МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. А.Д. ПАНОВ

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ИЗОТРОПНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается метод построения определяющих соотношений для изотропного твердого тела, при котором не требуется традиционного априорного постулирования их математического вида или вида энергетических функций, из которых эти соотношения следуют. Показано, что для однозначного определения энергетических функций при произвольном напряженном состоянии необходима и достаточна информация, полученная в двух базовых экспериментах. Установлены определяющие соотношения, адекватно описывающие нелинейные эффекты при деформировании твердых тел, связанные с тензорно нелинейным характером этих соотношений. Определены условия, при которых эти соотношения становятся тензорно линейными. Рассмотрены особенности получения замкнутой системы разрешающих уравнений, учитывающие специфику определения тензора логарифмических деформаций, через который выражен закон состояния. Для малых упругих деформаций получены физически линейные определяющие соотношения, описывающие, в отличие от соответствующих соотношений классической теории упругости, геометрически нелинейные эффекты второго порядка при упругом деформировании изотропного твердого тела.

1. Общий вид определяющих соотношений. Рассматриваются изотермические процессы простого нагружения и простого деформирования изотропного твердого тела. При простом нагружении компоненты тензора напряжений изменяются пропорционально некоторому параметру нагружения. При простом деформировании происходит пропорциональное изменение компонент тензора деформаций. В первом случае задается напряженное состояние (НС), а деформации являются функциями отклика, подлежащими определению. Во втором наоборот, по заданному деформированному состоянию (ДС) определяются напряжения.

Как показано в работах [1–4], в качестве мер деформаций и напряжений, через которые записываются определяющие соотношения, а также при обработке экспериментальных диаграмм деформирования материала целесообразно использовать логарифмическую меру деформаций Генки и соответствующий этой мере тензор $\mathbf{H}$, определяемый через тензор – меру деформаций Фингера $\mathbf{F}$ по формуле:

$$\mathbf{H} = \ln(\mathbf{F}^{1/2}) \tag{1.1}$$

и тензор напряжений Треффтца $\mathbf{T}_{(0)}$, связанный с тензором напряжений Коши $\mathbf{T}$ соотношением

$$\mathbf{T}_{(0)} = \mathbf{T}dV/dv \tag{1.2}$$

где dV и dv – значения элементарного объема тела в конечном и начальном состояниях [5]. При выборе этой пары мер деформаций и напряжений вариация удельной энергии деформации δu_0 определяется сверткой именно этих тензоров [1]:

$$\delta u_0 = \mathbf{T}_{(0)} \cdot\cdot\, \delta\mathbf{H} \tag{1.3}$$

Только в этом случае определяющие соотношения будут корректно отражать реальные энергетические характеристики процесса деформирования, а получаемые в экспериментах диаграммы деформирования материала будут энергетически согласованы с его механическими свойствами [1–4].

В частности, при простом деформировании конечное значение внутренней удельной энергии деформации u_0 будет определяться тремя независимыми инвариантными характеристиками тензора **H**, в качестве которых можно выбрать первый инвариант тензора **H** и второй и третий инварианты девиатора **H**, т.е.

$$u_0(I_{H1}, J_{H2}, J_{H3}) = \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{T}_{(0)} \cdot\cdot\, d\mathbf{H}$$

$$I_{H1} = H_1 + H_2 + H_3, \quad J_{H2} = -0.5 \sum_{n=1}^{3} \mathrm{dev}^2 H_n, \quad J_{H3} = \mathrm{dev}H_1 \mathrm{dev}H_2 \mathrm{dev}H_3 \tag{1.4}$$

где H_1, H_2, H_3 – конечные значения главных компонент тензора **H**.

Из (1.4) следует, что при простом деформировании величина u_0 является потенциалом напряжений, т.е.

$$\mathbf{T}_{(0)} = \partial u_0 / \partial \mathbf{H} \tag{1.5}$$

Аналогично, при простом нагружении величина удельной дополнительной работы u_X определяется тремя независимыми инвариантами тензора и девиатора $\mathbf{T}_{(0)}$:

$$u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) = \int_0^{\mathbf{T}_{(0)}} \mathbf{H} \cdot\cdot\, d\mathbf{T}_{(0)}$$

$$I_{(0)1} = \sigma_{(0)1} + \sigma_{(0)2} + \sigma_{(0)3}, \quad J_{(0)2} = -0.5 \sum_{n=1}^{3} \mathrm{dev}^2 \sigma_{(0)n}, \quad J_{(0)3} = \mathrm{dev}\sigma_{(0)1} \mathrm{dev}\sigma_{(0)2} \mathrm{dev}\sigma_{(0)3} \tag{1.6}$$

где $\sigma_{(0)1}, \sigma_{(0)2}, \sigma_{(0)3}$ – конечные значения главных компонент тензора $\mathbf{T}_{(0)}$.

