}_1 < a^{-1/2}, < \tilde{\theta}_2$, направления векторов фазовых и левых скоростей квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.9), квазипоперечных волн на участке $(0, a_0^{-1/2})$ – первым условиям (6.10).

При условии

$$a > a_0 > d > d_0 (a^{-1/2} < a_0^{-1/2} < d^{-1/2} < d_0^{-1/2}) \quad (8.11)$$

как и при (8.5) решения задачи на участке $(0, a^{-1/2})$ выражаются функциями (3.9), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – функциями (3.13) при значении λ_1 , определяемом (8.6).

Если $\min b_{12} > b_{11} = \max b_{22}$ при углах падения α_1 , определенных на участке $(0, a_0^{-1/2})$, то выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (8.9), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условия (8.10).

При $\max b_{22} > b_{11} = a_0^{1/2} > \min b_{22} = d^{1/2}$ графики скоростей b_{11} и b_{22} пересекаются в точках μ_{11} и μ_{12} , определяемых уравнением $b_{22}(\theta) = a_0^{1/2}$, причем $\mu_{11} < \tilde{\theta}_2 < \mu_{12} < a_0^{-1/2}$. Если $a^{-1/2} < \mu_{11} < \tilde{\theta}_2 < \mu_{12} < a_0^{-1/2}$, то на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (8.9), на участках $(a^{-1/2}, \mu_{11})$ и $(\mu_{12}, a_0^{-1/2})$ – условия (8.10), на участке $(\mu_{11} \text{ и } \mu_{12})$:

$$b_{22} > b_1 = b_{11} > b_{21}, \quad \alpha_{22} > \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} \quad (8.12)$$

При $\mu_{11} < a^{-1/2} < \tilde{\theta}_2 < \mu_{12} < a_0^{-1/2}$ на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, \mu_{11})$ – условия (8.9), на участке $(\mu_{11}, a^{-1/2})$:

$$b_{12} > b_{22} > b_1 = b_{11} > b_{21}, \quad \alpha_{12} > \alpha_{22} > \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} \quad (8.13)$$

на участке $(a^{-1/2}, \mu_{12})$ – условия (8.12), на участке $(\mu_{12}, a_0^{-1/2})$ – условия (8.10).

При условии (8.11) направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн на участках $(0, a^{-1/2})$ и $(0, a_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.9) и (6.10), так как $\tilde{\theta}_2 < a_0^{-1/2}$.

При условии

$$a > d > a_0 > d_0, \quad (a^{-1/2} < d^{-1/2} < a_0^{-1/2} < d_0^{-1/2}) \quad (8.14)$$

как и при условиях (8.5) и (8.11) решения задачи на участке $(0, a^{-1/2})$ выражаются функциями (3.9), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – функциями (3.13) при значении λ_1 , определяемом (8.6). Точке $\theta = d^{-1/2}$ соответствует критический угол падения продольной волны по отношению к преломленной квазипоперечной волне, определяемый (3.2) при $\theta = d^{-1/2}$. На участке $(d^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ решения задачи выражаются функциями (3.13) при λ_1 и λ_2 , определяемых (8.6) и

$$\lambda_2 = -i\lambda_2^*, \quad \lambda_2^* = [-A - (A^2 - B)^{1/2}]^{1/2} (2bd)^{-1/2} \quad (8.15)$$

При (8.14) фазовые скорости и углы отражения и преломления на участке $(0, a_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условиям (8.13); на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условиям (8.12); на участке $(d^{-1/2}, a_0^{-1/2})$:

$$b_1 = b_{11} > b_{21}, \quad \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} \quad (8.16)$$

При условии (8.14) направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн на участках $(0, a^{-1/2})$ и $(0, d^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.9) и (6.10).

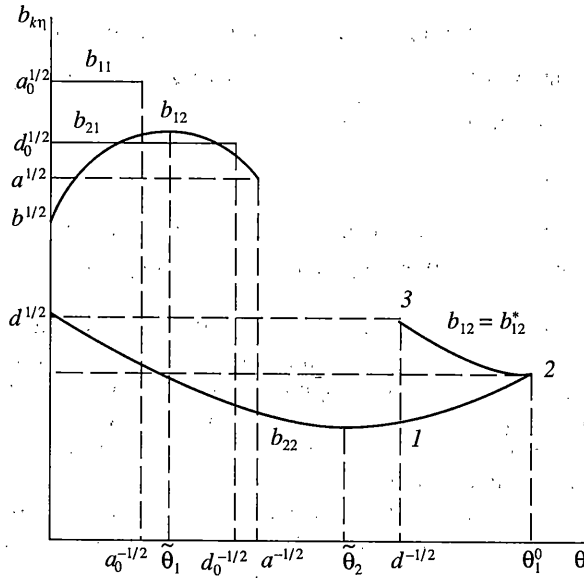
В результате анализа решений (3.9) и (3.13) при $N_2 > 0$ (когда $N_1 > 0, N_4 > 0, N_5 > 0$ (фиг. 3)), изучены диапазоны углов падения продольных волн, при которых возбуждаются вещественные и комплексные вторичные волны, получены условия, характеризующие распределение фазовых скоростей и углов отражения и преломления вторичных волн в зависимости от углов падения, при выполнении условий (8.1), (8.3), (8.5), (8.11), (8.14) для упругих постоянных контактирующих сред.

Из результатов анализа решений (3.9) и (3.13) для $N_2 > 0$, когда при $N_1 < 0, N_4 < 0, N_5 < 0$ выполняются условия $N_3 > 0$ (фиг. 4) или $N_3 < 0$ (фиг. 5), следует, что решения имеют такой же вид как и в случае $N_1 > 0, N_4 > 0, N_5 > 0$; условия, характеризующие распределение фазовых скоростей и углов отражения и преломления вторичных волн в зависимости от углов падения, имеют другой вид.

Следовательно, процесс отражения и преломления продольных волн, связанный с возбуждением вещественных и комплексных вторичных волн зависит от условий (8.1), (8.3), (8.5), (8.11) и (8.14) для упругих постоянных контактирующих сред и от углов падения и не зависит от характера изменения фазовых скоростей упругих волн в анизотропных средах от направления движения.

9. Анализ решений (3.9) и (3.13) при $N_2 < 0$. Рассмотрим случай, когда выполняются условия $N_2 < 0, N_3 < 0$, графики фазовых скоростей преломленных волн имеют вид, изображенный на фиг. 6, в, для определенности принимается $a > b$. На графике для квазипоперечных волн участок 0–2 соответствует квазипоперечным ($k = 2$) волнам, определенным на участке $(0, \theta_1^0)$ верхнего берега разреза плоскости θ_2 , участок 3–2 – квазипоперечным ($k = 1$) волнам, определенным на нижнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 , для которых принцип излучения не выполняется. Так как векторы фазовых скоростей квазипоперечных ($k = 1$) волн, определенных на нижнем и верхнем берегах разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ симметричны относительно оси x и имеют направления α_{12} и $\alpha_{12}^* = \pi - \alpha_{12}$, то можно принять участок 3–2 за график фазовых скоростей для квазипоперечных ($k = 1$) волн определенных на верхнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$, закон синусов (3.13) для них выполняется, $\sin \alpha_{12}^* = \sin \alpha_{12}$.

