МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2004

УДК 539.375

© 2004 г. Н.М. БОРОДАЧЕВ, Г.П. ТАРИКОВ

ЗАДАЧА ГЕРЦА С УЧЕТОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ПРИ ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассматривается пространственная контактная задача теории упругости с учетом теплообразования для системы двух тел, находящихся в скользящем контакте.

Задача сведена к двумерному интегральному уравнению первого рода. Решение этого уравнения получено в случае эллиптической площадки контакта. В результате найдена формула для определения контактного давления с учетом теплообразования. Рассмотрен также вопрос об определении размеров площадки контакта. Учет тепловыделения, при решении контактных задач, изучался в [1–3].

1. Введение. При работе высоконагруженных узлов современных машин выделяется тепло на поверхностях контактирующих элементов. Это приводит к появлению значительных температурных напряжений и перераспределению давления на площадке контакта.

Прежде чем решать контактную задачу термоупругости с учетом тепловыделения, необходимо сначала сформулировать температурные граничные условия на поверхностях соприкасающихся тел и решить соответствующую краевую задачу для уравнения теплопроводности.

Полагаем, что в каждой точке площадки контакта имеют место следующие условия теплообразования [1, 2]:

(a) сумма интенсивностей тепловых потоков, идущих в каждое из соприкасающихся тел, равна интенсивности теплообразования за счет сил трения;

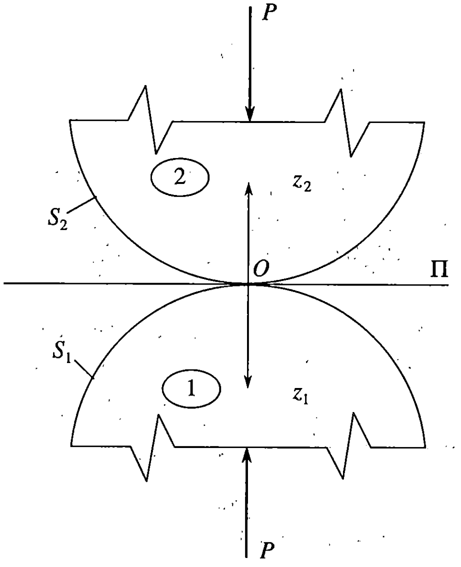
(b) температуры соприкасающихся тел на площадке контакта равны.

На свободной поверхности соприкасающихся тел (т.е. вне площадки контакта) происходит теплообмен с окружающей средой. Однако во многих случаях этим теплообменом можно пренебречь, так как контакт двух тел обычно носит кратковременный характер, а размеры области контакта весьма малы по сравнению с размерами соприкасающихся тел. Поэтому будем считать, что на свободных поверхностях соприкасающихся тел тепловые потоки равны нулю.

2. Температурные граничные условия и решение уравнения теплопроводности. Пусть два тела, ограниченные выпуклыми поверхностями S_1 и S_2 (фигура), соприкасаются в точке O, которую примем за начало координат. Проведем оси z_1 и z_2, перпендикулярные к общей касательной плоскости П поверхностей S_1 и S_2 в точке O, внутрь каждого из тел. Следуя Герцу, тела, находящиеся в контакте, заменим упругими полупространствами. Площадка контакта Ω представляет собой область, находящуюся внутри эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

На основании вышеизложенного имеем такие температурные граничные условия при $z_1 = z_2 = 0$:

$$
\begin{aligned}
&q_1 + q_2 = \upsilon f p(x, y)/J, \quad T_1 = T_2 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \\
&q_1 = q_2 = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \notin \Omega
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$



Здесь T – температура, отсчитываемая от температуры натурального состояния; q – тепловой поток; υ – скорость относительного скольжения; f – коэффициент трения скольжения; J – механический эквивалент тепла; p – давление на площадке контакта.

Имеем $q = -k\partial T/\partial n$, где k – коэффициент теплопроводности материала, а символ $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внешней нормали к поверхности.

Следовательно, граничные условия (2.1) примут вид:

$$\begin{aligned} & k_1\frac{\partial T_1}{\partial z_1} + k_2\frac{\partial T_2}{\partial z_2} = -\frac{\upsilon f p}{J}, \quad T_1 = T_2 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \\ & \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = \frac{\partial T_2}{\partial z_2} = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \notin \Omega \end{aligned} \tag{2.2}$$

Если теплообразование на площадке контакта отсутствует, то приходим к обычным условиям идеального теплового контакта двух тел.