Из (1.6) следует, что при простом нагружении величина u_X является потенциалом логарифмических деформаций, т.е.

$$\mathbf{H} = \partial u_X / \partial \mathbf{T}_{(0)} \tag{1.7}$$

Используя соотношения между инвариантами девиатора J_{H2} и J_{H3} и инвариантами тензора I_{H1}, I_{H2} и I_{H3} [5]:

$$J_{H2} = I_{H2} - (1/3) I_{H1}^2$$

$$J_{H3} = I_{H3} - (1/3) I_{H1} I_{H2} + (2/27) I_{H1}^3 \tag{1.8}$$

правила дифференцирования инвариантов тензора по тензору

$$\partial I_{H1} / \partial \mathbf{H} = \mathbf{E}$$

$$\partial I_{H2} / \partial \mathbf{H} = I_{H1} \mathbf{E} - \mathbf{H}^T \tag{1.9}$$

$$\partial I_{H3} / \partial \mathbf{H} = (\mathbf{H}^T)^2 - I_{H1} \mathbf{H}^T + I_{H2} \mathbf{E}$$

и учитывая, что транспонированный тензор $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$, из соотношения (1.5), после преобразований получим общий вид тензорно нелинейной зависимости тензора напряжений $\mathbf{T}_{(0)}$ от тензора и девиатора логарифмических деформаций $\mathbf{H}$ при простом деформировании

$$\mathbf{T}_{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial I_{H1}}\mathbf{E} - \frac{\partial u_0}{\partial J_{H2}}\operatorname{dev}\mathbf{H} + \frac{\partial u_0}{\partial J_{H3}}\left(\operatorname{dev}^2\mathbf{H} + \frac{2}{3}J_{H2}\mathbf{E}\right) \tag{1.10}$$

где $\mathbf{E}$ – единичный тензор.

Аналогичные преобразования соотношений (1.7) приводят к обратному выражению, т.е. зависимости тензора $\mathbf{H}$ от тензора и девиатора $\mathbf{T}_{(0)}$ при простом нагружении

$$\mathbf{H} = \frac{\partial u_X}{\partial I_{(0)1}}\mathbf{E} - \frac{\partial u_X}{\partial J_{(0)2}}\operatorname{dev}\mathbf{T}_{(0)} + \frac{\partial u_X}{\partial J_{(0)3}}\left(\operatorname{dev}^2\mathbf{T}_{(0)} + \frac{2}{3}J_{(0)2}\mathbf{E}\right). \tag{1.11}$$

Относительная простота и компактность полученных соотношений (1.10) и (1.11), по сравнению с аналогичными соотношениями, получаемыми при выборе других мер напряжений и деформаций и их инвариантных характеристик при построении нелинейной теории [5, 6], подтверждает рациональность использованных при выводе этих соотношений величин.

Полученные общие выражения (1.10) и (1.11) должны быть конкретизированы определением скалярных энергетических функций (1.4) и (1.6). Как отмечается в работе [6], "... выбор формы зависимости удельной потенциальной энергии деформации от инвариантных характеристик деформации представляет трудную и, конечно, неразрешимую единственным образом задачу".

Общепринятый подход к решению этой задачи состоит в "априорном задании явного выражения удельной энергии деформации u_0, как функции инвариантов меры деформации... Рассмотрение простейших деформаций (всестороннее сжатие, растяжение, кручение), допускающих сравнение с опытом, дает основание для суждения о пригодности или непригодности предложенных представлений u_0 для рассматриваемого материала. Выбор варианта оправдывается степенью его близости к уравнениям состояния линейно упругого тела... Еще один критерий состоит в сравнительной доступности последующего математического рассмотрения. Наконец, в отступление от подходов механики сплошной среды, привлекают к построению определяющих уравнений статистические представления; предложенные соотношения корректируют и дополняют экспериментальной проверкой... Успеха в рассмотрении этой "главной неразрешенной задачи механики сплошной среды" (Трусделл) надеются достигнуть, постулируя достаточно общие требования к математической структуре задания определяющего уравнения, которые позволили бы отбраковывать или признавать приемлемым предложенный вариант" [5].

Ниже рассматривается принципиально новый подход к определению энергетических функций при деформировании твердого тела, при котором не требуется априорного постулирования математического выражения, задающего их вид, а он однозначно определяется на основе информации, полученной в базовых экспериментах. Данное исследование является обобщением и уточнением результатов, полученных автором в работах [1–4, 7, 8].

2. Теоретический анализ базовых напряженных состояний. Одним из базовых НС, используемых далее для определения энергетических функций, является НС – чистый сдвиг. Поскольку при этом НС, по его определению, $\sigma_{(0)1} = -\sigma_{(0)3} = \tau_{(0)}$, $\sigma_{(0)2} = 0$ и тензоры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_{(0)}$ равны своим девиаторам, то из общих соотношений (1.11) для НС – чистый сдвиг получим

$$H_1 = \frac{\bar{\partial} u_X}{\partial I_{(0)1}} - \tau_{(0)}\frac{\bar{\partial} u_X}{\partial J_{(0)2}} + \frac{1}{3}\tau_{(0)}^2\frac{\bar{\partial} u_X}{\partial J_{(0)3}}$$

$$H_2 = \frac{\bar{\partial} u_X}{\partial I_{(0)1}} - \frac{2}{3}\tau_{(0)}^2 \frac{\bar{\partial} u_X}{\partial J_{(0)3}} \tag{2.1}$$

$$H_3 = \frac{\bar{\partial} u_X}{\partial I_{(0)1}} + \tau_{(0)} \frac{\bar{\partial} u_X}{\partial J_{(0)2}} + \frac{1}{3}\tau_{(0)}^2 \frac{\bar{\partial} u_X}{\partial J_{(0)3}}$$

Черта над производными в (2.1) означает, что они определяются именно при НС – чистый сдвиг.