Для удобства графики фазовых скоростей (фиг. 6, в) представим в виде, изображенном на фиг. 8. Фазовые скорости квазипоперечных ($k = 1$) волн, определенных на верхнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, \theta_1^0)$ плоскости θ_1 , выражаются участком 3–2 и обозначены b_{12}^* . Графики фазовых скоростей $b_{11} = a_0^{1/2}$ и $b_{21} = d_0^{1/2}$ отраженных волн, определенных на участках $(0, a_0^{-1/2})$ и $(0, d_0^{-1/2})$, выражаются прямыми отрезками длиной $a_0^{-1/2}$ и $d_0^{-1/2}$, параллельными оси θ .



Фиг. 8

При условии (8.1) решения (3.9) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выражают вещественные волны.

При $b_{21} = d_0^{1/2} > \max b_{12}$ согласно графиков (фиг. 8) $a_0^{-1/2} < d_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1$. Учитывая условие (3.13), на участке $(0, a_0^{-1/2})$ фазовые скорости и углы отражения и преломления удовлетворяют условиям (8.2).

Если при (8.1) $b_{11} = a_0^{1/2} > \max b_{12} > b_{21} = d_0^{1/2} > a^{1/2}$, то графики фазовых скоростей b_{21} и b_{12} пересекаются в точках χ_1 и χ_2 , причем $\chi_1 < \tilde{\theta}_1 < \chi_2 < d_0^{-1/2}$ и $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1$, так как $b_{11} = a_0^{1/2} > \max b_{12}$. В этом случае фазовые скорости и углы отражения и преломления на участке $(0, a_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: при $a_0^{-1/2} < \chi_1$ – условиям (8.2); при $\chi_1 < a_0^{-1/2}$ на участке $(0, \chi_1)$ – условиям (8.2), на участке $(\chi_1, a_0^{-1/2})$ – условиям (8.4).

Так как при условии (8.1) $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1 < \tilde{\theta}_2$, направления векторов фазовых и лучевых скоростей преломленных волн, определенных на участке $(0, a_0^{-1/2})$, удовлетворяют условиям: квазипродольных волн – первым условиям (6.13), квазипоперечных ($k = 2$) волн – условиям (6.16) при $a_0^{-1/2} < \theta_0$, условиям (6.16) и (6.17) при $a_0^{-1/2} > \theta_0$.

При условии (8.3) решения (3.9) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выражают вещественные волны. В этом случае при $b_{11} = a_0^{1/2} > \max b_{12}$ и $a^{1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > b^{1/2}$ (фиг. 8) графики скоростей b_{12} и $b_{21} = d_0^{1/2}$ пересекаются в точке $\theta = \chi_1$, причем $\chi_1 < \tilde{\theta}_1$ и $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1$. Согласно графиков (фиг. 8) и условия (3.13) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ фазовые скорости и углы отражения и преломления удовлетворяют условиям: при $a_0^{-1/2} < \chi_1$ – условиям (8.2); при $\chi_1 < a_0^{-1/2}$ на участке $(0, \chi_1)$ – условиям (8.2), на участке $(\chi_1, a_0^{-1/2})$ – условиям (8.4).

Если при (8.3) $\max b_{12} > b_{11} = a_0^{1/2} > a^{1/2}$ и $b^{1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > d^{1/2}$, то графики скоростей b_{12} и $b_{11} = a_0^{1/2}$ пересекаются в точках χ_1 и χ_2 , причем $\chi_1 < \tilde{\theta}_1 < \chi_2 < a_0^{-1/2}$. В этом случае фазовые скорости и углы отражения и преломления на участке $(0, a_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: на участках $(0, \chi_1)$ и $(\chi_2, a_0^{-1/2})$ – условиям (8.4), на участке (χ_1, χ_2) – условиям (8.7).

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей преломленных волн, определенных на участке $(0, a_0^{-1/2})$, удовлетворяют условиям: квазипродольных волн – условия (6.13) при $a_0^{-1/2} > \tilde{\theta}_1$, первым условиям (6.13) при $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1$; квазипоперечных ($k=2$) волн – условиям (6.16) при $a_0^{-1/2} < \theta_0$, условиям (6.16) и (6.17) при $a_0^{-1/2} > \theta_0$.

При условии (8.5) решения (3.9) на участке $(0, a^{-1/2})$ выражают вещественные волны. На участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ функция λ_1 принимает мнимые значения (8.6), решение задачи выражаются функциями (3.13) при значении (8.6).

Если при (8.5) $a^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2} > b^{1/2}$ и $b^{1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > d^{1/2}$, то графики скоростей b_{12} и $b_{11} = a_0^{1/2}$ пересекаются в точке χ_{11} , причем $\chi_{11} < \tilde{\theta}_1$. Согласно графиков (фиг. 8) и условия (3.13) фазовые скорости и углы отражения и преломления на участке $(0, a_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: на участке $(0, \chi_{11})$ – условиям (8.4), на участке $(\chi_{11}, a^{-1/2})$ – условиям (8.7), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условиям (8.8).

Если при (8.5) $b^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2}$ и $b_{21} = d_0^{1/2} > d^{1/2}$, то графики скоростей не пересекаются. Фазовые скорости и углы отражения и преломления на участке $(0, a_0^{-1/2})$ – удовлетворяют условиям: на участке $(0, a^{-1/2})$ условиям (8.7), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условиям (8.8).

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.13), квазипоперечных ($k=2$) волн на участке $(0, a_0^{-1/2})$ – условиям (6.16) и (6.17) при $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_2$.

При условии (8.11) как и при (8.5) решение задачи на участке $(0, a^{-1/2})$ выражается функциями (3.9), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – функциями (3.13) при значении (8.6).

Если при условии (8.11):

$$b^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2} > d^{1/2}, \quad d^{1/2} > b_{21} = a_0^{1/2} > b_{22}(\theta_1^0) \quad (9.1)$$

то графики скоростей b_{22} и $b_{21} = a_0^{1/2}$ на участке $(0, a_0^{-1/2})$ пересекаются только в точке μ_1 , причем $\mu_1 < a^{-1/2}$. Фазовые скорости и углы отражения и преломления на участке $(0, a_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: на участке $(0, \mu_1)$ – условиям (8.9), на участке $(\mu_1, a^{-1/2})$ – условиям (8.7), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условиям (8.8).