Далее, понадобится уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{2.3}$$

Воспользуемся двумерным интегральным преобразованием Фурье [4]. Применяя это преобразование к граничным условиям (2.2) и уравнению (2.3), можно показать, что (2.2) эквивалентны условиям (при $z_1 = z_2 = 0$):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_i}{\partial z_i} = -\frac{\upsilon f p}{(k_1 + k_2)J} \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \quad (i = 1, 2) \\ & \frac{\partial T_i}{\partial z_i} = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \notin \Omega \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом, имеем задачу Неймана для полупространства $z_i > 0$. Решение этой задачи имеет вид [5]:

$$T_i(x_i, y_i, z_i) = \frac{\upsilon f}{2\pi(k_1+k_2)J}\iint\limits_{\Omega} p(\xi_i, \eta_i)\frac{d\xi_i d\eta_i}{r_i}$$
$$r_i = \sqrt{(x_i-\xi_i)^2+(y_i-\eta_i)^2+z_i^2} \quad (i = 1, 2) \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) удовлетворяет уравнению (2.3) и граничным условиям (2.4). Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\ln(z_i+r_i) = \frac{1}{r_i}$$

формуле (2.5) можно дать представление

$$T_i(x_i, y_i, z_i) = \frac{\upsilon f}{2\pi(k_1+k_2)J}\frac{\partial}{\partial z_i}\iint\limits_{\Omega} p(\xi_i, \eta_i)\ln(z_i+r_i)d\xi_i d\eta_i \quad (i = 1, 2) \tag{2.6}$$

Этот результат будет использован ниже при сведении термоупругой контактной задачи к интегральному уравнению первого рода.

3. Сведение термоупругой контактной задачи к интегральному уравнению. Уравнение равновесия в перемещениях с учетом температуры имеет вид

$$\nabla\nabla\mathbf{u}+(1-2\nu)\nabla^2\mathbf{u} = 4(1-\nu)\nabla\partial\Psi/\partial z \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, ν – коэффициент Пуассона, Ψ – термоупругий потенциал, ∇^2 – оператор Лапласа, ∇ – набла-оператор. Температура связана с термоупругим потенциалом соотношением

$$T(x, y, z) = \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial z} \tag{3.2}$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения.

Рассмотрим случай, когда на границе $z = 0$ упругого полупространства $z \geq 0$ отсутствуют касательные напряжения, т.е.

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0) = 0, \quad |x| < \infty, \quad |y| < \infty \tag{3.3}$$

В [6] приведено решение уравнения (3.1) удовлетворяющее условию (3.3). Из этого решения понадобятся только формулы для перемещения u_z и напряжения σ_z. Имеем

$$u_z = -2(1-\nu)\frac{\partial f}{\partial z}+z\frac{\partial F}{\partial z}$$
$$\sigma_z = 2\mu\left(-\frac{\partial F}{\partial z}+z\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) \tag{3.4}$$

$$F = \Psi+\partial f/\partial z \tag{3.5}$$

Здесь μ – модуль сдвига, а функция $f(x, y, z)$ удовлетворяет в полупространстве $z \geq 0$ уравнению Лапласа, т.е. $\nabla^2 f = 0$.

Рассмотрим термоупругую задачу для полупространства $z \geq 0$ при таких граничных условиях при $z = 0$:

$$\begin{aligned} &u_z(x, y, 0) = u_z(x, y) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \\ &\sigma_z(x, y, 0) = -p(x, y) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \\ &\sigma_z(x, y, 0) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \notin \Omega \\ &\tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0) = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x, y < \infty \end{aligned} \tag{3.6}$$

Формулы (3.4) уже удовлетворяют четвертому условию (3.6). Из (3.4) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu}\sigma_z \quad \text{при} \quad z = 0$$

Учитывая второе и третье условия (3.6), получаем

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{1}{2\mu}\begin{cases} p(x, y) & \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

