

УДК 539.3

© 2004 г. М. А. ГРЕКОВ, С. Н. МАКАРОВ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ У СЛАБО ИСКРИВЛЕННОГО УЧАСТКА ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА

Механические повреждения элементов конструкций часто происходят в результате хрупкого разрушения или пластической деформации, возникших на поверхности материала из-за наличия там различного рода дефектов и неоднородностей технологического характера, а также вследствие коррозионных процессов и ударных воздействий. В данной работе малые отклонения поверхности тела от плоской формы рассматриваются как дефект поверхности, порождающий локальный рост напряжений и, тем самым, представляющий угрозу развития повреждений. Для анализа концентрации напряжений, вызванной слабым искривлением поверхности тела используется метод возмущения, аналогичный тому, который был применен в работах [1–2] для изучения криволинейных трещин.

Публикуемая работа продолжает исследования [3], которые инициированы потребностью разобраться в вопросах поверхностного зарождения дислокационных полупетель в полупроводниковых гетеро-эпитаксиальных структурах. Такие материалы, составленные из полупроводниковых слоев с различными параметрами решеток, широко применяются в многочисленных электронных и оптических приборах. При несогласованности решеток возникают деформации, приводящие к образованию дислокаций, плотность которых влияет на качество и производительность электронных устройств.

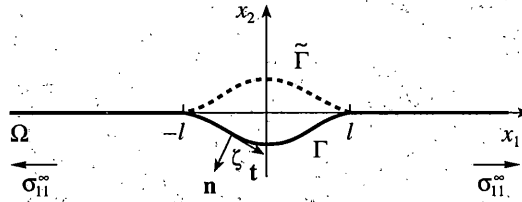
При анализе некоторых механических свойств пленочных покрытий было замечено, что такие источники деформации как термическая и эпитаксиальная несогласованность способны вызвать достаточно высокие напряжения (порядка 0.5 ГПа [3]). При таком высоком уровне напряжений незначительное их увеличение из-за поверхностной неоднородности типа микро-впадин и микро-выступов может, в свою очередь, инициировать процесс зарождения дислокаций и трещин.

В [3] проведен анализ концентрации напряжений на волнистой синусоидальной поверхности, а также у изолированной впадины, имеющей форму одной волны синусоиды. Принятый в [3] метод возмущения опирается на известные функции Грина для упругого тела с идеальной плоской границей. Реальная искривленная поверхность тела трактуется при этом как возмущенная из базовой плоской. В частности, при плоской деформации в первом приближении получена следующая зависимость для коэффициента концентрации напряжений S , вызванной изолированной впадиной

$$S = 1 + 14.81(A/\lambda), \quad A/\lambda \ll 1 \quad (1)$$

где A – половина глубины впадины, λ – ширина впадины.

Рассмотрев другие виды искривленных поверхностей (синусоидальную волнистую поверхность при плоской деформации; поверхность, синусоидальную в двух перпендикулярных направлениях; поверхность, имеющую осесимметричную изолированную



Фиг. 1

впадину в форме одной волны синусоиды), Гао [3] пришел к выводу, что во всех случаях коэффициенты концентрации напряжений мало отличаются друг от друга, однако наибольшая концентрация создается изолированной впадиной при плоской деформации.

Имея это в виду, ограничимся построением приближенного решения для одиночной впадины и одиночного выступа при плоской деформации, однако, в отличие от подхода Гао [3], используемый метод дает возможность найти любое приближение для искривления произвольной формы. Последнее позволило установить, что концентрация напряжений зависит не только от отношения амплитуды искривления к его длине, но также еще и от радиуса кривизны поверхности.

Рассмотрим полубесконечное упругое тело, находящееся в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния. За исключением слабо искривленного участка поверхность данного тела является плоской. Таким образом, можем сформулировать соответствующую двумерную задачу теории упругости для полуграниченной плоской области $\Omega = \{z: \text{Im}(z - \zeta) < 0\}$ с границей $\Gamma = \{z: z = \zeta\}$ (фиг. 1). Здесь $z = x_1 + ix_2$, x_1, x_2 — прямоугольная декартова система координат.