Если при (8.11):

$$b^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2} > d^{1/2}, \quad b_{22}(\theta_1^0) > b_{21} = d_0^{1/2} > b_{22}(\tilde{\theta}_2) \quad (9.2)$$

то графики скоростей b_{22} и $b_{21} = d_0^{1/2}$ пересекаются в точках μ_1 и μ_2 , причем $\mu_1 < \tilde{\theta}_2 < \mu_2$, $d_0^{-1/2} > \theta_1^0$. В этом случае фазовые скорости и углы отражения и преломления на участке $(0, a_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: при $\mu_1 < a^{-1/2} < \tilde{\theta}_2 < a_0^{-1/2} < \mu_2$ на участке $(0, \mu_1)$ – условиям (8.9), на участке $(\mu_1, a^{-1/2})$ – условиям (8.7), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условиям (8.8); при $a^{-1/2} < \mu_1 < \tilde{\theta}_2 < \mu_2 < a_0^{-1/2}$ на участке $(0, a^{-1/2})$ – условиям (8.9), на участках $(a^{-1/2}, \mu_1)$ и $(\mu_2, a_0^{-1/2})$ – условиям (8.10), на участке (μ_1, μ_2) – условиям (8.8).

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.13), квазипоперечных ($k = 2$) волн на участке $(0, a_0^{-1/2})$ – условиям (6.16) и (6.17) при $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_2$, условиям (6.16), (6.17) и (6.18) при $a_0^{-1/2} > \tilde{\theta}_2$.

При условии (8.14) решение (3.9) на участке $(0, a^{-1/2})$ интервала $(0, a_0^{-1/2})$ выражает вещественные волны. Преломленные волны представляют собой квазипродольные ($k = 1$) и квазипоперечные ($k = 2$) волны.

На участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ интервала $(0, a_0^{-1/2})$ решение задачи выражается функциями комплексного переменного (3.13) при значении λ_1 , определяемом (8.6). Преломленная квазипродольная ($k = 1$) волна – комплексная волна, остальные волны – вещественные.

При переходе на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 (фиг. 2) в решении (3.13) функции u_{12} и v_{12} становятся вещественными и выражают квазипоперечные ($k = 1$) преломленные волны.

На участках $(d^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ при $a_0^{-1/2} \leq \theta_1^0$ решение задачи выражается вещественными функциями

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(\tilde{\Omega}_1), \quad v_1 = v_1(\tilde{\Omega}_1) \\ u_{11} &= (R_1^*/R^*)u_1(\tilde{\Omega}_1^-), \quad v_{11} = -(R_1^*/R^*)v_1(\tilde{\Omega}_1^-) \\ u_{21} &= (\eta_1\eta_2R_2^*/R^*)u_1(\tilde{\Omega}_2^-), \quad v_{21} = (\theta^2R_2^*/R^*)/v_1(\tilde{\Omega}_2^-) \\ u_{12} &= (c\lambda_1\eta_1R_3^*/R^*)u_1(\Omega_1^-), \quad v_{12} = (p_1R_3^*/R^*)v_1(\Omega_1^-) \\ u_{22} &= (c\lambda_2\eta_1R_4^*/R^*)u_1(\Omega_2^-), \quad v_{22} = -(p_2R_4^*/R^*)v_1(\Omega_2^-) \end{aligned} \quad (9.3)$$

Величины R_i^* и R^* определяются выражениями (3.8) при замене λ_1 на $-\lambda_1$ и имеют вещественные значения. В этом случае функции U_{k2} и V_{k2} ($k = 1, 2$) выражают вещественные квазипоперечные преломленные волны, имеющие разные фазовые скорости и углы преломления.

При $a_0^{-1/2} > \theta_1^0$ на участках $(\theta_1^0, a_0^{-1/2})$ функции λ_1 и λ_2 принимают комплексные значения. Решение задачи выражается функциями комплексного переменного (3.13), которые на участке $(\theta_1^0, a_0^{-1/2})$ принимают вид

$$\begin{aligned} u_1 &= \text{Re}[u_1(\tilde{\Omega}_1)], \quad v_1 = \text{Re}[v_1(\tilde{\Omega}_1)] \\ u_{11} &= \text{Re}[(\bar{R}_1/\bar{R})u_1(\tilde{\Omega}_1^-)], \quad v_{11} = \text{Re}[-(\bar{R}_1/\bar{R})v_1(\tilde{\Omega}_1^-)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{21} &= \operatorname{Re}[(\eta_1 \eta_2 \bar{R}_2 / \bar{R}) u_1(\bar{\Omega}_2^-)], & v_{21} &= \operatorname{Re}[(\theta^2 R_2 / \bar{R}) v_1(\bar{\Omega}_2^-)] \\
 u_{12} &= \operatorname{Re}[c \eta_1 \bar{\lambda}_1 \bar{R}_3 / \bar{R} u_1(\bar{\Omega}_1^-)], & v_{12} &= \operatorname{Re}[(p_1 \bar{R}_3 / \bar{R}) v_1(\bar{\Omega}_1^-)] \\
 u_{22} &= \operatorname{Re}[c \eta_1 \bar{\lambda}_2 \bar{R}_4 / \bar{R} u_1(\bar{\Omega}_2^+)], & v_{22} &= \operatorname{Re}[-(p_2 \bar{R}_4 / \bar{R}) v_1(\bar{\Omega}_2^+)] \\
 \bar{\Omega}_k^\pm &= t - \theta x \pm \bar{\lambda}_k y
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Величины \bar{p}_k , \bar{R}_i и \bar{R} определяются выражениями (3.8) при

$$\lambda_k = (-1)^k \bar{\lambda}_k, \quad \bar{\lambda}_k = [A - (-1)^k i (B - A^2)^{1/2}]^{1/2} (2bd)^{-1/2} \tag{9.5}$$

Комплексные квазипоперечные волны U_{k2} , V_{k2} ($k = 1, 2$) – волны с комплексными фазовыми скоростями в направлении оси y .

Изучим распределение скоростей и направлений движения первичных и вторичных волн, определенных на участке $(0, a_0^{-1/2})$ при выполнении условия (8.14).

Если при (8.14) $d^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2} > b_{12}^*(\theta_1^0) = b_{22}(\theta_1^0)$ (фиг. 8), то график скорости $b_{11} = a_0^{1/2}$ пересекает графики скоростей b_{22} и b_{12}^* в точках μ_{11} и μ_{12} , причем $\mu_{11} < a^{-1/2}$, $d^{-1/2} < \mu_{12} < a_0^{-1/2}$ и $a_0^{-1/2} \leq \theta_1^0$. В этом случае на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, \mu_{11})$ – условия (8.13), на участке $(\mu_{11}, a^{-1/2})$ – условия (8.9), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условия (8.10), на участке $(d^{-1/2}, \mu_{12})$ – условия

$$b_{12}^* > b_1 = b_{11} > b_{22} > b_{21}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{22} > \alpha_{21} \tag{9.6}$$

на участке $(\mu_{12}, a_0^{-1/2})$ – условия

$$b_1 = b_{11} > b_{12}^* > b_{22} > b_{21}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{22} > \alpha_{21} \tag{9.7}$$

Фазовые скорости и углы преломления квазипоперечных ($k = 1$) волн, определенных на верхнем берегу разреза $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ плоскости θ_1 , имеют значения $b_{12}^* = b_{12}$ и $\alpha_{12}^* = \pi - \alpha_{12} > \pi/2$, где b_{12} и α_{12} значения этих величин для квазипоперечных ($k = 1$) волн, определенных на нижнем берегу этого разреза, для которых принцип излучения не выполняется, но выполняется условие $\sin \alpha_{12}^* = \sin \alpha_{12}$.

