МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2004

УДК 531.36;531.352

© 2004 г. А. П. МАРКЕЕВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Рассматривается периодическая по времени гамильтонова система с одной степенью свободы. Предполагается, что система имеет положение равновесия, а функция Гамильтона аналитична в его окрестности. Предлагается конструктивный алгоритм получения условий устойчивости положения равновесия. В его основе лежит процедура построения и анализа симплектического отображения окрестности положения равновесия на себя. Рассмотрены все возможные резонансы до четвертого порядка включительно, а также случай отсутствия этих резонансов. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости выражены через коэффициенты производящей функции отображения. В качестве приложения решена задача об устойчивости в одном частном случае вращения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите.

1. Введение. Многие задачи классической и небесной механики приводят к необходимости исследования устойчивости положения равновесия периодической по независимой переменной гамильтоновой системы с одной степенью свободы. К ним, например, относятся задачи об устойчивости периодических движений твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести, многочисленные задачи о движении спутника относительно центра масс, вопросы исследования движения в окрестности периодических траекторий ограниченной задачи трех тел и т.д.

К настоящему времени задача об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем изучена довольно подробно. Краткая история вопроса, основная библиография, полученные теоретические результаты и их приложения описаны в обзорной статье [1]. В основе алгоритмов исследования лежит метод нормальных форм Пуанкаре. Сущность этого метода состоит в том, что при помощи канонического преобразования функция Гамильтона приводится к некоторой простейшей (нормальной) форме. Соответствующая каноническая система дифференциальных уравнений существенно проще исходной, что облегчает ее исследование.

Но когда функция Гамильтона явно зависит от времени, процедура получения нормальной формы является довольно сложной. Сначала требуется найти периодическое по времени линейное каноническое преобразование, приводящее квадратичную по фазовым переменным часть гамильтониана к нормальной форме. После этого осуществляется нормализация членов третьей и более высоких степеней в разложении гамильтониана в ряд. Соответствующее нелинейное нормализующее преобразование близко к тождественному и задается рядами с периодическими по времени коэффициентами. Эти ряды строятся при помощи преобразования Биркгофа или его современных модификаций.

Техническая сторона процедуры нормализации сильно упрощается, если использовать метод точечных отображений, как это сделано в [2] при исследовании треугольных лагранжевых решений эллиптической задачи трех тел. В предложенном в [2] способе осуществляется нормализация не самой функции Гамильтона, а производящей функции отображения, порождаемого соответствующей этой функции канонической системой дифференциальных уравнений движения. А уже затем по нормальной форме производящей функции восстанавливается нормальная форма функции Гамильтона. Однако предложеннный в [2] способ сохраняет один существенный недостаток классической методики, так как, по-прежнему, требует предварительной нормализации линейных уравнений возмущенного движения.

В данной работе предлагается способ исследования устойчивости положения равновесия периодических по времени гамильтоновых систем с одной степенью свободы, который свободен от упомянутого недостатка. Следуя [2], задача об устойчивости положения равновесия сводится к эквивалентной задаче об устойчивости неподвижной точки отображения, сохраняющего площадь. Последняя задача к настоящему времени исследована весьма подробно [3–6]. В данной статье на основе результатов работы [6] получены условия устойчивости и неустойчивости, которые выражены через коэффициенты разложения в ряд специальным образом построенной производящей функции отображения. Предложенная процедура исследования должна, как правило, осуществляться при помощи компьютерных вычислений.

2. Получение отображения. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, движение которой описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона $H(q, p, t)$. Будем считать, что функция H аналитична в окрестности точки $q = p = 0$, соответствующей положению равновесия системы, а ее разложение в ряд имеет вид

$$H = H_2(q, p, t) + H_3(q, p, t) + H_4(q, p, t) + \ldots + H_k(q, p, t) + \ldots \tag{2.1}$$

где H_k – формы степени k относительно q, p с 2π-периодическими по t коэффициентами.

Пусть q_0, p_0 – начальные значения величин q, p. Функции $q = q(q_0, p_0, t)$, $p = p(q_0, p_0, t)$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям движения, задают каноническое унивалентное преобразование $q_0, p_0 \to q, p$ [7]. Пусть q_1, p_1 – значения этих функций при $t = 2\pi$, т.е. $q_1 = q(q_0, p_0, 2\pi)$, $p_1 = p(q_0, p_0, 2\pi)$. При достаточно малых q_0, p_0 функции q_1, p_1 будут аналитическими относительно q_0, p_0 и задают отображение T окрестности положения равновесия на себя. Это отображение сохраняет площадь и имеет неподвижную точку $q_0 = 0, p_0 = 0$. Задача об устойчивости положения равновесия исходной системы эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $q_0 = 0, p_0 = 0$ отображения T.