Граница Γ задана уравнением

$$\zeta = x_1 + i\zeta_2 = x_1 + i\epsilon g(x_1), \quad \epsilon > 0, \quad \epsilon \ll 1 \quad (2)$$

$$g(x_1) = \begin{cases} f(x_1), & |x_1| \leq l \\ 0, & |x_1| > l \end{cases} \quad (3)$$

Функция $f(x_1)$ непрерывна и $|f(x_1)| \leq l, |f'(x_1)| < M (M = \text{const})$.

Считаем, что на Γ в общем случае действуют нормальные и касательные усилия $p_n(\zeta), p_t(\zeta)$, т.е.

$$\sigma_{nn}(\zeta) + i\sigma_{nt}(\zeta) = p_n + ip_t \equiv p(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma \quad (4)$$

а на бесконечности для напряжений σ_{ij} и угла поворота ω выполнены условия

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sigma_{11}(z) &= \sigma_{11}^{\infty} \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sigma_{22}(z) &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \sigma_{12}(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \omega(z) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Функция $p(\zeta)$ и ее производные удовлетворяют условию Гельдера почти для всех x_1 и $\lim p(\zeta) = 0$ при $|x_1| \rightarrow \infty$.

В отличие от работ [1–3], в которых построено только первое приближение при возмущении плоской формы границы, используем метод, позволяющий написать алгоритм нахождения любого приближения.

Согласно [4] напряжения и перемещения выражаются через две голоморфные в Ω функции Φ, Ψ при помощи равенства

$$G(z) = \eta\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega$$

$$G(z) = \begin{cases} \sigma(z), & \eta = 1 \\ -2\mu(du/dz), & \eta = -\kappa \end{cases} \quad (6)$$

$$u = u_1 + iu_2, \quad \sigma = \overline{\sigma_{nn}} + i\overline{\sigma_{nt}}$$

где α – угол между вектором \mathbf{t} и осью x_1 , отсчитываемый от оси x_1 против часовой стрелки; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ при плоском напряженном состоянии, $\kappa = 3 - 4\nu$ при плоской деформации; ν и μ – соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига упругого тела; u_1, u_2 – компоненты вектора перемещений соответственно вдоль осей x_1 и x_2 ; $\overline{\sigma_{nn}}, \overline{\sigma_{nt}}$ – нормальное и касательное усилия на площадке с нормалью \mathbf{n} (в (4) вектор \mathbf{n} перпендикулярен к Γ в точке ζ , а направление вектора \mathbf{t} совпадает с положительным направлением касательной к Γ). Черта сверху означает комплексное сопряжение, штрих – производную по аргументу.

Введем новую функцию $\Phi(z)$, голоморфную в области $\tilde{\Omega} = \{z: \bar{z} \in \Omega\}$ с границей $\tilde{\Gamma} = \{z: z = \bar{\zeta}\}$ (фиг. 1):

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})} - z\overline{\Phi'(\bar{z})} - \overline{\Psi(\bar{z})}, \quad z \in \tilde{\Omega} \quad (7)$$

С учетом (7) соотношение (6) преобразуется к виду

$$G(z) = \eta\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - (\Phi(\bar{z}) + \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)})e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega \quad (8)$$

В силу граничного условия (4) и соотношения (8) функция Φ , определенная в $\tilde{\Omega}$ равенством (8), является непрерывным продолжением одноименной функции Φ из Ω через те прямолинейные участки границы Γ , которые свободны от внешних усилий.