Если при (8.14) $b_{22}(\theta_1^0) > b_{11} = a_0^{1/2} > \min b_{22} = b_{22}(\tilde{\theta}_2)$, то график скорости $b_{11} = a_0^{1/2}$ пересекает график скорости b_{22} в точках μ_1 и μ_2 , причем $\mu_1 < \tilde{\theta}_2 < \mu_2 < \theta_1^0$, $a_0^{-1/2} > \theta_1^0$. В этом случае (фиг. 8) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия: при $\mu_1 < a^{-1/2}$, $\mu_2 > d^{-1/2}$ на участке $(0, \mu_1)$ – условия (8.13), на участке $(\mu_1, a^{-1/2})$ – условия (8.9), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условия (8.10), на участке $(d^{-1/2}, \mu_2)$ – условия (9.6), на участке (μ_2, θ_1^0) – условия

$$b_{12}^* > b_{22} > b_1 = b_{11} > b_{21}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_{22} > \alpha_1 = \alpha_{11} > \alpha_{21} \tag{9.8}$$

на участке $(\theta_1^0, a_0^{-1/2})$ – условия (8.16); при $\mu_1 > a^{-1/2}$, $\mu_2 < d^{-1/2}$ на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (8.13), на участке $(a^{-1/2}, \mu_1)$ – условия (8.12), на участке (μ_1, μ_2) – условия (8.10),

на участке $(\mu_2, d^{-1/2})$ – условия (8.12), на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ – условия (9.8), на участке $(\theta_1^0, a_0^{-1/2})$ – условия (8.16).

Если при (8.14) $b_{11} = a_0^{1/2} < \min b_{22} = b_{22}(\tilde{\theta}_2)$, то на участке $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (8.13), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условия (8.12), на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ – условия (9.8) на участке $(\theta_1^0, a_0^{-1/2})$ – условия (8.16).

При условиях (8.14) в решениях (3.9) и (3.13) направления векторов фазовых и лучевых скоростей преломленных квазипродольных ($k = 1$) волн на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.13); квазипоперечных ($k = 2$) волн на участке $(0, \tilde{\theta}_2)$ – условиям (6.16) и (6.17), на участках $(\tilde{\theta}_2, a_0^{-1/2})$ при $a_0^{-1/2} \leq \theta_1^0$ и $(\tilde{\theta}_2, \theta_1^0)$ при $a_0^{-1/2} > \theta_1^0$ – условиям (7.6); квазипоперечных ($k = 1$) волн на участках $(d^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ при $a_0^{-1/2} < \theta_1^0$ и $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ при $a_0^{-1/2} > \theta_1^0$ – условиям (7.8).

Из анализа решений (3.3) и (3.13) для случая $N_2 < 0, N_3 > 0$ (фиг. 7) следует, что в этом случае при $N_4 < 0, N_5 < 0$ решения и условия, характеризующие распределение фазовых скоростей и углов отражения и преломления вторичных волн в зависимости от углов падения, имеют такой же вид как и в случае $N_2 < 0, N_3 < 0$, различие имеется только в распределении направлений векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных ($k = 2$) волн на участке $(0, \tilde{\theta}_2)$. Если же в этом случае $N_4 < 0, N_5 > 0$, то расхождение имеется и в распределении фазовых скоростей и углов отражения и преломления вторичных волн.

10. Анализ решений (4.5) и (4.8) при $N_2 > 0$. Изучим решения (4.5) и (4.8) при $N_2 > 0$, когда $N_1 > 0, N_4 > 0$ и $N_5 > 0$. Графики фазовых скоростей для преломленных волн имеют вид, изображенный на фиг. 3, в.

При условиях (8.1) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ интервала $(0, d_0^{-1/2})$ решения (4.5) выражают вещественные волны. На участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ интервала $(0, d_0^{-1/2})$ функция η_1 принимает мнимое значение. Решение задачи выражается функциями комплексного переменного (4.8) при

$$\eta_1 = -i(\theta^2 - 1/a_0)^{1/2} \quad (10.1)$$

В этом случае отраженная продольная волна – комплексная волна, остальные волны вещественные.

При (8.1) скорости и углы входа и выхода в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям:

на участке $(0, a_0^{-1/2})$:

$$b_{11} > b_2 = b_{21} > b_{12} > b_{22}, \quad \alpha_{11} > \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{12} > \alpha_{22} \quad (10.2)$$

на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$:

$$b_2 = b_{21} > b_{12} > b_{22}, \quad \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{12} > \alpha_{22} \quad (10.3)$$

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей преломленных волн на участке $(0, d_0^{-1/2})$ при $d_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1$ удовлетворяют первым условиям (6.9) и (6.10). Если $\tilde{\theta}_1 < d_0^{-1/2}$, направления этих векторов квазипродольных волн удовлетворяют условиям (6.9).

При условии (8.3) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ решения (4.5) выражают вещественные волны.

На участках $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ и $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ интервала $(0, d_0^{-1/2})$ функции η_1 и λ_1 имеют мнимые значения, определяемые выражениями (10.1) и (8.6). Решения задачи выражаются функциями (4.8) при значении (10.1) на участке $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$, при значениях (10.1) и (8.6) на участке $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$.

Проводя рассуждения аналогичные выполненным в п. 8, установим распределение скоростей и углов входа и выхода при условии (8.3).

Если при (8.3) $a^{1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > b^{1/2}$ (фиг. 3, в), графики b_{21} и b_{12} пересекаются в точке χ_1 , причем $a_0^{-1/2} < \chi_1 < a^{-1/2}$, на участке $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, a_0^{-1/2})$ – условия (10.2), на участке $(a_0^{-1/2}, \chi_1)$ – условия (10.3), на участке $(\chi_1, a^{-1/2})$:

$$b_{12} > b_2 = b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_{12} > \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (10.4)$$

на участке $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$:

$$b_2 = b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (10.5)$$

Если при (8.3) $b^{1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > \min b_{12}$ (фиг. 3, в), то графики b_{12} и b_{21} пересекаются в точках χ_1 и χ_2 , причем $\chi_1 < \tilde{\theta}_1 < \chi_2 < a^{-1/2}$. На участке $(0, d_0^{-1/2})$ при $\chi_2 < a_0^{-1/2}$ выполняются условия: на участке $(0, \chi_1)$:

$$b_{11} > b_{12} > b_2 = b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_{11} > \alpha_{12} > \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (10.6)$$

на участке (χ_1, χ_2) – условия (10.3), на участке $(\chi_2, a_0^{-1/2})$ – условия (10.6), на участке $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$ – условия (10.4), на участке $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условия (10.5).

