

УДК 539.3

© 2004 г. А.Г. ГОРШКОВ, Д.В. ТАРЛАКОВСКИЙ, А.М. ШУКУРОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН СДВИГА ОТ СФЕРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрена нестационарная осесимметричная задача о распространении волн сдвига от сферического включения (полости или абсолютно жесткого шара) в упругом полупространстве. Использована разработанная ранее [1] методика решения задач для аналогичных двусвязных областей. Построена разрешающая бесконечная система линейных алгебраических уравнений в пространстве преобразований Лапласа по времени, которая позволяет находить точные выражения для оригиналов.

Аналогичная стационарная задача рассматривалась в [2].

1. Постановка задачи. В упругом однородном изотропном полупространстве $z \geq 0$ на глубине h от плоскости $z = 0$ на оси Oz (точка O лежит на границе полупространства) расположен центр O_1 сферического включения (полости или абсолютно жесткого шара) радиуса R_1 ($R_1 < h$). Будем рассматривать две системы координат: сферическую r, θ, ϑ с центром в точке O_1 и цилиндрическую R, ϑ, z с началом в точке O ($-\pi \leq \vartheta \leq \pi$), угол θ отсчитывается от положительного направления оси z ($0 \leq \theta \leq \pi$).

Введем безразмерные параметры (при применении одинаковых обозначений безразмерные величины идентифицируются штрихами, которые далее везде опускаются):

$$\begin{aligned} r' &= \frac{r}{R_1}, & R' &= \frac{R}{R_1}, & z' &= \frac{z}{R_1}, & \tau &= \frac{c_1 t}{R_1}, & u'_\alpha &= \frac{u_\alpha}{R_1}, & \sigma'_{\alpha\beta} &= \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\lambda + 2\mu} \\ \varphi' &= \frac{\varphi}{R_1^2}, & \psi' &= \frac{\psi}{R_1^2}, & c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, & \eta &= \frac{c_1}{c_2}, & c_2^2 &= \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u_α и $\sigma_{\alpha\beta}$ – физические компоненты вектора перемещения и тензора напряжений в сферической ($\{\alpha, \beta\} = \{r, \theta, \vartheta\}$) или цилиндрической ($\{\alpha, \beta\} = \{R, \vartheta, z\}$) системе координат; φ и ψ – скалярный и векторный потенциалы перемещений; t – время; λ, μ и ρ – упругие постоянные и плотность среды; c_1 и c_2 – скорости распространения волн растяжения-сжатия и формоизменения (сдвига).

Положим, что на границе полости имеют место следующие условия:

$$u_r|_{r=1} = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_{rr}|_{r=1} = 0 \quad (1.2)$$

$$u_\theta|_{r=1} = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_{r\theta}|_{r=1} = 0 \quad (1.3)$$

а также

$$w|_{r=1} = V(\tau, \theta), \quad w = u_\vartheta \quad (1.4)$$

или

$$\sigma_{r\vartheta}|_{r=1} = q(\tau, \theta) \quad (1.5)$$

Отметим, что первые равенства в (1.2) и (1.3) в совокупности с (1.4) физически соответствуют повороту абсолютно жесткого шара вокруг оси z по закону $V(\tau, \theta)$ при полном сцеплении с окружающей средой.

Используя связь вектора перемещения со скалярным и векторным потенциалами, а также закон Гука, можно показать, что для выполнения равенств (1.2) и (1.3), а также осесимметричного характера условий (1.4) или (1.5) достаточно положить $\varphi = \psi_r = \psi_\theta \equiv 0$ и $\psi_\theta = \psi(\tau, r, \theta)$, где $\psi = (\psi_r, \psi_\theta, \psi_\varphi)$. При этом для компонентов вектора перемещения и тензора напряжений в сферической системе координат справедливы равенства

$$w = \partial\psi/\partial r + \psi/r, \quad u_r = u_\theta \equiv 0 \quad (1.6)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\eta^2 r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - w \operatorname{ctg} \theta \right), \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} \equiv 0 \quad (1.7)$$

а движение среды описывается одним волновым уравнением

$$\eta^2 \ddot{\psi} = \Delta \psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \quad (1.8)$$

где точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ , а Δ – оператор Лапласа скалярной функции в сферической системе координат при наличии осевой симметрии.