В соответствии с условиями (5) значение функции Φ на бесконечности определяется равенством [4]:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi(z) = \frac{1}{4}\sigma_{11}^{\infty} \quad (9)$$

Перейдем в (8) к пределу при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$ и $\eta = 1$, считая, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$, где α_0 – угол между положительным направлением касательной к Γ в точке ζ и осью x_1 . Тогда граничное условие (4) при учете (2) и очевидного равенства

$$e^{-2i\alpha_0} = 1 - \frac{2i\xi_2'(x_1)}{1 + i\xi_2'(x_1)} \quad (10)$$

приводит к следующей краевой задаче для нахождения функции $\Phi(z)$:

$$\begin{aligned} & \Phi^-(\zeta) - \Phi^+(\bar{\zeta}) + 2i\xi_2\overline{\Phi'^-(\zeta)} + \\ & + \frac{2i\xi_2'}{1 + i\xi_2'}[\Phi^+(\bar{\zeta}) + \overline{\Phi^-(\zeta)} - 2i\xi_2\overline{\Phi'^-(\zeta)}] = p(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Phi^-(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta - i0} \Phi(z), \quad \zeta \in \Gamma; \quad \Phi^+(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta + i0} \Phi(z), \quad \zeta \in \tilde{\Gamma}$$

Рассматривая границу Γ как малое локальное возмущение линии $x_2 = 0$, представим функцию $\Phi(z)$ при $z \in \Omega \cup \tilde{\Omega}$ в виде ряда

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_n(z), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (12)$$

где $\Phi_n(z)$ – функции, голоморфные вне вещественной оси.

Тогда, в соответствии с равенством (8), для функции $G(z)$, определяющей напряженно-деформированное состояние среды, имеем аналогичное представление

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} G_n(z) \quad (13)$$

Каждая из функций $G_n(z)$ находится по формуле (8) при замене Φ на Φ_n .

В силу малости возмущения, значения функций $\Phi_n(z)$ и их производных на Γ и $\tilde{\Gamma}$ можно выразить через граничные значения этих функций и их производных на вещественной оси посредством соответствующих рядов Маклорена в окрестности прямой $x_2 = 0$. Аналогичный ряд имеет место также и для функции $p(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \Phi_n^-(\zeta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\xi_2)^m}{m!} \Phi_n^{(m)-}(x_1), & \Phi_n^+(\bar{\zeta}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\xi_2)^m}{m!} \Phi_n^{(m)+}(x_1) \\ \Phi_n'^-(\zeta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\xi_2)^m}{m!} \Phi_n^{(m+1)-}(x_1), & p(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\xi_2)^k}{k!} p^{(k)}(x_1), \quad |\xi_2| \ll l \end{aligned} \quad (14)$$

При учете (10), (14) и разложения

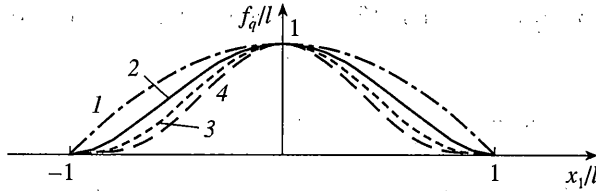
$$\frac{1}{1 + i\xi_2'} = \sum_{m=0}^{\infty} (-i\xi_2')^m, \quad |\xi_2'| < 1$$

соотношение (11) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon g(x_1))^k}{k!} \left[\Phi_n^{(k)-}(x_1) - (-1)^k \Phi_n^{(k)+}(x_1) + 2i\varepsilon (-1)^k g(x_1) \overline{\Phi_n^{(k+1)-}(x_1)} + \right. \\ &\left. + 2i\varepsilon (-1)^k g'(x_1) \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-i\varepsilon g'(x_1))^m \right) \overline{(\Phi_n^{(k)-}(x_1) + \Phi_n^{(k)+}(x_1) - 2i\varepsilon g(x_1) \overline{\Phi_n^{(k+1)-}(x_1)})} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon g(x_1))^k}{k!} p^{(k)}(x_1), \quad x_1 \in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \quad (15)$$

Приравнивая в (15) коэффициенты при ε^r ($r = 0, 1, \dots$), приходим к последовательности краевых условий

$$\begin{aligned} \Phi_n^+(x_1) - \Phi_n^-(x_1) &= F_n(x_1) \\ x_1 &\in (-\infty, +\infty) \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (16)$$