Таким образом приходим к задаче Неймана для гармонической функции $F(x, y, z)$. Следовательно

$$\begin{aligned} &F(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\mu}\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}p(\xi, \eta)d\xi d\eta \\ &r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Учитывая (3.5), формулу (3.7) представим в виде:

$$\Psi + \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi\mu}\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{r}p(\xi, \eta)d\xi d\eta$$

Это выражение перепишем при $z = 0$:

$$\left.\left(\Psi + \frac{\partial f}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi\mu}\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{R}p(\xi, \eta)d\xi d\eta, \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \tag{3.8}$$

Из (3.4) имеем $u_z(x, y, 0) = -2(1-\nu)\partial f/\partial z$. Подставляя это выражение в (3.8), находим

$$u_z(x, y, 0) = 2(1-\nu)\Psi(x, y, 0) + \frac{1-\nu}{2\pi\mu}\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{R}p(\xi, \eta)d\xi d\eta \tag{3.9}$$

Найдем выражение для термоупругого потенциала Ψ. На основании формул (2.6) и (3.2) имеем

$$\Psi_i(x_i, y_i, z_i) = \frac{(1+\nu_i)\alpha_i v f}{4\pi(1-\nu_i)(k_1+k_2)J}\iint\limits_{\Omega}p(\xi, \eta)\ln(z_i + r_i)d\xi d\eta \quad (i = 1, 2) \tag{3.10}$$

Выражение (3.9) относится к одному из контактирующих тел. В случае контакта двух упругих тел, имеем

$$u_z(x, y) = u_z^{(1)}(x, y, 0) + u_z^{(2)}(x, y, 0) = \delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega$$

Здесь δ – сближение упругих тел, $\varphi_i(x, y)$ – уравнения поверхностей соприкасающихся тел.

В случае контакта двух упругих тел уравнение (3.9) будет иметь вид

$$\delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) = 2(1-\nu_1)\Psi_1(x, y, 0) + 2(1-\nu_2)\Psi_2(x, y, 0) +$$

$$+\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{R}p(\xi, \eta)d\xi d\eta \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \tag{3.11}$$

$$\vartheta_i = (1-\nu_i)/\mu_i \quad (i = 1, 2)$$

Полагая в (3.10) $z_i = 0$ ($i = 1, 2$) получаем

$$\Psi_i(x, y, 0) = \frac{(1+\nu_i)\alpha_i v f}{4\pi(1-\nu_i)(k_1+k_2)J}\iint\limits_{\Omega}p(\xi, \eta)\ln R d\xi d\eta \tag{3.12}$$

так как при $z_1 = z_2 = 0$, $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y_2 = y$.

Подставляя (3.12) в (3.11), находим

$$\delta - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) = \frac{(\beta_1+\beta_2)}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}p(\xi, \eta)\ln R d\xi d\eta +$$

$$+\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}p(\xi, \eta)\frac{1}{R}d\xi d\eta \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \tag{3.13}$$

$$\beta_i = \frac{(1+\nu_i)\alpha_i v f}{(k_1+k_2)J} \quad (i = 1, 2)$$

Уравнение (3.13) является интегральным уравнением первого рода. Решая это уравнение, можно найти закон распределения нормального давления $p(x, y)$ на площадке контакта Ω с учетом тепловыделения при трении скольжения.

Если два упругих тела находятся в условиях скользящего контакта, то на площадке контакта этих тел возникают как нормальное давление $p(x, y)$, так и касательные усилия трения $q(x, y)$. В [7] показано, что касательные усилия, обусловленные трением скольжения, мало влияют на распределение нормального давления, а также на размеры области контакта. Поэтому, при выводе интегрального уравнения (3.13) касательные усилия в области контакта учитывались только при определении величины тепловыделения при трении скольжения.

4. Решение уравнения (3.13). Ограничиваясь в (3.13) рассмотрением лишь локальных эффектов, будем иметь

$$\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} = \frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}p(\xi, \eta)\frac{1}{R}d\xi d\eta + \frac{(\beta_1+\beta_2)}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}p(\xi, \eta)\ln R d\xi d\eta \tag{4.1}$$

при $(x, y) \in \Omega$

Вопросы, связанные с определением величин R_1 и R_2, подробно рассматриваются в [8].