Укажем конструктивный алгоритм построения отображения T. Пусть $\mathbf{X}(t)$ – фундаментальная матрица решений линеаризованных уравнений движения. Ее элементы $x_{i,j}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_{1j}}{dt} = \frac{\partial H_2(x_{1j}, x_{2j}, t)}{\partial x_{2j}}, \quad \frac{dx_{2j}}{dt} = -\frac{\partial H_2(x_{1j}, x_{2j}, t)}{\partial x_{1j}} \quad (j = 1, 2) \tag{2.2}$$

и начальным условиям

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0 \tag{2.3}$$

Вместо переменных q, p введем новые канонически сопряженные переменные ξ, η по формулам

$$q = x_{11}(t)\xi + x_{12}(t)\eta, \quad p = x_{21}(t)\xi + x_{22}(t)\eta \tag{2.4}$$

Замена (2.4) является каноническим унивалентным преобразованием. Разложение нового гамильтониана $\Gamma(\xi, \eta, t)$ в ряд не содержит членов второй степени относительно ξ, η:

$$\Gamma = \Gamma_3(\xi, \eta, t) + \Gamma_4(\xi, \eta, t) + \ldots + \Gamma_k(\xi, \eta, t) + \ldots \tag{2.5}$$

где Γ_k – это форма H_k из разложения (2.1), в которой q, p выражены через ξ, η по формулам (2.4).

Отметим, что из равенств (2.3) и (2.4) следует, что начальные значения ξ_0, η_0 величин ξ, η совпадают с начальными значениями q_0, p_0 величин q, p:

$$\xi_0 = q_0, \quad \eta_0 = p_0 \tag{2.6}$$

Замена переменных (2.4) приводит задачу о построении отображения T к нахождению отображения $\xi_0, \eta_0 \to \xi_1, \eta_1$ за период изменения t от 0 до 2π. При этом существенно, что, из-за отсутствия членов второй степени в разложении (2.5), это отображение будет близким к тождественному.

Будем искать не само отображение $\xi_0, \eta_0 \to \xi_1, \eta_1$, а его производящую функцию $\Psi(\xi_1, \eta_0)$. Эта функция равна вычисленной при $t = 2\pi$ функции $\Phi(\xi_1, \eta_0, t)$, которая удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Gamma\left(\xi_1, \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_1}, t\right) = 0 \tag{2.7}$$

Неявно отображение $\xi_0, \eta_0 \to \xi_1, \eta_1$ задается равенствами

$$\xi_0 = \frac{\partial\Psi}{\partial\eta_0}, \quad \eta_1 = \frac{\partial\Psi}{\partial\xi_1} \tag{2.8}$$

Функцию Φ ищем в виде ряда

$$\Phi = \xi_1\eta_0 + \Phi_3(\xi_1, \eta_0, t) + \Phi_4(\xi_1, \eta_0, t) + \dots \tag{2.9}$$

где Φ_k – форма степени k относительно ξ_1, η_0. Из (2.8),(2.9) следует, что для любого k имеет место тождество

$$\Phi_k(\xi_1, \eta_0, 0) \equiv 0 \tag{2.10}$$

Подставив разложения (2.5) и (2.9) в левую часть уравнения (2.7) и приравняв нулю совокупности членов третьей, четвертой и т.д. степеней, получим уравнения для нахождения $\Phi_3, \Phi_4, \dots$

$$\frac{\partial\Phi_3(\xi_1, \eta_0, t)}{\partial t} = -\Gamma_3(\xi_1, \eta_0, t) \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\Phi_4(\xi_1, \eta_0, t)}{\partial t} = -\Gamma_4(\xi_1, \eta_0, t) - \frac{\partial\Gamma_3(\xi_1, \eta_0, t)}{\partial\eta_0}\frac{\partial\Phi_3(\xi_1, \eta_0, t)}{\partial\xi_1} \tag{2.12}$$

....

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ξ_1, η_0 в левой и правой частях этих уравнений, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов форм $\Phi_3, \Phi_4, \dots$. В силу тождества (2.10) при $t = 0$ значения этих коэффициентов равны нулю.