Фиг. 2

При этом для правых частей уравнений (16) справедливы следующие выражения:

$$F_0(x_1) = -p(x_1)$$

$$F_n(x_1) = n! \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} \left[\frac{(ig(x_1))^{(n-m)}}{(n-m)!} (\Phi_m^{(n-m)-}(x_1) - (-1)^{(n-m)} \Phi_m^{(n-m)+}(x_1) - \right. \\ \left. - 2(-1)^{(n-m)} (n-m) \overline{\Phi_m^{(n-m)-}(x_1)} - 2(-1)^{(n-m)} \sum_{1 \leq j \leq n-m} \frac{(ig(x_1))^{(n-m-j)}}{(n-m-j)!} (ig'(x_1))^j \times \right. \\ \left. \times (\Phi_m^{(n-m-j)+}(x_1) + (2(n-m-j) + 1) \overline{\Phi_m^{(n-m-j)-}(x_1)}) \right] - (ig(x_1))^n p^{(n)}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (17)$$

Решение задачи Гильберта (16) при любом значении n имеет вид [5]:

$$\Phi_n(z) = I_n(z) + C_n, \quad I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_n(t)}{t-z} dt \quad (18)$$

Подставив (12) в (18) и устремив $z \rightarrow \infty$, с учетом равенства (9) находим постоянные C_n : $C_0 = \sigma_{11}^{\infty}/4$, $C_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Рассмотрим локальное искривление границы Γ , форма которого определяется равенством

$$x_2 = \varepsilon f_q(x_1) = \pm \varepsilon l (1 - (x_1/l)^2)^q, \quad |x_1| \leq l \quad (19)$$

где q – любое натуральное число. Знаку (+) отвечает выступ, а (-) – впадина. На фиг. 2 представлены графики функций f_q в случае выступа при $q = 1, 2, 3, 4$ (соответственно кривые 1–4). Заметим, что при $q = 1$ точки $x_1 = \pm l$ являются угловыми точками Γ , так как $f_1'(l) \neq 0$. При $q > 1$ граница Γ – гладкая.

Считаем, что граница свободна от внешних усилий, т.е. $p(\zeta) = 0$. Тогда, согласно (17) и (18), для нулевого и первого приближений имеем

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{4} \sigma_{11}^{\infty}, \quad \Phi_1(z) = \frac{\sigma_{11}^{\infty}}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{f_q'(t)}{t-z} dt \quad (20)$$

Не составляет также особой сложности получить комплексные потенциалы и для следующих приближений. Так, чтобы найти, например $\Phi_2(z)$, заметим, что на основа-

нии формулы Сохоцкого–Племеля [5] и соотношения (18) для любого n -го приближения

$$\Phi_n^\pm(x_1) = I_n^\pm + C_n = \pm \frac{F_n(x_1)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_n(t)}{t-x_1} dt + C_n \quad (21)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Тогда из (17) при учете (21) следует

$$F_2(x_1) = 2ig_q(x_1)[F_1(x_1) + 4I_1'(x_1)] + 4ig_q'(x_1)[F_1(x_1) + 4I_1(x_1)] + 2(g_q'(x_1))^2 \sigma_{11}^\infty \quad (22)$$

Здесь функция g_q определяется в соответствии с (3) при замене f на f_q , и, кроме того,

$$F_1(x_1) = ig_q'(x_1)\sigma_{11}^\infty, \quad I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(t)}{t-z} dt$$

Для нахождения функции $\Phi_2(z)$ осталось вычислить интеграл (18) при $n = 2$, подставив в него выражение (22) при заданной функции g_q (т.е. функции f_q) и при учете последних двух равенств.

Ограничимся далее нулевым и первым приближениями (20). Нетрудно заметить, что нулевое приближение отвечает однородному напряженно-деформированному состоянию полуплоскости, растягиваемой усилиями σ_{11}^∞ .