Решение интегрального уравнения (4.1) в замкнутом виде можно получить в предположении, что областью контакта Ω является эллиптическая площадка, ограниченная эллипсом E_0:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 = 0, \quad a \ge b, \quad b^2 = a^2(1-e^2)$$

где a, b – полуоси эллипса, e – эксцентриситет площадки контакта, $R_1 \ge R_2$. Параметры a, b эллипса E_0 первоначально неизвестны, они определяются в процессе решения задачи.

Решение уравнения (4.1) будем искать в виде:

$$p(x, y) = p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \tag{4.2}$$

Подставляя выражение (4.2) в уравнение (4.1) и выполняя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \delta-\frac{x^2}{2R_1}-\frac{y^2}{2R_2} &= \frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2}p_0(I_0-I_1x^2-I_2y^2)+ \\ &+(\beta_1+\beta_2)\left[A+\frac{1}{3}p_0\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$I_0 = b\mathbf{K}(e), \quad I_1 = \frac{b}{e^2a^2}[\mathbf{K}(e)-\mathbf{E}(e)]$$

$$I_2 = \frac{b}{e^2a^2}\left[\frac{a^2}{b^2}\mathbf{E}(e)-\mathbf{K}(e)\right]$$

Здесь $\mathbf{K}(e)$, $\mathbf{E}(e)$ – полные эллиптические интегралы с модулем e.

В (4.3) входит произвольная постоянная A. Появление этой постоянной связано с тем, что температуру по известному тепловому потоку можно определить только до произвольной постоянной.

Если подставить выражение (4.2) в уравнение равновесия

$$P = \iint\limits_{\Omega} p(x, y)dxdy$$

то получим

$$p_0 = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi ab} = \frac{3}{2}p_c, \quad p_c = \frac{P}{\pi ab}$$

где P – нормальная сила, прижимающая упругие тела. Таким образом, формула (4.2) принимает вид

$$p(x, y) = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi ab}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \tag{4.4}$$

Наибольшее давление на площадке контакта

$$p_{\max} = 3P/(2\pi ab) \tag{4.5}$$

Выражения (4.4) и (4.5) внешне не отличаются от соответствующих формул, полученных без учета теплообразования. Разница заключается в том, что полуоси эллипса a и b с учетом и без учета теплообразования будут разные. Поэтому и величины давлений, подсчитанных с учетом и без учета теплообразования, будут различными.

Для определения размеров площадки контакта из (4.3) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{1}{2R_1} &= \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)p_0I_1-\frac{1}{3}(\beta_1+\beta_2)p_0\frac{b^2}{a^2+b^2}\\ \frac{1}{2R_2} &= \frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)p_0I_2-\frac{1}{3}(\beta_1+\beta_2)p_0\frac{a^2}{a^2+b^2}\end{aligned}\tag{4.6}$$

Введем обозначение $\gamma=(\beta_1+\beta_2)/(\vartheta_1+\vartheta_2)$. Тогда система уравнений (4.6) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1} &= p_0(\vartheta_1+\vartheta_2)\left(I_1-\frac{2}{3}\gamma\frac{1-e^2}{2-e^2}\right)\\ \frac{1}{R_2} &= p_0(\vartheta_1+\vartheta_2)\left(I_2-\frac{2}{3}\gamma\frac{1}{2-e^2}\right)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Из уравнений (4.7) находим

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(\mathbf{K}-\mathbf{E})-\gamma a\varepsilon(1-e^2)}{(\mathbf{E}/(1-e^2)-\mathbf{K})-\gamma a\varepsilon},\quad \varepsilon = \frac{2}{3}\frac{e^2}{(2-e^2)\sqrt{1-e^2}}\tag{4.8}$$

$$a = [P(\vartheta_1+\vartheta_2)R_1]^{1/3}\alpha_a\tag{4.9}$$

$$\alpha_a = \left\{\frac{3}{2\pi}\left[\frac{1}{e^2}(\mathbf{K}-\mathbf{E})-\frac{2}{3}\gamma a\frac{\sqrt{1-e^2}}{2-e^2}\right]\right\}^{1/3}\tag{4.10}$$

Здесь $\mathbf{K}=\mathbf{K}(e)$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}(e)$ – полные эллиптические интегралы.