Для формулировки граничных условий на плоскости $z = 0$, обеспечивающих существование только осесимметричных сдвиговых волн (напряженно-деформированного состояния (1.6), (1.7) при независимости его компонент от угла ϑ), используем связь перемещений и координат вектора напряжений на этой поверхности в сферической и цилиндрической системах координат

$$u_R = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta, \quad u_\vartheta = w, \quad u_z = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad (1.9)$$

$$\sigma_{Rz} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{r\theta} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\vartheta z} = \sigma_{r\theta} \cos \theta - \sigma_{\theta\vartheta} \sin \theta \quad (1.10)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{r\theta} \sin 2\theta$$

Для осесимметричных сдвиговых волн, согласно (1.6) и (1.7), формулы (1.9) и (1.10) приобретают вид

$$u_R = u_z = 0, \quad u_\vartheta = w \quad (1.11)$$

$$\sigma_{Rz} = \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{\vartheta z} = \sigma_{r\theta} \cos \theta - \sigma_{\theta\vartheta} \sin \theta \quad (1.12)$$

Следовательно, для указанного напряженно-деформированного состояния необходимо положить

$$u_R|_{z=0} = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_{Rz}|_{z=0} = 0 \quad (1.13)$$

$$u_z|_{z=0} = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0 \quad (1.14)$$

а также

$$w|_{z=0} = V_0(\tau, R) = V_0(\tau, -htg \theta) \quad (1.15)$$

или

$$\sigma_{\vartheta z}|_{z=0} = q_0(\tau, R) = q_0(\tau, -h \operatorname{tg} \theta) \quad (1.16)$$

Здесь учтено, что на плоскости $z = 0$ справедливо равенство $R = -h \operatorname{tg} \theta$, поскольку $R = r \sin \theta$ и уравнение плоскости $z = 0$ в сферической системе координат имеет вид $r \cos \theta = -h$ ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$).

Частными случаями (1.15) и (1.16) являются условия “жесткой стенки”

$$w|_{z=0} = 0 \quad (1.17)$$

и свободной поверхности

$$\sigma_{\vartheta z}|_{z=0} = 0 \quad (1.18)$$

Таким образом, уравнение (1.8), нетривиальные равенства в (1.6), (1.7) и (1.12), а также граничные условия (1.4) или (1.5), (1.15) или (1.16) являются составляющими начально-краевой задачи, которая замыкается начальными условиями (отсутствие возмущений в начальный момент времени)

$$\Psi|_{\tau=0} = \dot{\Psi}|_{\tau=0} = 0 \quad (1.19)$$

и требованием ограниченности решения на бесконечности

$$\Psi = O(r), \quad r \rightarrow \infty \quad (1.20)$$

Далее ограничимся задачей о распространении от сферического включения осесимметричных сдвиговых волн при наличии жесткой стенки (условия (1.17)) или при свободной границе полупространства (условия (1.18)).

2. Метод решения. К задаче (1.4)–(1.8), (1.12), (1.17)–(1.20) применяем преобразование Лапласа по времени (s – параметр преобразования, значок L указывает на изображение)

$$\eta^2 s^2 \ddot{\Psi} = \Delta \Psi^L - \frac{\Psi^L}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (2.1)$$

$$w^L = \frac{\partial \Psi^L}{\partial r} + \frac{\Psi^L}{r}, \quad \sigma_{r\vartheta}^L = \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial w^L}{\partial r} - \frac{w^L}{r} \right), \quad \sigma_{\theta\vartheta}^L = \frac{1}{\eta^2 r} \left(\frac{\partial w^L}{\partial \theta} - w^L \operatorname{ctg} \theta \right) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{\vartheta z}^L = \sigma_{r\vartheta}^L \cos \theta - \sigma_{\theta\vartheta}^L \sin \theta$$

$$w^L|_{r=1} = V^L(s, \theta) \quad \text{или} \quad \sigma_{r\vartheta}^L|_{r=1} = q^L(s, \theta) \quad (2.3)$$

$$w^L|_{z=0} = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_{\vartheta z}^L|_{z=0} = 0 \quad (2.4)$$

$$\Psi^L = O(r), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

Решение уравнения (2.1) с учетом условия ограниченности (2.5) записываем в виде [3, 4]:

$$\Psi^L = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(s) K_{n+1/2}(\eta r s) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) - \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{r_1}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n(s) K_{n+1/2}(\eta r_1 s) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta_1) \quad (2.6)$$