Подставив (19) в интеграл (20), получим следующее выражение для комплексного потенциала в первом приближении:

$$\Phi_1(z) = \mp \frac{q\sigma_{11}^\infty}{\pi} (J_1 + J_2 + J_3)$$

$$J_1 = \frac{2(2q-2)!!}{(2q-1)!!}, \quad J_2 = z_1(1-z_1^2)^{q-1} \ln \frac{z_1-1}{z_1+1} \quad (q = 1, 2, \dots) \quad (23)$$

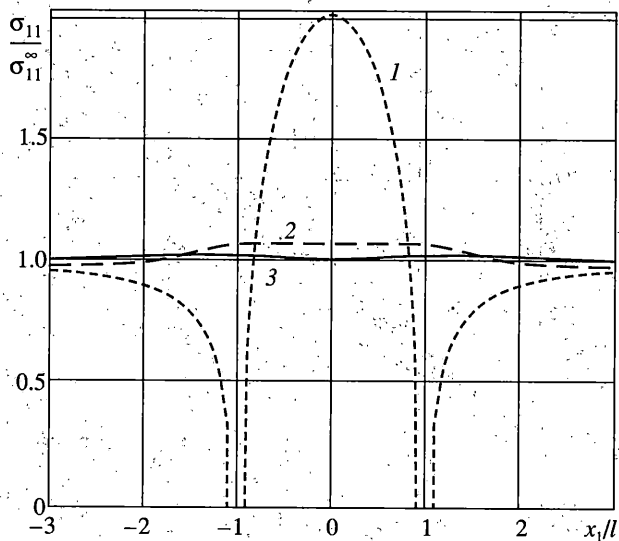
$$J_3 = 0, \quad q = 1, \quad J_3 = 2z_1^2 \sum_{j=1}^{q-1} (-1)^j C_{q-1}^j (1-z_1^2)^{n-1-j} M_j$$

$$M_j = \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m C_{j-1}^m \frac{z_1^{2m}}{2(j-m)-1} \quad (q = 2, 3, \dots), \quad z_1 = \frac{z}{l}$$

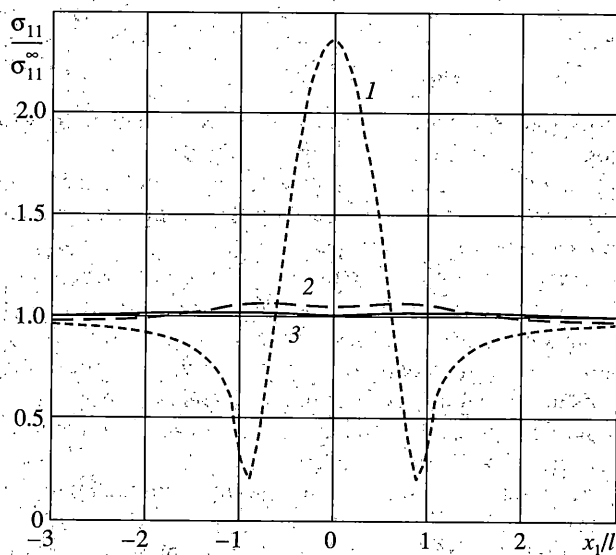
На фиг. 3, 4 показаны изменения продольных напряжений σ_{11} около впадины, форма которой определяется функциями f_1 (фиг. 3) и f_2 (фиг. 4). При этом $\epsilon = 0.1$. Напряжения вычислены вдоль линий $x_2 = 0, -l, -2l$ (соответственно кривые 1, 2, 3) по формулам (8), (13), (19), (20) и (23) при $\eta = 1, \alpha = \pi/2$ и нижнем знаке в (19) и (23). Как и следовало ожидать, напряжения в угловых точках границы разрывны (фиг. 3). В то же время общей закономерностью, не зависящей от показателя степени q , является концентрация напряжений σ_{11} у дна впадины. С точностью до величины порядка ϵ для коэффициента концентрации справедливо следующее равенство:

$$S = \max(\sigma_{11}/\sigma_{11}^\infty) = 1 + k\epsilon$$

$$k = \frac{8q(2q-2)!!}{\pi(2q-1)!!} \quad (q = 1, 2, \dots) \quad (24)$$

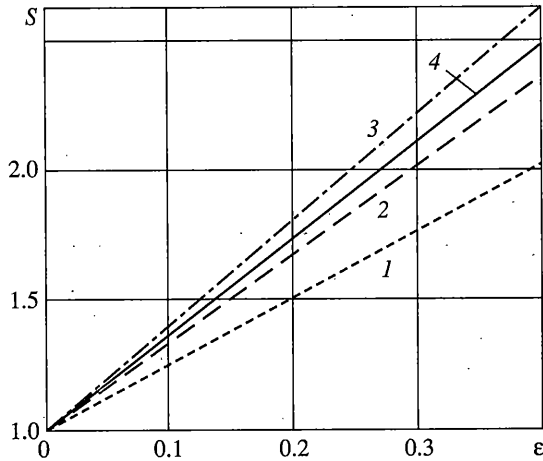


Фиг. 3



Фиг. 4

Чтобы сравнить (24) с равенством (1), полученным в [3] для впадины синусоидальной формы, достаточно в (24) ввести замену $\varepsilon = 4A/\lambda$, вытекающую из равенств $2A = l\varepsilon$, $\lambda = 2l$. На фиг. 5 приведены прямые (24) при $q = 1, 2, 3$ (прямые 1–3) и прямая 4, которая соответствует равенству (1). Следует отметить, что при $q \geq 3$ коэффициент концентрации у впадины, описываемой функцией (19), выше, чем у синусоидальной. Это видно уже из фиг. 5 при $q = 3$.



Фиг. 5

Анализ показывает, что для коэффициента k в (24) имеет место следующая приближенная зависимость от радиуса кривизны у дна впадины ρ :

$$k = a(\rho\epsilon/l)^b + c \tag{25}$$

$$a = 1.07, \quad b = -0.601, \quad c = 0.915$$

И при синусоидальной, и при степенной форме искривления формула (25) дает относительную погрешность для S менее 1% при $0.125 \leq \rho\epsilon/l \leq 0.5$ ($q < 5$), а при $0.05 \leq \rho\epsilon/l \leq 0.5$ ($q < 11$) эта погрешность не превышает 2%. Таким образом, из формул (24) и (25) следует, что влияние геометрии границы на концентрацию напряжений гораздо сложнее, чем выявлено в работе [3].

В случае выступа также наблюдается концентрация напряжений. В первом приближении для коэффициента концентрации S имеет место такое же равенство (24) с коэффициентом k , зависящим уже не только от параметра q , но и от координаты точки, в которой достигается максимум напряжений σ_{11} . С увеличением q эта точка x_{10} смещается к вершине выступа (в силу симметрии речь идет о координате $x_{10} > 0$). В качестве примера в таблице приведены значения величины k , координаты x_{10} и радиуса кривизны $\rho(x_{10})$, вычисленные при $q = 2, 3, 4$.

На основании численных экспериментов и данных, приведенных в таблице, можно констатировать следующее.

При заметном различии кривизн в точках максимума напряжений σ_{11} большему радиусу кривизны отвечает меньший коэффициент концентрации напряжений. Нечувствительность концентрации напряжений к незначительному изменению формы выступа

q	2	3	4
k	2.02	1.82	1.82
x_{10}/l	0.938	0.805	0.712
$\epsilon\rho(x_{10})/l$	0.202	0.334	0.358

(при $q = 3$ и $q = 4$) можно объяснить результатом погрешности первого приближения. По-видимому, по этой же причине точка, в которой радиус кривизны ρ достигает локального минимума, не совпадает с x_{10} и находится ближе к краю выступа. Концентрация напряжений у подошвы выступа несколько ниже, чем на дне впадины той же формы, однако при малых значениях q имеет тот же порядок (для впадины $k = 3, 4$ при $q = 2$). Последнее означает, что выступы представляют такую же угрозу развития повреждений на поверхности тела, как и впадины.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01156) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ РФ" (00-15-96027).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баничук Н.В. Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 130–137.
2. Cotterell B., Rice J.R. Slightly curved or kinked cracks // Intern. J. Fracture. 1980. V. 16. № 2. P. 155–169.
3. Gao H. Stress concentration at slightly undulating surfaces // J. Mech. Phys. Solids. 1991. V. 39. № 4. P. 443–458.
4. Греков М.А. Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2001. 192 с.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
10.09.2002