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяет условиям (6.9), квазипоперечных волн на участке $(0, d_0^{-1/2})$ – условиям (6.10) при $d_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_2$, первым условием (6.10) при $d_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_2$.

При условии (8.5) на участке $(0, a^{-1/2})$ решение (4.5) выражает вещественные волны.

На участках $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ и $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ интервала $(0, d_0^{-1/2})$ функции λ_1 и η_1 имеют мнимые значения, определяемые (8.6) и (10.1). Решения задачи выражаются функциями (4.8) при значении (8.6) на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$, при значениях (8.6) и (10.1) на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$.

Если при (8.5) $a^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2} > b^{1/2}$ и $\min b_{12} > b_{21} = d_0^{1/2} > \max b_{22}$ (фиг. 3, в), то графики b_{11} и b_{22} пересекаются в точке χ_{11} , причем $\tilde{\theta}_1 < \chi_{11} < a^{-1/2}$. На участке $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, \chi_{11})$ – условия (10.6), на участке $(\chi_{11}, a^{-1/2})$:

$$b_{12} > b_{11} > b_2 = b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_{12} > \alpha_{11} > \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (10.7)$$

на участке $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$:

$$b_{11} > b_2 = b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_{11} > \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (10.8)$$

на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условия (10.5).

Если при (8.5) $b^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2} > \min b_{12}$ и $\min b_{12} > b_{21} = d_0^{1/2} > \max b_{22}$ (фиг. 3, в), то графики b_{11} и b_{12} пересекаются в точках χ_{11} и χ_{12} , причем $\chi_{11} < \tilde{\theta}_1 < \chi_{12}$. На участке $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участках $(0, \chi_{11})$ и $(\chi_{12}, a^{-1/2})$ – условия (10.7), на участке (χ_{11}, χ_{12}) – условия (10.6), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условия (10.8), на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условия (10.5).

Если при (8.5) $\min b_{12} > b_{11} = a_0^{1/2} > \max b_{22}$ и $\max b_{22} > b_{21} = d_0^{1/2} > \min b_{22} = d^{1/2}$ (фиг. 3, в), то графики b_{21} и b_{22} пересекаются в точках μ_1 и μ_2 , причем $\mu_1 < \tilde{\theta}_2 < \mu_2 < d_0^{-1/2}$. Если $\mu_1 < a^{-1/2}$, на участке $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, \mu_1)$ – условия (10.7), на участке $(\mu_1, a^{-1/2})$:

$$b_{12} > b_{11} > b_{22} > b_2 = b_{21}, \quad \alpha_{12} > \alpha_{11} > \alpha_{22} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (10.9)$$

на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$:

$$b_{11} > b_{22} > b_2 = b_{21}, \quad \alpha_{11} > \alpha_{22} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (10.10)$$

на участке $(a_0^{-1/2}, \mu_2)$:

$$b_{22} > b_2 = b_{21}, \quad \alpha_{22} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (10.11)$$

на участке $(\mu_2, d_0^{-1/2})$ – условиям (10.5).

При условии (8.5) направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных и квазипоперечных преломленных волн на участках $(0, a^{-1/2})$ и $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.9) и (6.10), так как $d_0^{-1/2} > \tilde{\theta}_2$.

При условии (8.11) на участке $(0, a^{-1/2})$ решения (4.5) выражают вещественные волны.

На участках $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$, $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ и $(d^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ функции λ_1 , η_1 и λ_2 имеют мнимые значения, определяемые (8.6), (10.1) и (8.15).

Решения задачи выражаются функциями (4.8) при значении (8.6) на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$, при значениях (8.6) и (10.1) на участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$, при значениях (8.6), (10.1) и (8.15) на участке $(d^{-1/2}, d_0^{-1/2})$.

Если при (8.11) $\min b_{12} > b_{11} = a_0^{1/2} > \max b_{22}$, то графики фазовых скоростей не пересекаются. На участке $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (8.9), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условия (10.10), на участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условия (10.11), на участке $(d^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условия $b_2 = b_{21} = d_0^{1/2}$, $\alpha_2 = \alpha_{21}$.

Если при (8.11) $\max b_{22} > b_{11} = a_0^{1/2} > \min b_{22} = d^{1/2}$, то графики $b_{11} = a_0^{1/2}$ и b_{22} пересекаются в точках μ_{11} и μ_{12} , причем $\mu_{11} < \tilde{\theta}_2 < \mu_{12} < a_0^{-1/2}$. Если $\mu_{11} < a^{-1/2}$, на участке $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, \mu_{11})$ – условия (10.9), на участке $(\mu_{11}, a^{-1/2})$:

$$b_{12} > b_{22} > b_{11} > b_2 = b_{21}, \quad \alpha_{12} > \alpha_{22} > \alpha_{11} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (10.12)$$

на участке $(a^{-1/2}, \mu_{12})$:

$$b_{22} > b_{11} > b_2 = b_{21}, \quad \alpha_{22} > \alpha_{11} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (10.13)$$

на участке $(\mu_{12}, a_0^{-1/2})$ – условия (10.10), на участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условия (10.11), на участке $(d^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условия $b_2 = b_{21} = d_0^{1/2}$, $\alpha_2 = \alpha_{21}$.

При условии (8.14) на участке $(0, a^{-1/2})$ решения (4.5) выражают вещественные волны.

На участках интервала $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ решения задачи выражаются функциями комплексного переменного (4.8) при значении (8.6) на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$, при значениях (8.6) и (8.15) на участке $(d^{-1/2}, a_0^{-1/2})$, при значениях (8.6), (8.15) и (10.1) на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$.

При условии (8.14) графики скоростей не пересекаются. На участке $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условиям (10.12), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условие (10.13), на участке $(d^{-1/2}, a_0^{-1/2})$:

$$b_{11} > b_2 = b_{21} = d_0^{1/2}, \quad \alpha_{11} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (10.14)$$

на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – $b_2 = b_{21} = d_0^{1/2}$, $\alpha_2 = \alpha_{21}$.

При (8.11) и (8.14) направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных и квазипоперечных преломленных волн на участках $(0, a^{-1/2})$ и $(0, d^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.9) и (6.10).

Из результатов анализа решений (4.5) и (4.8) для $N_2 > 0$, когда при $N_1 < 0$, $N_4 < 0$, $N_5 < 0$ выполняются условия $N_3 > 0$ (фиг. 4) или $N_3 < 0$ (фиг. 5), следует, что решения имеют такой же вид как и в случае $N_1 > 0$, $N_4 > 0$, $N_5 > 0$ (фиг. 3); условия для фазовых скоростей и углов отражения и преломления вторичных волн имеют другой вид. В рамках данной статьи на этих вопросах останавливаться не имеется возможности.

11. Анализ решений (4.5) и (4.8) при $N_2 < 0$. При $N_2 < 0$ в решениях (4.5) и (4.8) преломленные волны определены на римановой поверхности, изображенной на фиг. 2. Рассмотрим случай, когда $N_2 < 0$, $N_3 < 0$, графики скоростей имеют вид, изображенный на фиг. 6, в и 8.