Здесь $A_n(s)$ и $B_n(s)$ – произвольные функции; $K_{n+1/2}(x)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода; $C_n^\lambda(x)$ – многочлены Гегенбауэра порядка n ; r_1, θ_1, ϑ – дополнительная сферическая система координат, полученная переносом вдоль оси Oz центра O_1 исходной сферической системы в точку \tilde{O}_1 , симметричную точке O_1 относительно плоскости $z = 0$.

Учитывая связь координат r, θ и r_1, θ_1 на границе полупространства

$$r|_{z=0} = r_1|_{z=0}, \quad \theta|_{z=0} + \theta_1|_{z=0} = \pi \quad (2.7)$$

а также свойства многочленов Гегенбауэра

$$C_n^\lambda(-x) = (-1)^n C_n^\lambda(x) \quad (2.8)$$

из граничных условий (2.4) получаем связь между функциями $A_n(s)$ и $B_n(s)$

$$B_n(s) = \pm(-1)^n A_n(s) \quad (2.9)$$

Здесь и далее верхний знак (+) соответствует жесткой стенке, а знак (–) – свободной границе полупространства.

Подставляя (2.9) в (2.6) и используя теорему сложения для функций $K_{n+1/2}(x)$ [3, 4], а также выражение этих функций через элементарные [5], представляем изображение потенциала в виде следующего ряда:

$$\Psi^L = -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^L(r, s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta) \quad (2.10)$$

$$\Psi_n^L(r, s) = \frac{1}{(\eta s)^n r^{n+1}} [R_{n0}(\eta rs) A_n(s) e^{-\eta rs} + G_{n0}(\eta rs) S_n(s)]$$

$$S_n(s) = \sum_{p=1}^{\infty} S_{np}(s) A_p(s) e^{-2\eta hs} \quad (2.11)$$

$$S_{np}(s) = \pm(-1)^p \frac{2n+1}{2n(n+1)} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_\sigma^{(n1p1)} \frac{R_{\sigma 0}(2\eta hs)}{(2\eta hs)^{\sigma+1}}$$

$$R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{(n-k)! k! 2^k}$$

где $b_\sigma^{(n1p1)}$ – коэффициенты Клебша – Гордона [4].

Аналогично (2.10) раскладываем в ряды изображения перемещения w и напряжения $\sigma_{r\theta}$:

$$w^L = -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} w_n^L(r, s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta), \quad \sigma_{r\theta}^L = -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{r\theta n}^L(r, s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta) \quad (2.12)$$

Коэффициенты рядов (2.10) и (2.12), согласно (1.6) и (1.7) связаны между собой так:

$$w_n^L = \frac{\partial \Psi_n^L}{\partial r} + \frac{\Psi_n^L}{r}, \quad \sigma_{r\theta n}^L = \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial w_n^L}{\partial r} - \frac{w_n^L}{r} \right) \quad (2.13)$$

Тогда с учетом (2.11) приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
 w_n^L(r, s) &= -\frac{1}{(\eta s)^n r^{n+2}} \{ R_{n3}(\eta rs) A_n(s) e^{-\eta rs} + \\
 &+ [R_{n3}(-\eta rs) e^{\eta rs} - R_{n3}(\eta rs) e^{-\eta rs}] S_n(s) \} \\
 \sigma_{r\partial n}^L(r, s) &= \frac{1}{\eta^{n+2} s^n r^{n+3}} \{ R_{n4}(\eta rs) A_n(s) e^{-\eta rs} + \\
 &+ [R_{n4}(-\eta rs) e^{\eta rs} - R_{n4}(\eta rs) e^{-\eta rs}] S_n(s) \}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$R_{n3}(z) = R_{n1}(z) - R_{n0}(z), \quad R_{n4}(z) = R_{n2}(z) - R_{n0}(z)$$