Из уравнений (2.1) следует, что, в общем случае, когда $\bar{\partial} u_X/\partial I_{(0)1} \neq 0$ и $\bar{\partial} u_X/\partial J_{(0)3} \neq 0$, логарифмическая деформация в направлении, перпендикулярном плоскости сдвига, не равна нулю, т.е. $H_2 \neq 0$, а деформация $H_3 \neq -H_1$ и, соответственно, объемная логарифмическая деформация $\theta_\tau = \ln(dV/dv) = H_1 + H_2 + H_3$ при НС – чистый сдвиг также в общем случае не равна нулю. Следовательно, с учетом (1.2), $\tau_{(0)} = \tau\exp\theta_\tau$ и $J_{(0)2} = -\tau^2\exp(2\theta_\tau)$, где τ – касательные напряжения, соответствующие мере напряжений Коши.

Система уравнений (2.1) позволяет определить три первых производных функции $u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$ при рассматриваемом виде НС

$$\frac{\bar{\partial} u_X}{\partial I_{(0)1}} = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3) = \frac{1}{3}\theta_\tau$$

$$\frac{\bar{\partial} u_X}{\partial J_{(0)2}} = -\frac{H_1 - H_3}{2\tau_{(0)}} = -\frac{1}{2\tau\exp\theta_\tau}\bar{\gamma}_\tau \tag{2.2}$$

$$\frac{\bar{\partial} u_X}{\partial J_{3(0)}} = -\frac{3H_2 - \theta_\tau}{2\tau_{(0)}^2} = -\frac{3}{2\tau^2\exp(2\theta_\tau)}\mathrm{dev}H_2$$

При этом величины логарифмической деформации сдвига $\bar{\gamma}_\tau = H_1 - H_3$, а также деформаций θ_τ и $\mathrm{dev}H_2$ в выражениях (2.2), являются функциями параметра нагружения τ, определяемыми в рассматриваемом базовом эксперименте.

Как показано далее, именно возможность независимого определения всех трех производных уравнениями (2.2) при данном НС позволяет использовать его для определения функции u_X при произвольном НС и, соответственно, обуславливает выбор в качестве базового эксперимента именно НС – чистый сдвиг. Например, в технически более простом эксперименте при одноосном НС, в котором возможно измерение только двух независимых деформаций – продольной и поперечной, определение этих трех производных из общих уравнений (1.11) невозможно, т.е. НС одноосного растяжения и сжатия не могут быть непосредственно использованы для построения общей теории деформирования, что конечно не исключает применение этих НС для косвенного определения коэффициентов, входящих в определяющие соотношения.

Для упрощения дальнейших математических выкладок целесообразно ввести обозначения

$$\mu_\tau = \tau_{(0)}/\bar{\gamma}_\tau \tag{2.3}$$

$$\xi_\tau = \theta_\tau/\bar{\gamma}_\tau \tag{2.4}$$

$$\zeta_\tau = -\mathrm{dev}H_2/\bar{\gamma}_\tau \tag{2.5}$$

В соответствии с (2.3)–(2.5), величина μ_τ является секущим модулем сдвига, а коэффициенты ξ_τ и ζ_τ, по аналогии с коэффициентом поперечной деформации при растяжении – сжатии, можно назвать коэффициентами объемной и поперечной деформации при НС – чистый сдвиг, соответственно. Индекс τ при этих коэффициентах подчеркивает, что они являются функциями этого параметра нагружения и должны определяться именно при НС – чистый сдвиг. Методика экспериментального определения функций $\mu_\tau(\tau_{(0)})$, $\xi_\tau(\tau_{(0)})$ и $\zeta_\tau(\tau_{(0)})$ рассмотрена в [1]. Как показано далее, коэффициенты ξ_τ и ζ_τ играют важную роль при определении уравнений состояния, и именно с этими коэффициентами связаны тензорно нелинейные эффекты, возникающие при деформировании материала.

С учетом формул (2.3)–(2.5) соотношения (2.2) принимают вид

$$\frac{\partial \bar{u}_X}{\partial I_{(0)1}} = \frac{2\xi_\tau \tau_{(0)}}{3}\frac{1}{2\mu_\tau}$$
$$\frac{\partial \bar{u}_X}{\partial J_{(0)2}} = -\frac{1}{2\mu_\tau}, \quad \frac{\partial \bar{u}_X}{\partial J_{(0)3}} = \frac{3\zeta_\tau}{\tau_{(0)}}\frac{1}{2\mu_\tau} \tag{2.6}$$

Кроме формул (2.6), определяющих производные функции u_X при НС – чистый сдвиг, потребуется также и выражение самой функции $\bar{u}_X(\tau_{(0)})$ при этом виде НС, которое, согласно формуле (1.6), определяется интегралом

$$\bar{u}_X(\tau_{(0)}) = \int_0^{\tau_{(0)}} \bar{\gamma}_\tau d\tau_{(0)} \tag{2.7}$$

В соответствии с (2.7), удельная дополнительная работа при НС – чистый сдвиг равна площади под диаграммой деформирования материала $\bar{\gamma}_\tau(\tau_{(0)})$, построенной по результатам соответствующего эксперимента.

С учетом (2.3), формулу (2.7) можно записать в виде

$$\bar{u}_X(\tau_{(0)}) = \int_0^{\tau_{(0)}} \frac{\tau_{(0)}}{\mu_\tau} d\tau_{(0)} \tag{2.8}$$

Как отмечается в [5], "задаче о сдвиге принадлежит в нелинейной теории особое место – ею дается неосуществимое в линейной теории объяснение предсказанных и экспериментально обнаруженных явлений в изотропном упругом материале (эффекты Кельвина – Вертгейма, Пойнтинга)". Однако существующие варианты решения даже этой относительно простой задачи дают только качественное объяснение этих эффектов. Как указано в той же работе [5], в частности, при НС – чистый сдвиг, "вычисления доводимы до конечных соотношений лишь при особо "удачных" заданиях зависимостей энергетических функций от инвариантов. В общем случае возможно лишь построение формул, описывающих "эффекты второго порядка" для достаточно малых τ. Они исчерпывающим образом представлены Трусделлом и Муном".