Уравнения для коэффициентов должны рассматриваться совместно с уравнениями (2.2), определяющими элементы $x_{ij}(t)$ фундаментальной матрицы $\mathbf{X}(t)$, входящие в замену (2.4) и, следовательно, содержащиеся в выражениях для функций $\Gamma_3, \Gamma_4, \dots$. Во многих задачах механики при исследовании устойчивости достаточно получить отображение с точностью до членов третьей степени относительно q_0, p_0. Тогда число совместно рассматриваемых уравнений равно 13 (4 уравнения системы (2.2), 4 уравнения для коэффициентов формы Φ_3 и 5 – для коэффициентов формы Φ_4).

Проинтегрировав упомянутую систему уравнений по t от 0 до 2π, получим разложение функции $\Psi(\xi_1, \eta_0)$ в виде ряда

$$\Psi = \xi_1\eta_0 + \Phi_3(\xi_1, \eta_0, 2\pi) + \Phi_4(\xi_1, \eta_0, 2\pi) + \ldots \tag{2.13}$$

Разрешив равенства (2.8) относительно ξ_1, η_1, получим отображение $\xi_0, \eta_0 \to \xi_1, \eta_1$ в явном виде в форме рядов.

Учтя затем равенства (2.6) и формулы замены (2.4), получим окончательно отображение $q_0, p_0 \to q_1, p_1$ в виде

$$\left\|\begin{matrix} q_1 \\ p_1 \end{matrix}\right\| = \mathbf{X}(2\pi)\left\|\begin{matrix} q_0 - \dfrac{\partial S_3}{\partial p_0} + \dfrac{\partial^2 S_3}{\partial p_0 \partial q_0}\dfrac{\partial S_3}{\partial p_0} - \dfrac{\partial S_4}{\partial p_0} + O_4 \\ p_0 + \dfrac{\partial S_3}{\partial q_0} - \dfrac{\partial^2 S_3}{\partial q_0^2}\dfrac{\partial S_3}{\partial p_0} + \dfrac{\partial S_4}{\partial q_0} + O_4 \end{matrix}\right\| \tag{2.14}$$

Здесь O_4 – совокупность членов выше третьей степени относительно q_0, p_0, а

$$S_k = S_k(q_0, p_0) = \Phi_k(q_0, p_0, 2\pi) \quad (k = 3, 4) \tag{2.15}$$

3. Условия устойчивости и неустойчивости. Рассмотрим линеаризованное отображение (2.14)

$$q_1 = y_{11}q_0 + y_{12}p_0, \quad p_1 = y_{21}q_0 + y_{22}p_0 \tag{3.1}$$

Здесь и далее для краткости принято обозначение $y_{ij} = x_{ij}(2\pi)$.

Характеристическое уравнение отображения (3.1) имеет вид

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0, \quad (2a = y_{11} + y_{22}) \tag{3.2}$$

Если $|a| > 1$, то корни этого уравнения вещественные, причем один из них имеет модуль, больший единицы. В этом случае положение равновесия неустойчиво. И не только в линейном приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи [8]. Если $|a| \le 1$, то для строгого решения вопроса об устойчивости недостаточно анализа линейного приближения.

Для получения условий устойчивости и неустойчивости при $|a| \le 1$ воспользуемся результатами работы [6]. Для этого целесообразно предварительно сделать в отображении (2.14) линейную замену переменных

$$\begin{gathered} q = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p = n_{21}Q + n_{22}P \\ (d = n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12} \ne 0) \end{gathered} \tag{3.3}$$

выбрав ее так, чтобы в новых переменных матрица линеаризованного отображения имела вещественную нормальную форму **G**.

Преобразование (3.3) является каноническим с валентностью $c = d^{-1}$, и в новых переменных отображение $Q_0, P_0 \to Q_1, P_1$ сохраняет площадь. Оно может быть записано в виде, аналогичном (2.14)

$$\left\|\begin{matrix} Q_1 \\ P_1 \end{matrix}\right\| = \mathbf{G}\left\|\begin{matrix} Q_0 - \dfrac{\partial F_3}{\partial P_0} + \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial P_0 \partial Q_0}\dfrac{\partial F_3}{\partial P_0} - \dfrac{\partial F_4}{\partial P_0} + O_4 \\ P_0 + \dfrac{\partial F_3}{\partial Q_0} - \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0^2}\dfrac{\partial F_3}{\partial P_0} + \dfrac{\partial F_4}{\partial Q_0} + O_4 \end{matrix}\right\| \tag{3.4}$$