При условии (8.1) на участке $(0, a_0^{-1/2})$ интервала $(0, d_0^{-1/2})$ решения задачи выражаются вещественными функциями (4.5).

На участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ интервала $(0, d_0^{-1/2})$ решение задачи выражается комплексными функциями (4.8) при значении η_1 , определяемом (10.1).

Если при условии (8.1) $b_{21} = d_0^{1/2} > \max b_{12}$, то согласно графиков скоростей (фиг. 8) и закона синусов (4.7) скорости и углы входа и выхода на участке $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: на участке $(0, a_0^{-1/2})$ – условиям (10.2), на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условиям (10.3).

Если при (8.1) $b_1 = a_0^{1/2} > \max b_{12}$ и $\max b_{12} > b_{21} = d_0^{1/2} > a^{1/2}$, то графики скоростей b_{21} и b_{12} пересекаются в точках χ_1 и χ_2 , причем $\chi_1 < \tilde{\theta}_1 < \chi_2 < d_0^{-1/2}$ и $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1$, так как $b_{11} = a_0^{1/2} > \max b_{12}$. Скорости и углы входа и выхода волн на участке $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: при $\chi_1 < a_0^{-1/2}$ на участке $(0, \chi_1)$ – условиям (8.2), на участке $(\chi_1, a_0^{-1/2})$ – условиям (10.6), на участке $(a_0^{-1/2}, \chi_2)$ – условиям (10.4), на участке $(\chi_2, d_0^{-1/2})$ – услови-

ям (10.3); при $a_0^{-1/2} < \chi_1$ на участке $(0, a_0^{-1/2})$ – условиям (8.2), на участке $(a_0^{-1/2}, \chi_1)$ – условиям (10.3), на участке (χ_1, χ_2) – условиям (10.3), на участке $(\chi_2, d_0^{-1/2})$ – условиям (10.3).

При условиях (8.1) на участке $(0, d_0^{-1/2})$ направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн при $b_{21} = d_0^{1/2} > \max b_{12}$, так как $d_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1$, удовлетворяют первым условиям (6.13), при $\max b_{12} > b_{21} = d_0^{1/2} > a^{1/2}$, так как $\tilde{\theta}_1 < d_0^{-1/2} < a^{-1/2}$, – условиям (6.13). Для квазипоперечных ($k=2$) волн в этих случаях при $d_0^{-1/2} < \theta_0$ выполняются условия (6.16), при $d_0^{-1/2} > \theta_0$ – условия (6.16) и (6.17).

При условиях (8.3) в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ решения задачи выражаются вещественными функциями (4.5) на участке $(0, a_0^{-1/2})$, функциями комплексного переменного (4.8) на участках $(a_0^{-1/2}, a^{1/2})$ и $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ соответственно при значениях η_1 и η_1, λ_1 , определяемых выражениями (10.1) и (8.6).

Если при (8.3) $b_{11} = a_0^{1/2} > \max b_{12}$ и $a^{1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > b^{1/2}$ (фиг. 8), то графики скоростей $b_{21} = d_0^{1/2}$ и b_{12} пересекаются в точке χ_1 , причем $\chi_1 < \tilde{\theta}_1$ и $a_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_1$. Скорости и углы входа и выхода в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: при $a_0^{-1/2} < \chi_1$ на участке $(0, a_0^{-1/2})$ – условиям (10.2), на участке $(a_0^{-1/2}, \chi_1)$ – условиям (10.3), на участке $(\chi_1, a^{-1/2})$ – условиям (10.4), на участке $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условиям (10.5); при $a_0^{-1/2} > \chi_1$ на участке $(0, \chi_1)$ – условиям (8.2), на участке $(\chi_1, a_0^{-1/2})$ – условиям (10.6), на участке $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$ – условиям (10.4), на участке $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условиям (10.5).

Если при (8.3) $\max b_{12} > b_{11} = a_0^{1/2} > a^{1/2}$ и $b^{1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > \max b_{22} = d^{1/2}$, то графики скоростей $b_{11} = a_0^{1/2}$ и b_{12} пересекаются в точках χ_1 и χ_2 , причем $\chi_1 < \tilde{\theta}_1 < \chi_2 < a_0^{-1/2}$. В этом случае в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, \chi_1)$ – условия (10.6); на участке (χ_1, χ_2) – условия (10.7), на участке $(\chi_2, a_0^{-1/2})$ – условия (10.6), на участке $(a_0^{-1/2}, a^{-1/2})$ – условия (10.4), на участке $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условия (10.5).

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.13); квазипоперечных ($k=2$) волн на участке $(0, d_0^{-1/2})$ при $d_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_2$ – условиям (6.16) и (6.17), при $d_0^{-1/2} < \tilde{\theta}_2$ – условиям (6.16), (6.17) и (7.6).

При условии (8.5) в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ решение задачи выражается вещественными функциями (4.5) на участке $(0, a^{-1/2})$, функциями комплексного переменного (4.8) на участках $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ и $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ соответственно при значениях λ_1 и λ_1, η_1 , определяемых (8.6) и (10.1).

Если при (8.5) $a^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2} > b^{1/2}$ и $b^{1/2} > b_{21} = d_0^{1/2} > \max b_{22} = d^{1/2}$ (фиг. 8), то графики скоростей $b_{11} = a_0^{1/2}$ и b_{12} пересекаются в точке χ_{11} , причем $\chi_{11} < \hat{\theta}_1$. Скорости и углы входа и выхода в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: на участке $(0, \chi_{11})$ –

условиям (10.6), на участке $(\chi_{11}, a^{-1/2})$ – условиям (10.7), на участке $(a^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условиям (10.2), на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условиям (10.5).

Если при (8.5) $b^{1/2} > b_{11} = a_0^{1/2}$ и $b_{21} = d_0^{1/2} < d^{1/2}$ (фиг. 8), то графики скоростей не пересекаются. В этом случае в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (10.7), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условия (10.8), на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условия (10.5).

Направления векторов фазовых и лучевых скоростей квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ удовлетворяют условиям (6.13), квазипоперечных ($k = 2$) волн на участке $(0, d_0^{-1/2})$ при $d_0^{-1/2} > \hat{\theta}_2$ – условиям (6.16), (6.17) и (7.6).

При условии (8.11) в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ решение задачи выражается вещественными функциями (4.5) на участке $(0, a^{-1/2})$ функциями комплексного переменного (4.8) на участках $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ и $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ соответственно при значениях λ_1 и λ_1, η_1 , определяемых (8.6) и (10.1). При переходе на участки $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 (фиг. 2) функция λ_1 принимает вещественное значение со знаком минус, функция η_1 сохраняет мнимое значение (10.1).