Объяснение этих осложнений при решении заключается в традиционном подходе к построению теории, при котором вид энергетической функции априорно задается, и решение существенно зависит от того, насколько "удачно" выбран тот или иной вариант представления этой функции. Принципиальное отличие рассматриваемого далее метода построения теории заключается в том, что информация, получаемая в базовых экспериментах, в частности, при НС – чистый сдвиг, используется не для подтверждения или опровержения того или иного априорно заданного варианта вида энергетической функции, а именно для однозначного определения ее фактического вида, из которого далее однозначно следуют и определяющие соотношения.

В качестве второго базового НС рассмотрим всестороннее равномерное растяжение и сжатие. Тензор $\mathbf{T}_{(0)}$ в этом случае является шаровым и его диагональные элементы равны

$$T_{(0)1} = T_{(0)2} = T_{(0)3} = -p_{(0)} = -p\exp\theta_p \tag{2.9}$$

где p – давление, θ_p – объемная логарифмическая деформация при всестороннем растяжении и сжатии.

Из выражения (1.11) при этом следует, что

$$\tilde{\partial} u_X/\partial I_{(0)1} = \theta_p/3 \tag{2.10}$$

Волнистая черта над производной в (2.10) означает, что эта производная определяется именно при всестороннем растяжении и сжатии.

Выражение для дополнительной работы $\tilde{u}_X(p_{(0)})$ при этом НС можно записать в виде

$$\tilde{u}_X(p_{(0)}) = -\int_0^{-p_{(0)}} \theta_p dp_{(0)} = \int_0^{-p_0} (p_{(0)}/K_p) dp_{(0)} \tag{2.11}$$

где $K_p = -p_{(0)}/\theta_p$ – секущий модуль объемного растяжения и сжатия, являющийся функцией давления p.

3. Определение функции $u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$ при произвольном напряженном состоянии.

Ставится задача: определить такие значения напряжений $\bar{\tau}_{(0)}$ и $\bar{p}_{(0)}$ базовых НС, рассмотренных в предыдущем пункте, при которых удельная дополнительная работа заданного произвольного НС будет равна сумме дополнительных работ этих базовых НС, т.е.

$$u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) = \tilde{u}_X(\bar{p}_{(0)}) + \bar{u}_X(\bar{\tau}_{(0)}) \tag{3.1}$$

При этом напряжения $\bar{\tau}_{(0)}$ и $\bar{p}_{(0)}$, которые можно назвать эквивалентными, очевидно должны однозначно определяться инвариантами $I_{(0)1}$, $J_{(0)2}$ и $J_{(0)3}$ заданного НС. Составляющая удельной дополнительной работы $\bar{u}_X(\bar{\tau}_{(0)})$ в выражении (3.1) связана с действием девиатора напряжений, а составляющая $\tilde{u}_X(\bar{p}_{(0)})$ – с действием шарового тензора.

Выделяя из тензоров $\mathbf{T}_{(0)}$ и $\mathbf{H}$ шаровые и девиаторные составляющие, выражение (1.6) для удельной дополнительной работы можно записать в виде

$$u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) = \int_0^{\sigma_{(0)m}} \theta d\sigma_{(0)m} + \int_0^{\mathrm{dev}\mathbf{T}_{(0)}} \mathrm{dev}\mathbf{H} \cdot\cdot\, d(\mathrm{dev}\mathbf{T}_{(0)}) \tag{3.2}$$

где $\sigma_{(0)m} = I_{(0)1}/3$ – среднее напряжение, $\theta = I_{H1} = \ln(dV/dv)$ – объемная логарифмическая деформация.

Первый интеграл в формуле (3.2) соответствует дополнительной работе, связанной с изменением объема, а второй – с изменением формы.

Как было показано в предыдущем разделе, при НС – чистый сдвиг в общем случае возможно изменение не только формы, но и объема тела. Обобщая этот результат, можно заключить, что от действия девиатора напряжений при произвольном НС может также происходить изменение объема. Следовательно, объемная деформация θ в формуле (3.2) состоит из двух частей

$$\theta = \theta_\sigma + \theta_{\mathrm{dev}} \tag{3.3}$$

где θ_σ и θ_{dev} – части объемной деформации, возникающие от действия среднего напряжения $\sigma_{(0)m}$ и девиатора напряжений $\mathrm{dev}\mathbf{T}_{(0)}$, соответственно.

С учетом выражения (3.3), формула (3.2) принимает вид

$$u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) = u_X^{(\sigma)}(I_{(0)1}) + u_X^{(\mathrm{dev})}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) \tag{3.4}$$

$$u_X^{(\sigma)}(I_{(0)1}) = \int\limits_0^{\sigma_{(0)m}} \theta_\sigma d\sigma_{(0)m} \tag{3.5}$$

$$u_X^{(\mathrm{dev})}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) = \int\limits_0^{\sigma_{(0)m}} \theta_{\mathrm{dev}} d\sigma_{(0)m} + \int\limits_0^{\mathrm{dev}\mathbf{T}_{(0)}} \mathrm{dev}\mathbf{H} \cdot\cdot\, d(\mathrm{dev}\mathbf{T}_{(0)}) \tag{3.6}$$

где $u_X^{(\sigma)}$ – составляющая дополнительной работы, зависящая только от первого инварианта $I_{(0)1}$; $u_X^{(\mathrm{dev})}$ – составляющая дополнительной работы, которую можно назвать девиаторной, зависящая от всех трех инвариантов $I_{(0)1}$, $J_{(0)2}$, $J_{(0)3}$ заданного НС.