Здесь $F_k = F_k(Q_0, P_0)$ – формы степени k относительно Q_0, P_0, а O_4 – совокупность членов выше третьей степени. Можно показать, что функции F_3 и F_4 выражаются через S_3 и S_4 и коэффициенты n_{ij} линейного нормализующего преобразования (3.3) по следующим формулам:

$$F_3 = cS_3(n_{11}Q_0 + n_{12}P_0, n_{21}Q_0 + n_{22}P_0) \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} F_4 = cS_4(n_{11}Q_0 + n_{12}P_0, n_{21}Q_0 + n_{22}P_0) + \Delta \\ \Delta = \frac{1}{2}\left[n_{12}n_{22}\left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0}\right)^2 - 2n_{12}n_{21}\left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0}\right)\left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0}\right) + n_{11}n_{21}\left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0}\right)^2\right] \end{gathered} \tag{3.6}$$

Запишем формы F_3 и F_4 в виде

$$F_k = \sum_{\nu + \mu = k} f_{\nu\mu}Q_0^\nu P_0^\mu \quad (k = 3, 4) \tag{3.7}$$

Опираясь на полученные ранее результаты [6], можно выписать условия устойчивости и неустойчивости, выразив их через коэффициенты $f_{\nu,\mu}$ форм (3.7), входящих в отображение (3.4). Возможны семь отличающихся один от другого случаев.

Для первых четырех случаев характеристическое уравнение (3.2) имеет кратные вещественные корни: $\rho_1 = \rho_2 = 1$, когда $a = 1$ (резонанс первого порядка; случаи *1* и *2*) или $\rho_1 = \rho_2 = -1$, когда $a = -1$ (резонанс второго порядка; случаи *3* и *4*).

Случай 1. Пусть $a = 1$, а $y_{12} = y_{21} = 0$. В этом случае формы F_3 и F_4 совпадают с формами S_3 и S_4 соответственно, так как матрица $\mathbf{X}(2\pi)$ в отображении (2.14) уже́ имеет нормальную форму

$$\mathbf{X}(2\pi) = \mathbf{G} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

и преобразование (3.3) является тождественным ($q = Q$, $p = P$).

Если хотя бы один из коэффициентов формы S_3 отличен от нуля, то положение равновесия $q = p = 0$ исходной системы неустойчиво. Если $S_3 \equiv 0$, а уравнение $\varphi(x) = 0$, где $\varphi(x) = S_4(\sin x, \cos x)$, не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво; если же существует вещественный корень $x = x_*$, но $d\varphi/dx \neq 0$ при $x = x_*$, то имеет место неустойчивость.

Случай 2. В этом случае $a = 1$, но хотя бы одна из величин y_{12} или y_{21} отлична от нуля. Тогда

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Нормализующее преобразование (3.3) может быть построено следующим образом. Если $y_{12} \neq 0$, $y_{21} = 0$, то

$$n_{11} = \sqrt{|y_{12}|}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 0, \quad n_{22} = \sqrt{|y_{12}|}/y_{12} \tag{3.8}$$

Если $y_{12} = 0$, $y_{21} \neq 0$, то

$$n_{11} = 0, \quad n_{12} = \sqrt{|y_{21}|}/y_{21}, \quad n_{21} = \sqrt{|y_{21}|}, \quad n_{22} = 0 \tag{3.9}$$

А если $y_{12}y_{21} \neq 0$, то

$$n_{11} = y_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 1 - y_{11}, \quad n_{22} = 1 \tag{3.10}$$

Условия устойчивости и неустойчивости выглядят так: если $f_{30} \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво; если же $f_{30} = 0$ и $2f_{40} + f_{21}^2 < 0$, то имеет место устойчивость, а если $f_{30} = 0$ и $2f_{40} + f_{21}^2 > 0$, то – неустойчивость.

Случай 3. Пусть $a = -1$, $y_{12} = y_{21} = 0$. Тогда

$$\mathbf{X}(2\pi) = \mathbf{G} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

и, как в случае *1*, замена переменных (3.3) будет тождественной. Чтобы сформулировать условия устойчивости и неустойчивости, образуем форму четвертой степени $R_4(q_0, p_0)$ по формуле

$$R_4 = 2S_4 - \frac{\partial S_3}{\partial q_0}\frac{\partial S_3}{\partial p_0}$$

Тогда, если уравнение $\psi(x) = 0$, где $\psi(x) = R_4(\sin x, \cos x)$, не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво. Если же существует вещественный корень $x = x_*$, но $d\psi/dx \neq 0$ при $x = x_*$, то имеет место неустойчивость.