На участке $(d^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ при $d_0^{-1/2} \leq \theta_1^0$ решение задачи выражается функциями комплексного переменного

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \text{Re}[u_{21}(\tilde{\Omega}_1)], & v_2 &= \text{Re}[v_{21}(\tilde{\Omega}_2)] \\
 u_{11} &= \text{Re}[(\theta^2 R_{21}^*/R^*)u_{21}(\tilde{\Omega}_1^*)], & v_{11} &= \text{Re}[-i\eta_1^* \eta_2 R_{21}^*/R^* v_{21}(\tilde{\Omega}_1^*)] \\
 u_{21} &= \text{Re}[(R_{22}^*/R^*)u_{21}(\tilde{\Omega}_2)], & v_{21} &= \text{Re}[-(R_{22}^*/R^*)v_{21}(\tilde{\Omega}_2)] \\
 u_{12} &= \text{Re}[(R_{23}^*/R^*)u_{21}(\Omega_1)], & v_{12} &= \text{Re}[-(c\lambda_1 \eta_2 R_{23}^*/r_1 R^*)v_{21}(\Omega_2)] \\
 u_{22} &= \text{Re}[(R_{24}^*/R^*)u_{21}(\Omega_2)], & v_{22} &= \text{Re}[(c\lambda_2 \eta_2 R_{24}^*/r_2 R^*)v_{21}(\Omega_2)] \\
 \tilde{\Omega}_1^* &= t - \theta x + i\eta_1^* y, & \eta_1 &= -i\eta_1^*, & \eta_1^* &= (\theta^2 - 1/a_0)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

Значения R_{2i}^* и R^* определяются выражениями (4.6) при замене λ_1 и $-\lambda_1$, при $\eta_1 = -i\eta_1^*$. В решении (11.1) продольная отраженная волна – комплексная, остальные волны – вещественные.

При $d_0^{-1/2} > \theta_1^0$ на участке $(\theta_1^0, d_0^{-1/2})$ функции λ_1 и λ_2 принимают комплексные значения, определяемые выражениями (9.5). Решения задачи на участке $(\theta_1^0, d_0^{-1/2})$ выражается функциями (11.1) при значениях (9.5). На участке $(\theta_1^0, d_0^{-1/2})$ из вторичных волн поперечная отражения – вещественная, остальные волны – комплексные.

Если при (8.11) $d_0^{-1/2} < \theta_1^0$ (фиг. 8), то график скорости $b_{21} = d_0^{1/2}$ пересекает графики скоростей b_{22} и b_{12}^* в точках μ и χ , причем $\mu < \tilde{\theta}_2$ и $d^{-1/2} < \chi < d_0^{-1/2}$. Скорости и углы

входа и выхода на участке $(0, d_0^{-1/2})$ при $\mu < a^{-1/2}$ удовлетворяют условиям: на участке $(0, \mu)$ – условиям (10.9), на участке $(\mu, a^{-1/2})$ – условиям (10.7), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условиям (10.8), на участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условиям (10.5), на участке $(d^{-1/2}, \chi)$:

$$b_{12}^* > b_2 = b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (11.2)$$

на участке $(\chi, d_0^{-1/2})$:

$$b_2 = b_{21} > b_{12}^* > b_{22}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (11.3)$$

где $\alpha_{12}^* = \pi - \alpha_{12}$ ($\alpha_{12} < \pi/2$), закон синусов выполняется.

Если при (8.11) $d_0^{-1/2} > \theta_1^0$ (фиг. 8), то графики скоростей $b_{21} = d_0^{1/2}$ и b_{22} пересекаются в точках μ_1 и μ_2 , причем $\mu_1 < \tilde{\theta}_2 < \mu_2 < \theta_1^0$. При $\mu_1 < a^{-1/2}$, $\mu_2 > d^{-1/2}$ скорости и углы входа и выхода на участке $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: на участке $(0, \mu_1)$ – условиям (10.9), на участке $(\mu_1, a^{-1/2})$ – условиям (10.7), на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ – условиям (10.8), на участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условиям (10.5), на участке $(d^{-1/2}, \mu_2)$ – условиям (11.2), на участке (μ_2, θ_1^0) :

$$b_{12}^* > b_{22} > b_2 = b_{21}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_{22} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (11.4)$$

При условии (8.14) в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ решение задачи на участке $(0, a^{-1/2})$ выражаются вещественными функциями (4.5), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – функциями комплексного переменного (4.8) при значениях λ_1 , определяемых (8.6). При переходе на участки $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ верхних берегов разреза плоскостей θ_1 и θ_2 (фиг. 2) функции λ_1 принимает вещественное значение со знаком минус, функция λ_2 сохраняет свое вещественное значение.

При $a_0^{-1/2} < \theta_1^0$, $d_0^{-1/2} > \theta_1^0$ решение задачи на участке $(d^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ выражается вещественными функциями (4.5) при замене λ_1 на $-\lambda_1$, на участке $(a_0^{-1/2}, \theta_1^0)$ – функциями комплексного переменного (11.1), на участке $(\theta_1^0, d_0^{-1/2})$ – функциями (11.1) при значениях λ_k ($k = 1, 2$), определяемых (9.5).

При $a_0^{-1/2} > \theta_1^0$ решение задачи на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ выражаются вещественными функциями (4.5) при замене λ_1 и на $-\lambda_1$, на участке $(\theta_1^0, a_0^{-1/2})$ – функциями комплексного переменного (4.8) при замене λ_1 на $-\lambda_1$ и при значениях λ_k ($k = 1, 2$), определяемых (9.5), на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – функциями (11.1) при значениях λ_k ($k = 1, 2$), определяемых (9.5).

Если при (8.14) $a_0^{-1/2} < \theta_1^0 < d_0^{-1/2}$, то графики скоростей $b_{11} = a_0^{1/2}$ и b_{12}^* пересекаются в точке χ ($d^{-1/2} < \chi < a_0^{-1/2}$), графики скоростей $b_{21} = d_0^{1/2}$ и b_{22} при $\min b_{22} < b_{21} = d_0^{1/2}$

пересекаются в точках μ_1 и μ_2 ($\mu_1 < \tilde{\theta}_2 < \mu_2 < \theta_1^0$), при $\min b_{22} > b_{21} = d_0^{1/2}$ – не пересекаются (фиг. 8).

При $\min b_{22} < b_{21} = d_0^{1/2}$, если $\mu_1 < a^{-1/2}$ и $\chi < \mu_2 < a_0^{-1/2}$, то скорости и углы входа и выхода в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: на участке $(0, \mu_1)$ – условиям (10.9), на участке $(\mu_1, a^{-1/2})$ – условиям (10.7), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условиям (10.8), на участке $(d^{-1/2}, \chi)$:

$$b_{12}^* > b_{11} > b_2 = b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_{11} > \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (11.5)$$

на участке (χ, μ_2) :

$$b_{11} > b_{12}^* > b_2 = b_{21} > b_{22}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_{11} > \alpha_2 = \alpha_{21} > \alpha_{22} \quad (11.6)$$

на участке $(\mu_2, a_0^{-1/2})$:

$$b_{11} > b_{12}^* > b_{22} > b_2 = b_{21}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_{11} > \alpha_{22} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (11.7)$$

на участке $(a_0^{-1/2}, \theta_1^0)$ – условиям (11.4), на участке $(\theta_1^0, d_0^{-1/2})$ – условиям (10.12).