Выделение девиаторной составляющей дополнительной работы, позволяет ввести условие энергетической эквивалентности различных НС по признаку равенства этих девиаторных частей дополнительной работы. В частности, для рассмотренного выше базового НС – чистый сдвиг, при котором удельная дополнительная работа связана именно с действием только девиатора напряжений, можно однозначно определить такое значение эквивалентного касательного напряжения $\bar{\tau}_{(0)}$, при котором удельная дополнительная работа $\bar{u}_X(\bar{\tau}_{(0)})$ этого НС будет равна девиаторной составляющей удельной дополнительной работы заданного произвольного НС, т.е.

$$u_X^{(\mathrm{dev})}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) = \bar{u}_X(\bar{\tau}_{(0)}) \tag{3.7}$$

При этом вид функции $\bar{u}_X(\bar{\tau}_{(0)})$ определен в базовом эксперименте (формула (2.8)), а ее аргумент $\bar{\tau}_{(0)}$ будет зависеть от значений инвариантов $I_{(0)1}$, $J_{(0)2}$, $J_{(0)3}$ рассматриваемого произвольного НС, т.е.

$$\bar{\tau}_{(0)} = \bar{\tau}_{(0)}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) \tag{3.8}$$

Для определения зависимости (3.8) рассмотрим разложение искомой скалярной функции $u_X^{(\mathrm{dev})}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$ в ряд Тейлора по степеням ее аргументов, т.е. по степеням инвариантов $I_{(0)1}$, $J_{(0)2}$, $J_{(0)3}$, относительно некоторого значения удельной дополнительной работы $\bar{u}_X(\tau_{(0)})$ при базовом НС – чистый сдвиг. Так как при таком НС, по его определению, $I_{(0)1} = J_{(0)3} = 0$ и $J_{(0)2} = -\tau_{(0)}^2$, то указанное разложение имеет вид

$$u_X^{(\mathrm{dev})}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) = \bar{u}_X(\tau_{(0)}) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[I_{(0)1}\frac{\bar{\partial}}{\partial I_{(0)1}} + (J_{(0)2} + \tau_{(0)}^2)\frac{\bar{\partial}}{\partial J_{(0)2}} + J_{(0)3}\frac{\bar{\partial}}{\partial J_{(0)3}}\right]^{(n)} u_X^{(\mathrm{dev})} \tag{3.9}$$

При выполнении условия (3.7), т.е. при $\tau_{(0)} = \bar{\tau}_{(0)}$, все слагаемые b_n суммы в правой части выражения (3.9) должны быть равны нулю. В частности, приравнивая нулю первое слагаемое b_1 этой суммы

$$b_1 = I_{(0)1}\frac{\bar{\partial} u_X^{(\mathrm{dev})}}{\partial I_{(0)1}} + (J_{(0)2} + \bar{\tau}_{(0)}^2)\frac{\bar{\partial} u_X^{(\mathrm{dev})}}{\partial J_{(0)2}} + J_{(0)3}\frac{\bar{\partial} u_X^{(\mathrm{dev})}}{\partial J_{(0)3}} = 0$$

с учетом выражений (2.6), после преобразований получим уравнение, определяющее в неявном виде искомую зависимость $\bar{\tau}_{(0)}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$:

$$\bar{\tau}_{(0)}^3 - 2\xi_\tau \sigma_{(0)m}\bar{\tau}_{(0)}^2 + J_{(0)2}\bar{\tau}_{(0)} - 3\zeta_\tau J_{(0)3} = 0 \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10), определяющее аргумент функции $\bar{u}_X(\bar{\tau}_{(0)})$, является кубическим уравнением с переменными коэффициентами, поскольку коэффициенты ξ_τ и ζ_τ в этом уравнении сами являются функциями $\bar{\tau}_{(0)}$, определяемыми в базовом эксперименте при НС – чистый сдвиг.

Согласно выражениям (2.8), (3.7) и (3.10), девиаторная составляющая удельной дополнительной работы при произвольном НС полностью определена тремя экспериментальными зависимостями $\mu_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$, $\xi_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$ и $\zeta_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$, полученным при НС – чистый сдвиг:

$$u_X^{(\mathrm{dev})}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) = \int\limits_0^{\bar{\tau}_{(0)}} \frac{\bar{\tau}_{(0)}}{\mu_\tau} d\bar{\tau}_{(0)} \tag{3.11}$$

При этом, в отличие от традиционного подхода, не потребовалось предварительного постулирования вида энергетической функции $u_X^{(\mathrm{dev})}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$.

В [1] аналогичный результат получен с использованием метода математической индукции. Доказано, что из условия (3.10) следует равенство нулю всех слагаемых суммы в правой части формулы (3.9), т.е. кубическое уравнение (3.10) действительно определяет значение эквивалентного касательного напряжения $\bar{\tau}_{(0)}$, при котором выполняется условие (3.7).