Случай 4. Пусть $a = -1$, но хотя бы одна из величин y_{12} или y_{21} отлична от нуля. Тогда

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

При этом, если $y_{12} \neq 0$, $y_{21} = 0$, то величины n_{ij} в нормализующей замене (3.3) определяются по формулам (3.8), а если $y_{12} = 0$, $y_{21} \neq 0$, то – по формулам (3.9). Если же $y_{12}y_{21} \neq 0$, то n_{ij} можно взять такими

$$n_{11} = y_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = -(1 + y_{11}), \quad n_{22} = 1 \tag{3.11}$$

Положим

$$g = 8f_{40} - 12f_{30}f_{21} - 9f_{30}^2 \tag{3.12}$$

Если $g > 0$, то положение равновесия неустойчиво, а если $g < 0$, то устойчиво.

Теперь рассмотрим оставшиеся три случая, когда $|a| < 1$. Тогда характеристические показатели $\pm i\lambda$ будут чисто мнимыми, а корни характеристического уравнения (3.2) комплексно сопряженными с модулями, равными единице: $\rho_1 = \exp(i2\pi\lambda)$, $\rho_2 = \exp(-i2\pi\lambda)$, причем

$$\cos(2\pi\lambda) = a \tag{3.13}$$

Нормальная форма линеаризованного отображения в этих случаях задает поворот на угол $2\pi\sigma$:

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} \cos(2\pi\sigma) & \sin(2\pi\sigma) \\ -\sin(2\pi\sigma) & \cos(2\pi\sigma) \end{Vmatrix}, \quad \sigma = \delta\lambda, \quad \delta = \mathrm{sign}[y_{12}\sin(2\pi\lambda)]$$

При этом коэффициенты n_{ij} в нормализующем преобразовании (3.3) можно определить по формулам

$$\begin{gathered} n_{11} = -\delta\kappa y_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = \delta\kappa[y_{11} - \cos(2\pi\lambda)], \quad n_{22} = -\kappa\sin(2\pi\lambda) \\ \kappa = |y_{12}\sin(2\pi\lambda)|^{-1/2} \end{gathered} \tag{3.14}$$

Введем еще обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{30}-f_{12}, \quad a_2 = f_{12}+3f_{30}, \quad a_3 = f_{22}-f_{40}-f_{04} \\ b_1 &= f_{21}-f_{03}, \quad b_2 = f_{21}+3f_{03}, \quad b_3 = f_{13}-f_{31} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} k &= 8(3f_{40}+f_{22}+3f_{04})+6(a_1b_2-a_2b_1)-8a_2b_2+ \\ &+9\operatorname{ctg}(3\pi\sigma)(a_1^2+b_1^2)+3\operatorname{ctg}(\pi\sigma)(a_2^2+b_2^2) \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$k_1 = 2[4a_3+9a_1b_1-a_2b_2+3\operatorname{ctg}(\pi\sigma)(a_1a_2-b_1b_2)] \tag{3.17}$$

$$k_2 = 8b_3-9(a_1^2-b_1^2)+(a_2^2-b_2^2)+6\operatorname{ctg}(\pi\sigma)(a_1b_2+a_2b_1) \tag{3.18}$$

Случай 5. Пусть $a = -1/2$, т.е. имеет место резонанс третьего порядка. Тогда, если хотя бы одна из величин a_1 или b_1 отлична от нуля, то положение равновесия неустойчиво.

Случай 6. Пусть $a = 0$ (резонанс четвертого порядка). Положение равновесия устойчиво, если $|k| > \sqrt{k_1^2+k_2^2}$ и неустойчиво, если $|k| < \sqrt{k_1^2+k_2^2}$.

Случай 7. Здесь $|a| < 1$, $a \neq -1/2$, $a \neq 0$ (нерезонансный случай). Если $k \neq 0$, то положение равновесия устойчиво.