$$R_{n1}(z) = \sum_{k=0}^{n+1} B_{nk} z^{n-k} = R_{n+1,0}(z) - n R_{n0}(z), \quad R_{n2}(z) = \sum_{k=0}^n C_{nk} z^{n-k} \tag{2.15}$$

$$B_{nk} = A_{nk} + k A_{n, k-1} \quad (k \neq 0), \quad B_{n0} = A_{n0}$$

$$C_{nk} = B_{nk} + k B_{n, k-1} \quad (k \neq 0), \quad C_{n0} = B_{n0}$$

Далее раскладываем правые части граничных условий (1.4) и (1.5) в ряды по полиномам Гегенбауэра

$$V^L(s, \theta) = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} V_n^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \tag{2.16}$$

$$q^L(s, \theta) = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} q_n^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta)$$

$$V_n^L(s) = \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} \int_0^{\pi} V^L(s, \theta) \sin^2 \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) d\theta \tag{2.17}$$

$$q_n^L(s) = \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} \int_0^{\pi} q^L(s, \theta) \sin^2 \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) d\theta$$

В результате из (2.3) получаем, что коэффициенты рядов (2.12) должны удовлетворять граничным условиям

$$w_n^L(r, s) \Big|_{r=1} = V_n^L(s) \quad \text{или} \quad \sigma_{r\partial n}^L \Big|_{r=1} = q_n^L(s) \tag{2.18}$$

Подстановка в них рядов (2.12) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно функций $A_n^L(s)$:

$$[y^2 \mathbf{M}(s) + x \mathbf{F}^{(1)}(s) + xy^2 \mathbf{F}^{(2)}(s)] \mathbf{A}(s) = \mathbf{P}(s) \tag{2.19}$$

$$\mathbf{M}(s) = \text{diag}(M_1(s), M_2(s), \dots), \quad \mathbf{F}^{(l)}(s) = (F_{np}^{(l)}(s)) \quad (l = 1, 2)$$

$$F_{np}^{(1)}(s) = M_n(-s)S_{np}(s), \quad F_{np}^{(2)}(s) = M_n(s)S_{np}(s) \quad (2.20)$$

$$A(s) = (A_1(s), A_2(s), \dots)^T, \quad P(s) = (k_1(s), k_2(s), \dots)^T$$

$$x = e^{-\eta hs}, \quad y = e^{-hs}$$

В формулах (2.20) значок T соответствует операции транспонирования, $M(s)$ – бесконечная диагональная матрица, $F^{(l)}(s)$ – бесконечные матрицы, $A(s)$ и $P(s)$ – бесконечные векторы-столбцы, а функции $M_n(s)$ и $k_n(s)$ в зависимости от типа граничных условий на включении имеют вид:

условия (1.4):

$$M_n(s) = R_{n3}(\eta s), \quad k_n(s) = (\eta s)^n V_n^L(s) \quad (2.21)$$

условия (1.5):

$$M_n(s) = R_{n4}(\eta s), \quad k_n(s) = \eta^{n+2} s^2 V_n^L(s) \quad (2.22)$$

Решение системы уравнений (2.19) разыскиваем в виде ряда

$$A(s) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(s) x^i y^{-j-1}; \quad a_{ij}(s) = (a_{1ij}(s), a_{2ij}(s), \dots)^T \quad (2.23)$$

где $a_{ij}(s)$ – бесконечные векторы-столбцы.

Подставляя (2.23) в (2.19) и приравнявая коэффициенты левой и правой частей при одинаковых степенях переменных x и y (ряд в правой части содержит только один ненулевой член), получаем рекуррентную систему уравнений относительно функций $a_{nij}(s)$ и соответствующие начальные условия.

$$a_{nij}(s) = \sum_{p=1}^{\infty} S_{np}(s) \left[a_{p,i-1,j+1}(s) - \frac{M_n(-s)}{M_n(s)} a_{p,i-1,j-1}(s) \right] \quad (i \geq 1, j \geq 1) \quad (2.24)$$