Для определения другой составляющей удельной дополнительной работы $u_X^{(\sigma)}(I_{(0)1})$, связанной с действием шарового тензора напряжений, разложим эту скалярную функцию в ряд Тейлора по степеням инварианта $I_{(0)1}$ относительно некоторого значения дополнительной работы при базовом НС – всестороннем растяжении и сжатии

$$u_X^{(\sigma)}(I_{(0)1}) = \tilde{u}_X(p_{(0)}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(I_{(0)1} + 3p_{(0)})^n \frac{\tilde{\partial}^n u_X}{(\partial I_{(0)1})^n} \tag{3.12}$$

Из формулы (3.12) следует, что $u_X^{(\sigma)}(I_{(0)1}) = \tilde{u}_X(\bar{p}_{(0)})$ при

$$\bar{p}_{(0)} = -I_{(0)1}/3 = -\sigma_{(0)m} \tag{3.13}$$

Отметим, что согласно выражению (3.13), значения эквивалентного давления базового НС и среднего напряжения произвольного НС равны между собой только в том случае, если они определены именно через меру напряжений Треффтца. При этом объемные деформации при этих НС могут отличаться друг от друга. Действительно, из условия (3.13) следует, что $\sigma_m \cdot \exp\theta = -\bar{p} \cdot \exp\theta_p$. При этом в общем случае $\theta_p \neq \theta$ и $\sigma_m \neq -\bar{p}$.

С учетом формулы (2.11) и условия (3.13) выражение для $u_X^{(\sigma)}(I_{(0)1})$ при произвольном НС принимает вид

$$u_X^{(\sigma)}(I_{(0)1}) = \int_0^{\sigma_{(0)m}} \frac{\sigma_{(0)m}}{K_\sigma} d\sigma_{(0)m} \tag{3.14}$$

где $K_\sigma = K_\sigma(\sigma_{(0)m}) = K_p(-\bar{p}_{(0)})$ – функция среднего напряжения, определяемая при базовом НС – всестороннем растяжении и сжатии.

Окончательное выражение для функции $u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$ при произвольном НС с учетом формул (3.11) и (3.14) имеет вид:

$$u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3}) = \int_0^{\sigma_{(0)m}} \frac{\sigma_{(0)m}}{K_\sigma} d\sigma_{(0)m} + \int_0^{\bar{\tau}_{(0)}} \frac{\bar{\tau}_{(0)}}{\mu_\tau} d\bar{\tau}_{(0)} \tag{3.15}$$

где эквивалентное касательное напряжение $\bar{\tau}_{(0)}$ определяется из кубического уравнения (3.10). Согласно формулам (3.14), (3.15) и (3.10), функция $u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$ при произвольном НС полностью определяется четырьмя зависимостями $K_p(-\bar{p}_{(0)})$, $\mu_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$, $\xi_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$ и $\zeta_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$, полученными при рассмотренных базовых НС.

4. Определяющие соотношения при простом нагружении. Выражение (3.15) для энергетической функции $u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}J_{(0)3})$ при произвольном НС позволяет конкретизировать тензорное уравнение (1.11), определяющее деформированное состояние тела при простом нагружении.

Дифференцируя выражение (3.15), получим формулы, определяющие частные производные функции $u_X(I_{(0)1}, J_{(0)2}J_{(0)3})$ по инвариантам

$$\begin{aligned} \partial u_X/\partial I_{(0)1} &= \sigma_{(0)m}/(3K_\sigma) + (\bar{\tau}_{(0)}/\mu_\tau)\partial\bar{\tau}_{(0)}/\partial I_{(0)1} \\ \partial u_X/\partial J_{(0)2} &= (\bar{\tau}_{(0)}/\mu_\tau)\partial\bar{\tau}_{(0)}/\partial J_{(0)2} \\ \partial u_X/\partial J_{(0)3} &= (\bar{\tau}_{(0)}/\mu_\tau)\partial\bar{\tau}_{(0)}/\partial J_{(0)3} \end{aligned} \tag{4.1}$$

В свою очередь, частные производные функции $\bar{\tau}_{(0)}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$, входящие в (4.1), определяются дифференцированием уравнения (3.10):

$$\begin{aligned} \partial\bar{\tau}_{(0)}/\partial I_{(0)1} &= 2\xi_\tau\bar{\tau}_{(0)}/(3A) \\ \partial\bar{\tau}_{(0)}/\partial J_{(0)2} &= -1/A \\ \partial\bar{\tau}_{(0)}/\partial J_{(0)3} &= 3\zeta_\tau/(\bar{\tau}_{(0)}A) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$A = 2\bar{\tau}_{(0)}[1 - \alpha_\tau(\xi'_\tau + 1) - \beta_\tau(\zeta'_\tau - 1)] \tag{4.3}$$

$$\alpha_\tau = \xi_\tau\sigma_{(0)m}/\bar{\tau}_{(0)}, \quad \beta_\tau = 3\zeta_\tau J_{(0)3}/2\bar{\tau}_{(0)}^3 \tag{4.4}$$

$$\xi'_\tau = \frac{\bar{\tau}_{(0)}}{\xi_\tau}\frac{d\xi_\tau}{d\bar{\tau}_{(0)}} = \frac{d\ln\xi_\tau}{d\ln\bar{\tau}_{(0)}}, \quad \zeta'_\tau = \frac{\bar{\tau}_{(0)}}{\zeta_\tau}\frac{d\zeta_\tau}{d\bar{\tau}_{(0)}} = \frac{d\ln\zeta_\tau}{d\ln\bar{\tau}_{(0)}} \tag{4.5}$$

С учетом формул (4.1)–(4.5) тензорно нелинейное уравнение (1.11), определяющее деформированное состояние изотропного твердого тела при простом нагружении, принимает окончательный вид:

$$\mathbf{H} = \frac{\sigma_{(0)m}}{3K_\sigma}\mathbf{E} + \frac{1}{2\bar{\mu}_\tau}\left[\frac{2}{3}\xi_\tau\bar{\tau}_{(0)}\mathbf{E} + \mathrm{dev}\mathbf{T}_{(0)} + \frac{3\zeta_\tau}{\bar{\tau}_{(0)}}\left(\mathrm{dev}^2\mathbf{T}_{(0)} + \frac{2}{3}J_{(0)2}\mathbf{E}\right)\right] \tag{4.6}$$