По формуле (4.8) можно определить эксцентриситет e, а из выражений (4.9), (4.10) можно найти большую полуось a эллипса, ограничивающего площадку контакта. В данном случае определение величин e^2 и a по формулам (4.8)–(4.10) следует производить методом итерации.

На основании формул (4.8), (4.10) составлена таблица, при помощи которой нетрудно производить численные расчеты.

5. Пример расчета. Пусть $R_2/R_1 = 0.68$. По таблице находим (при $\gamma a = 0$) $e_{(0)}^2 = 0.40$, $\alpha_{a(0)} = 0.767$. По формуле (4.9) находим $a_{(0)}$. Затем вычисляем величину γ (γ имеет размерность [ед. длины]$^{-1}$). Пусть $a_{(0)}\gamma = 0.50$. Далее по таблице находим новые значения e^2 и α_a: $e_{(1)}^2 = 0.425$, $\alpha_{a(1)} = 0.726$. По формуле (4.9) находим $a_{(1)}$ и затем $\gamma a_{(1)}$. Имеем

$$\gamma a_{(1)} = \gamma a_{(0)}\frac{\alpha_{a(1)}}{\alpha_{a(0)}} = 0.50\frac{0.726}{0.767} = 0.473$$

Далее, при $R_2/R_1 = 0.68$ и $\gamma a_{(1)} = 0.473$ по таблице (с помощью интерполяции) находим: $e_{(2)}^2 = 0.423$, $\alpha_{a(2)} = 0.725$. Последующие приближения выполнять нецелесообразно.

e^2	$\gamma a = 0$		$\gamma a = 0.5$		$\gamma a = 1.0$	
	R_2/R_1	α_a	R_2/R_1	α_a	R_2/R_1	α_a
0	1	0.722	1	0.667	1	0.601
0.1	0.925	0.731	0.930	0.677	0.941	0.614
0.2	0.846	0.741	0.858	0.690	0.878	0.629
0.3	0.765	0.753	0.782	0.704	0.809	0.647
0.4	0.682	0.767	0.701	0.721	0.733	0.667
0.5	0.594	0.783	0.616	0.740	0.650	0.691
0.6	0.502	0.803	0.524	0.764	0.557	0.721
0.7	0.405	0.829	0.424	0.795	0.452	0.757
0.8	0.297	0.863	0.312	0.836	0.333	0.807
0.9	0.174	0.921	0.182	0.903	0.193	0.884
1.0	0	–	0	–	0	–

Итак, имеем $a_{(2)} = a^*\alpha_{a(2)} = 0.725a^*$, $b_{(2)} = a_{(2)}\sqrt{1 - e^2_{(2)}} = 0.551a^*$, где $a^* = [P(\vartheta_1 + \vartheta_2)R_1]^{1/3}$.

Площадь области контакта с учетом теплообразования $\pi a_{(2)}b_{(2)} = 0.399\pi a^{*2}$. То же, но без учета теплообразования $\pi a_{(0)}b_{(0)} = 0.456\pi a^{*2}$.

Наибольшее давление на площадке контакта определяется формулой (4.5). Имеем $\pi a_{(0)}b_{(0)}/\pi a_{(2)}b_{(2)} = 1.143$. Следовательно, в данном случае, наибольшее давление с учетом теплообразования на 14.3% больше, чем без учета теплообразования. Размеры площадки контакта при этом уменьшились.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коровчинский М.В.* Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкосновения. М.: Ин-т машиноведения, 1961. 27 с.
2. *Грилiцький Д.В.* Термоупружні контактні задачі в трибології. Київ: ІЗМН, 1996. 203 с.
3. *Грилицкий Д.В., Краснюк П.П.* Стационарный термоупругий контакт двух цилиндров с фрикционным теплообразованием // Трение и износ, 1996. Т. 17. № 3. С. 312–319.
4. *Davies B.* Integral Transforms and Their Applications. New York: Springer, 1978. 410 c.
5. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992. 431 с.
6. *Kassir M.K., Sih G.C.* Three-Dimensional Crack Problems. Leyden: Noordhoff, 1975. 452 c.
7. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
8. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Киев, Гомель

Поступила в редакцию
23.08.2002