4. Об устойчивости вращения спутника в плоскости эллиптической орбиты. Плоские движения спутника – твердого тела относительно центра масс на эллиптической орбите описываются дифференциальным уравнением второго порядка [9]:

$$(1+e\cos\nu)\frac{d^2\theta}{d\nu^2}-2e\sin\nu\frac{d\theta}{d\nu}+\alpha\sin\theta\cos\theta = 2e\sin\nu, \quad \alpha = \frac{3(A-C)}{B} \tag{4.1}$$

Здесь A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника, B – момент инерции относительно главной оси Oy, которая при плоских движениях перпендикулярна плоскости орбиты центра масс спутника, e – эксцентриситет орбиты, ν – истинная аномалия, θ – угол между главной осью инерции Oz и радиусом-вектором центра масс O спутника относительно притягивающего центра (фиг. 1).

Известно [9], что если параметры α и e связаны соотношением $\alpha = 6e$, то уравнение (4.1) допускает частное решение

$$\theta = \theta^*(\nu) = \nu/2 \tag{4.2}$$

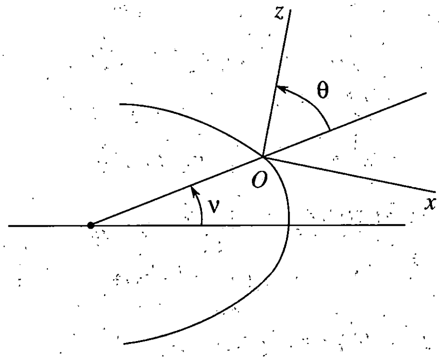
Так как величины моментов инерции подчиняются неравенствам треугольника, то $|\alpha| \le 3$ и, следовательно, для решения (4.2) эксцентриситет орбиты не может быть больше 1/2. Поэтому

$$0 < e \le 0.5 \tag{4.3}$$

Для решения (4.2) спутник вращается в плоскости орбиты, совершая в абсолютном пространстве три оборота за время, равное двум периодам обращения центра масс по орбите. Устойчивость вращения (4.2) в первом (линейном) приближении исследовалась в работе [10]. В данной статье решается нелинейная задача об устойчивости этого движения спутника.

Будем использовать гамильтонову форму уравнений движения. Канонически сопряженные переменные q, p в возмущенном движении введем при помощи равенств

$$\theta = \theta^*+\frac{q}{1+e\cos\nu}, \quad \frac{dq}{d\nu} = p \tag{4.4}$$



Фиг. 1

Из (4.1), (4.2) и (4.4) можно найти выражение для функции Гамильтона H возмущенного движения. Он запишется в виде ряда (2.1), в котором

$$H_2 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{7e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}q^2$$

$$H_3 = -\frac{2e\sin\nu}{(1+e\cos\nu)^2}q^3, \quad H_4 = -\frac{e\cos\nu}{(1+e\cos\nu)^3}q^4$$

При $0 < e \ll 1$ задачу об устойчивости можно исследовать асимптотическими методами. Аналогично [11], можно при помощи метода Депри–Хори [12] построить каноническое 2π-периодическое по ν нелинейное преобразование $q, p \to \tilde{q}, \tilde{p}$, приводящее гамильтониан к нормальной форме

$$\begin{aligned} H &= \lambda r + c_2 r^2 + O(r^{5/2}), \quad 2r = \tilde{q}^2 + \tilde{p}^2 \\ \lambda &= \sqrt{21}e + O(e^3), \quad c_2 = -1/4 + O(e^2) \end{aligned} \tag{4.5}$$

где коэффициенты λ и c_2 – постоянные величины. При достаточно малых e величина c_2 отлична от нуля и, следовательно, согласно теореме Арнольда–Мозера [2, 13], вращение спутника (4.2) устойчиво по Ляпунову.

При значениях эксцентриситета, не являющихся малыми, необходимо численное исследование. Оно было проведено при помощи алгоритма, изложенного в п. 2, 3.

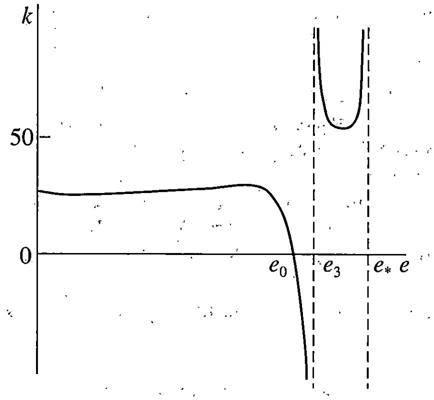
Оказалось, что в интервале

$$0 < e < e_* = 0.069041 \tag{4.6}$$

величина a, входящая в характеристическое уравнение (3.2), удовлетворяет неравенствам $1 > a > -1$ и, следовательно, здесь вращение (4.2) устойчиво в первом (линейном) приближениии. Если же $e_* < e \le 0.5$, то $a < -1$ и имеет место неустойчивость по Ляпунову. Эти результаты совпадают с соответствующими результатами статьи [10].