где $\bar{\mu}_\tau$ – модуль сдвига, приведенный к заданному НС, или просто приведенный модуль сдвига, определяется по формуле

$$\bar{\mu}_\tau = \mu_\tau[1 - \alpha_\tau(\bar{\xi}'_\tau + 1) - \beta_\tau(\bar{\zeta}'_\tau - 1)] \tag{4.7}$$

Из формулы (4.7) следует, что величина $\bar{\mu}_\tau$, определяющая сдвиговую жесткость материала, в общем случае не равна секущему модулю сдвига μ_τ эквивалентного НС – чистый сдвиг. Согласно формулам (4.4), (4.5) и (4.7), $\bar{\mu}_\tau$ зависит как от экспериментальных функций $\xi_\tau(\tau_{(0)})$ и $\zeta_\tau(\tau_{(0)})$, так и непосредственно от инвариантов $I_{(0)1}$ и $J_{(0)3}$, т.е. от типа и вида заданного НС.

Неотъемлемой частью определяющего уравнения (4.6) является кубическое уравнение (3.10), полученное из энергетического условия (3.7). Именно из этого уравнения первоначально находится значение эквивалентного касательного напряжения $\bar{\tau}_{(0)}$, по которому, в свою очередь, определяются значения секущего модуля сдвига μ_τ, а также коэффициентов ξ_τ, $\bar{\xi}'_\tau$, ζ_τ и $\bar{\zeta}'_\tau$, входящих в уравнение (4.6).

Следует также отметить, что формула (4.6) определяет зависимость логарифмических деформаций от напряжений в неявном виде, поскольку правая часть этой формулы выражена через тензор напряжений Треффтца, который сам включает в себя объемную логарифмическую деформацию θ:

$$\mathbf{T}_{(0)} = \mathbf{T}\exp\theta \tag{4.8}$$

В связи с этим, при использовании уравнения (4.6) целесообразно выделить шаровую и девиаторную составляющие тензора **H**:

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\sigma_{(0)m}}{K_\sigma} + \xi_\tau\dfrac{\bar{\tau}_{(0)}}{\bar{\mu}_\tau} \\ \mathrm{dev}\mathbf{H} = \dfrac{1}{2\bar{\mu}_\tau}\left[\mathrm{dev}\mathbf{T}_{(0)} + \dfrac{3\zeta_\tau}{\bar{\tau}_{(0)}}\left(\mathrm{dev}^2\mathbf{T}_{(0)} + \dfrac{2}{3}J_{(0)2}\mathbf{E}\right)\right] \end{cases} \tag{4.9}$$

При этом первое уравнение системы (4.9), совместно с кубическим уравнением (3.10), образуют подсистему двух нелинейных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных θ и $\bar{\tau}_{(0)}$. После решения этой подсистемы и определения θ и $\bar{\tau}_{(0)}$, из второго уравнения системы (4.9), с учетом соотношения (4.8), находится dev**H**.

Анализ полученного тензорно нелинейного определяющего соотношения (4.6) показал, что оно адекватно отражает основные особенности деформирования изотропных тел наблюдаемые в экспериментах. В частности, это уравнение описывает возможное отличие диаграмм растяжения и сжатия материала друг от друга, как при больших, так и при малых деформациях, влияние первого и третьего инвариантов тензора напряжений на формоизменение деформируемого тела, возможное изменение объема тела от действия девиатора напряжений и другие эффекты, связанные с тензорно нелинейным характером определяющих соотношений. При этом все перечисленные особенности деформирования количественно определяются только двумя функциями – коэффициентами объемной $\xi_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$ и поперечной $\xi_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$ деформации, полученными при НС – чистый сдвиг.

В частности, если эти коэффициенты равны нулю, соотношение (4.6) становится тензорно линейным и принимает вид

$$\mathbf{H} = \frac{\sigma_{(0)m}}{3K_\sigma(\sigma_{(0)m})}\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_\tau(\bar{\tau}_{(0)})}\operatorname{dev}\mathbf{T}_{(0)} \tag{4.10}$$

Причем аргумент функции $\mu_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$ в формуле (4.10), согласно кубическому уравнению (3.10) при $\xi_\tau(\bar{\tau}_{(0)}) = \zeta_\tau(\bar{\tau}_{(0)}) = 0$, определяется известным выражением для интенсивности касательных напряжений

$$\bar{\tau}_{(0)} = \sqrt{-J_{(0)2}} \tag{4.11}$$

Тензорно линейное определяющее соотношение (4.10) аналогично уравнениям состояния, записанных в форме Генки для материалов с равной нулю фазой подобия девиаторов тензоров деформаций и напряжений [5, 6]. Существенно, что при рассмотренном методе получения определяющих уравнений, необходимым и достаточным условием справедливости соотношения (4.10) является равенство нулю коэффициентов ξ_τ и ζ_τ. Иными словами, равенство нулю фазы подобия девиаторов тензоров $\mathbf{H}$ и $\mathbf{T}_{(0)}$, в данном случае, однозначно следует из условия $\xi_\tau = \zeta_\tau = 0$, полученного в эксперименте при НС – чистый сдвиг. Кроме того, при определении функции $\mu_\tau(\sqrt{-J_{(0)2}})$ не требуется введения традиционной гипотезы "единой кривой", согласно которой предполагается существование определенной зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций единой для любого НС. В данном случае зависимость $\mu_\tau(\sqrt{-J_{(0)2}}) = \mu_\tau(\bar{\tau}_{(0)})$ однозначно определяется выражением (2.3) при НС – чистый сдвиг без введения каких-либо априорных предположений. Отметим также, что при известной функции $\mu_\tau(\sqrt{-J_{(0)2}})$, зависимость $K_\sigma(\sigma_{(0)m})$ можно определить по результатам более простых экспериментов при одноосных растяжении и сжатии, используя формулу (4.10).