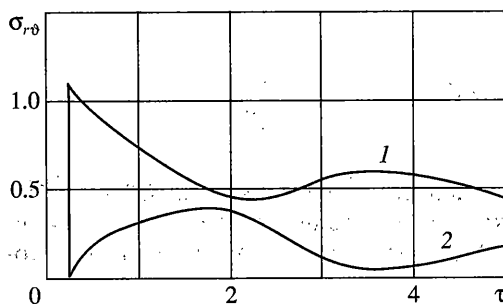
$$a_{ni0}(s) = \sum_{p=1}^{\infty} S_{np}(s) a_{p,i-1,0}(s) \quad (i \geq 1), \quad a_{ni1}(s) = 0 \quad (i \geq 0) \quad (2.25)$$

$$a_{n0j}(s) = 0 \quad (j \geq 1), \quad a_{n00}(s) = k_n(s)/M_n(s)$$

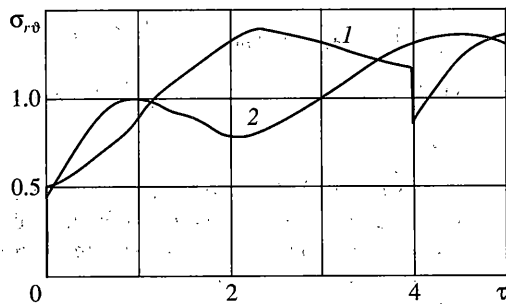
Окончательные формулы для изображений коэффициентов рядов по полиномам Гегенбауэра искомых функций следуют из (2.14) и (2.23):

$$w_n^L(r, s) = \frac{1}{(\eta s)^n r^{n+2}} \sum_{i,j=0}^{\infty} x^i y^{-j-1} \left\{ R_{n3}(\eta rs) a_{nij}(s) y^r + \right. \\ \left. + x [R_{n3}(-\eta rs) y^{-r} - R_{n3}(\eta rs) y^r] \sum_{p=1}^{\infty} S_{np}(s) a_{pij}(s) \right\} \quad (2.26)$$

$$\sigma_{r\partial n}^L(r, s) = \frac{1}{\eta^{n+2} s^n r^{n+3}} \sum_{i,j=0}^{\infty} x^i y^{-j-1} \left\{ R_{n4}(\eta rs) a_{nij}(s) y^r + \right. \\ \left. + x [R_{n4}(-\eta rs) y^{-r} - R_{n4}(\eta rs) y^r] \sum_{p=1}^{\infty} S_{np}(s) a_{pij}(s) \right\}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Отметим, что внешние ряды в (2.26) являются рядами по экспонентам и в пространстве оригиналов при рассмотрении ограниченного временного интервала они переходят в конечные суммы. Кроме того, как вытекает из рекуррентных соотношений, при учете в разложениях (2.12) конечного числа членов функции $a_{nj}(s)$ и коэффициенты при экспонентах в (2.26) есть рациональные функции параметра преобразования Лапласа s , что позволяет достаточно просто находить их оригиналы с помощью вычетов.

3. Пример. На фиг. 1, 2 приведены полученные с учетом четырех членов рядов по полиномам Гегенбауэра зависимости от времени напряжения $\sigma_{r\theta}$ для полупространства из алюминия ($\eta = 1.9853$) при свободной граничной плоскости и глубине залегания включения $h = 1.5$.

Графики на фиг. 1 соответствуют полости при равномерном давлении в виде единичной функции Хевисайда $q(\tau, \theta) = H(\tau)$ и следующим точкам: кривая 1 — $r = 1.2$ и $\theta = 3\pi/4$, кривая 2 — $r = 1.2$ и $\theta = \pi/2$. Аналогичные зависимости на фиг. 2 построены для абсолютно жесткого включения при $V(\tau, \theta) = H(\tau)$ в следующих точках: кривая 1 — $r = 1$ и $\theta = 3\pi/4$, кривая 2 — $r = 1$ и $\theta = \pi/2$.

4. Заключение. С использованием методов неполного разделения переменных и интегрального преобразования Лапласа получено точное решение задачи о распространении осесимметричных сдвиговых волн от сферического включения, расположенного в упругом полупространстве.

В качестве примера приведены результаты расчетов для равномерных по границе включения силовых и кинематических возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-1278.2003.1 и ФЦП "Интеграция".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в упругом полупространстве // Изв. РАН. МТТ, 1992. № 5. С. 43–47.
2. Гузь А.Н., Головачев В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
4. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
5. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.