При $\min b_{22} > b_{21} = d_0^{1/2}$ в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (10.9), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условия (10.10), на участке $(d^{-1/2}, \chi)$:

$$b_{12}^* > b_{11} > b_{22} > b_2 = b_{21}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_{11} > \alpha_{22} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (11.8)$$

на участке $(\chi, a_0^{-1/2})$ – условия (11.7), на участке $(a_0^{-1/2}, \theta_1^0)$ – условия (11.4), на участке $(\theta_1^0, d_0^{-1/2})$ – условия (10.12).

Если при (8.14) $\theta_1^0 < a_0^{-1/2} < d_0^{-1/2}$, то графики скоростей $b_{11} = a_0^{1/2}$ и b_{22} при $\min b_{22} < b_{11} = a_0^{1/2}$ пересекаются в точках μ_{11} и μ_{12} ($\mu_{11} < \tilde{\theta}_2 < \mu_{12} < \theta_1^0$), при $\min b_{22} > b_{11} = a_0^{1/2}$ – не пересекаются, $b_{21} = d_0^{1/2} < \min b_{22}$.

При $\min b_{22} < b_{11} = a_0^{1/2}$ и $b_{21} = d_0^{1/2} < \min b_{22}$, если $\mu_{11} < a^{-1/2}$, $\mu_{12} > d^{-1/2}$, то скорости и углы входа и выхода в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: на участке $(0, \mu_{11})$ – условиям (10.13), на участке $(\mu_{11}, a^{-1/2})$ – условиям (10.9), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условиям (10.10), на участке $(d^{-1/2}, \mu_{12})$ – условиям (11.8), на участке (μ_{12}, θ_1^0) :

$$b_{12}^* > b_{22} > b_{11} > b_2 = b_{21}, \quad \alpha_{12}^* > \alpha_{22} > \alpha_{11} > \alpha_2 = \alpha_{21} \quad (11.9)$$

на участке $(\theta_1^0, a_0^{-1/2})$ – условиям (10.15) на участке $(\theta_1^0, d_0^{-1/2})$ – условиям (10.12).

При $\min b_{22} > b_{11} = a_0^{1/2}$ в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, a^{-1/2})$ – условия (10.13), на участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условия (10.14), на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ – условия (11.9), на участке $(\theta_1^0, a_0^{-1/2})$ – условия (10.15), на участке $(a_0^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ – условия (10.12).

При (8.11) и (8.14) в решениях (4.5) и (4.8) направления векторов фазовых и лучевых скоростей преломленных волн в интервале $(0, d_0^{-1/2})$ удовлетворяют условиям: квазипродольных волн на участке $(0, a^{-1/2})$ – условиям (6.13), квазипоперечных ($k = 2$) волн на участках $(0, d_0^{-1/2})$ при $d_0^{-1/2} < \theta_1^0$ и $(0, \theta_1^0)$ при $d_0^{-1/2} > \theta_1^0$ – условиям (6.16), (6.17) и (7.6), квазипоперечных ($k = 1$) волн на участках $(d^{-1/2}, d_0^{-1/2})$ при $d_0^{-1/2} < \theta_1^0$ и $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ при $d_0^{-1/2} > \theta_1^0$ условиям (7.8).

Из анализа решений (4.5) и (4.8) при $N_2 < 0, N_3 > 0$ (фиг. 7) следует, что в этом случае при $N_4 < 0, N_5 < 0$ решения и условия, характеризующие распределение фазовых скоростей и углов отражения и преломления вторичных волн в зависимости от углов падения имеют такой же вид как и в случае $N_2 < 0, N_3 < 0$, различие имеется только в распределении направлений векторов фазовых и лучевых скоростей квазипоперечных ($k = 2$) волн на участке $(0, \tilde{\theta}_2)$. Если же в этом случае $N_4 < 0, N_5 > 0$, то расхождение имеется и в распределении фазовых скоростей и углов отражения и преломления вторичных волн.

12. Заключение. Задачи отражения и преломления продольных и поперечных плоских волн на границе изотропных и анизотропных сред с четырьмя упругими постоянными получили полное решение, полученные решения согласуются с принципом излучения. Выражение решений через обратные кажущиеся скорости в направлениях осей упругой симметрии анизотропных сред и однозначное определение на римановых поверхностях, вид которых зависит от упругих постоянных (фиг. 1, 2), позволили провести детальное аналитическое исследование кинематических и динамических закономерностей рассматриваемых волновых процессов для всех реальных сред рассматриваемого класса анизотропии, упругие постоянные которых удовлетворяют необходимым и достаточным условиям положительной определенности формы упругой энергии, при различных соотношениях упругих постоянных контактирующих сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свекло В.А. Упругие колебания анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. Вып. 17. С. 28–71.
2. Свекло В.А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 885–896.
3. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
4. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.
5. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
6. Петрашень Г.И., Капитан Б.М. Элементарная теория распространения объемных волн в анизотропных упругих средах // Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1984. С. 15–107.
7. Осипов И.О. К отражению и преломлению плоских продольных волн на границе жидкости и твердого анизотропного полупространства // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. № 4. С. 88–96.
8. Осипов И.О. Распространение плоских волн в анизотропной среде, контактирующей с жидкостью // Изв. АН СССР. МТГ. 1989. № 6. С. 144–154.
9. Осипов И.О. Отражение и преломление плоских продольных волн на границе жидкости и аномальной анизотропной среды // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 210–221.
10. Осипов И.О. К распространению плоских волн в анизотропной среде, контактирующей с жидкостью // Изв. РАН: МТГ. 1997. № 3. С. 85–99.
11. Musgrave M.J. Reflection and refraction of plane elastic waves at a plane boundary between anisotropic media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1960. V. 3. № 4. P. 406–418.

12. *Keith Colum M., Crampin S.* Seismic body waves in anisotropic media reflection and refraction at a plane interface // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1977. V. 49. № 1. P. 181–208.
13. *Осипов И.О.* К методу комплексных решений динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред // *Изв. РАН МТТ.* 1999. № 4. С. 102–112.
14. *Осипов И.О.* Обобщение метода функционально-инвариантных решений для динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред // *ПММ.* 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 1004–1019.
15. *Осипов И.О.* К комплексным решениям в потенциалах динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред // *Изв. РАН. МТТ.* 2002. № 3. С. 78–89.
16. *Осипов И.О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // *ПММ.* 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
17. *Осипов И.О.* Движение сейсмической энергии в анизотропных средах // *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.* 1962. № 2. С. 181–185.
18. *Осипов И.О.* Характер изменения скоростей распространения упругих волн в анизотропных средах // *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.* 1962. № 1. С. 3–10.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
21.01.2003