Для строгого решения задачи об устойчивости движения (4.4) при значениях эксцентриситета из области (4.6) устойчивости в первом приближении, а также при $e = e_*$ был проведен нелинейный анализ.

Используя равенства (3.13),(4.5) и свойство непрерывности характеристических показателей по параметру e, можно показать, что в интервале (4.6) и на его границе $\lambda = \lambda(e) = \arccos a/(2\pi)$.



Фиг. 2

В граничной точке $e = e_*$ элементы y_{ij} матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ имеют такие числовые значения: $y_{11} = y_{22} = -1$, $y_{12} = 12.25275$, $y_{21} = 0$. Поэтому $a = -1$, $\lambda = 1/2$, т.е. имеет место резонанс второго порядка, отвечающий случаю *4*. Проведя вычисления величины (3.12) по алгоритму п. 3, получаем $g = -678.0980 < 0$. Следовательно, при $e = e_*$ движение (4.2) устойчиво по Ляпунову.

Внутри интервала (4.6) возможен один резонанс третьего порядка ($e = e_3 = 0.059881$; $a = -1/2$, $\lambda = 1/3$) и один резонанс четвертого порядка ($e = e_4 = 0.048967$; $a = 0$, $\lambda = 1/4$). Вычисления показали, что при $e = e_3$ сумма квадратов величин a_1 и b_1 из (3.15) равна $5.17895 \neq 0$. Поэтому (см. случай *5*) при $e = e_3$ движение (4.2) неустойчиво. При $e = e_4$ величины k и k_1, k_2, определяемые равенствами (3.15)–(3.18), таковы: $k = 28.93519$, $\sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 41.13182$. Следовательно (см. случай *6*) при $e = e_4$ движение (4.2) также неустойчиво.

Теперь рассмотрим нерезонансный случай (случай *7*), когда $0 < e < e_*$, $e \neq e_3$, $e \neq e_4$. На фиг. 2 показана зависимость функции k из (3.16) от величины эксцентриситета. График этой функции имеет две вертикальные асимптоты: $e = e_3$ и $e = e_*$. Функция k обращается в нуль при $e = e_0 = 0.054773$. Следовательно, если $e \neq e_0$, то движение (4.2) устойчиво.

Таким образом, вопрос об устойчивости плоских вращений (4.2) спутника на эллиптической орбите решен для всех значений эксцентриситета из физически допустимой области (4.3) его изменения, кроме одного значения $e = e_0$. Для $e = e_3$, $e = e_4$ и для всех значений e из области $e_* < e \leq 0.5$ вращение неустойчиво. При остальных значениях e ($e \neq e_0$) имеет место устойчивость по Ляпунову.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00831) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (1477.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А. П.* Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 114–130.
2. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М. : Наука, 1978. 312 с.

3. *Levi-Civita T.* Sorpa alcuni criteri di instabilita // Ann. di Mat. Pura et Appl. Ser. 3. 1901. V. 5. P. 221–307.
4. *Siegel C.L.* Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin: Springer, 1956 = Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
5. *Markeev A.A.* The method of pointwise mappings in the stability problem of two-segment trajectories of the Birkhoff billiards // Dynamical Systems in Classical Mechanics. Adv. Math. Sci. Amer. Math. Soc. Ser. 2. 1995. V. 168. P. 211–226.
6. *Маркеев А. П.* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 591 с.
8. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
9. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
10. *Хентов А.А.* Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс // Космич. исследования. 1968. Т. 6. Вып. 5. С. 793–795.
11. *Маркеев А.П., Бардин Б.С.* Об одном плоском вращательном движении спутника на эллиптической орбите // Космич. исследования. 1994. Т. 32. Вып. 6. С. 43–49.
12. *Giacaglia G. E. O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. Berlin etc.: Springer, 1972. 369 p.
13. *Moser J. K.* Lectures on Hamiltonian Systems. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968. 60 p.

Москва

Поступила в редакцию
10.12.2003