Очевидно, что для идеально упругого изотропного тела определяющие соотношения (4.6) и (4.10) будут справедливы не только при простом нагружении, поскольку конечное состояние такого тела не зависит от истории нагружения.

Из формулы (1.1) следует, что для определения тензора логарифмических деформаций $\mathbf{H}$, через который записываются определяющие соотношения, необходимо извлечь квадратный корень из тензора $\mathbf{F}$, что, в свою очередь, требует вычисления главных значений этого тензора [5]. Как известно, тензор $\mathbf{F}$ определяется через тензор – градиент вектора места $\nabla\mathbf{R}$ актуальной конфигурации и равен скалярному произведению транспонированного тензора $\nabla\mathbf{R}^T$ на тензор $\nabla\mathbf{R}$ [5]:

$$\mathbf{F} = \nabla\mathbf{R}^T\cdot\nabla\mathbf{R} \tag{4.12}$$

При этом задача определения трех главных значений и главных направлений тензора $\mathbf{F}$ по его компонентам, заданным формулой (4.12), в общем случае сводится, как известно, к решению характеристического кубического уравнения для тензора $\mathbf{F}$. Только после вычисления главных значений тензора $\mathbf{F}$ возможно определение главных значений тензора $\mathbf{H}$ по формуле (1.1):

$$H_i = \ln\sqrt{F_i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.13}$$

Если требуется определить компоненты тензора **H** в некоторой произвольной системе координат, то первоначально необходимо найти главные значения этого тензора по формулам (4.13) и направления его главных осей, совпадающих с направлениями главных осей тензора **F**. Затем по известным формулам изменения компонент тензора при повороте координатных осей определить искомые значения компонент тензора **H** в произвольной системе координат.

Следовательно, тензорные уравнения (4.6) и (4.10) первоначально определены в системе координат, совпадающей с главными осями соосных тензоров **H** и $\mathbf{T}_{(0)}$, и в развернутом виде представляют собой систему трех уравнений, связывающих главные значения тензора **H**, определяемые формулой (4.13), с главными значениями тензора $\mathbf{T}_{(0)}$. Если симметричный тензор $\mathbf{T}_{(0)}$ задан его шестью независимыми компонентами в системе координат, не совпадающей с его главными осями, то его главные значения определяются из решения соответствующего кубического характеристического уравнения для тензора $\mathbf{T}_{(0)}$.

Поскольку тензоры $\nabla\mathbf{R}$ и $\nabla\mathbf{R}^T$ определяются через вектор места **R**, заданный в произвольной системе координат тремя его проекциями, являющимися функциями материальных координат точки тела, то и главные значения тензоров **F** и **H** в формуле (4.13), с учетом (4.12), выражаются, в конечном счете, через эти три функции. Следовательно, левая часть системы трех определяющих уравнений, соответствующих тензорным соотношениям (4.6) и (4.10), содержит три искомых функции – проекции вектора **R**, а в правую часть этой системы входят три главных значения тензора $\mathbf{T}_{(0)}$, зависящие, в общем случае, от шести функций – компонент симметричного тензора $\mathbf{T}_{(0)}$ в произвольной системе координат. При этом для получения замкнутой системы разрешающих соотношений, к указанной системе трех уравнений, содержащих девять перечисленных функций подлежащих определению, необходимо добавить три дифференциальных уравнения равновесия и три уравнения, определяющих условие соосности тензоров **H** и $\mathbf{T}_{(0)}$. Условие соосности заключается в том, что три главных направления тензоров **H** и $\mathbf{T}_{(0)}$ при деформировании должны совпадать. Поскольку одна система трех взаимно перпендикулярных направлений, как известно, может быть фиксирована по отношению к другой с помощью трех эйлеровых углов, то и количество уравнений, выражающих условие соосности, также равно трем. Пример использования условия соосности при решении осесимметричной задачи рассмотрен в [4].

Замкнутую систему разрешающих уравнений можно также получить, записав тензорные соотношения (4.6) или (4.10) в произвольной системе координат, в которой первоначально заданы тензоры **F** и $\mathbf{T}_{(0)}$. Для этого необходимо по компонентам тензора **F**, заданного формулой (4.12), вычислить его главные значения и определить направления главных осей этого тензора, т.е. вычислить направляющие косинусы α_{sm} для этих главных осей. После этого тензор логарифмических деформаций **H** можно записать в произвольной системе координат. При этом его компоненты, с учетом (4.13), будут определяться формулами изменения компонент тензора при повороте системы координат от главной (совпадающей с главными осями тензоров **F** и $\mathbf{T}_{(0)}$) к произвольной, в которой первоначально заданы компоненты этих тензоров

$$H_{sm} = \alpha_{s1}\alpha_{m1}\ln\sqrt{F_1} + \alpha_{s2}\alpha_{m2}\ln\sqrt{F_2} + \alpha_{s3}\alpha_{m3}\ln\sqrt{F_3} \tag{4.14}$$

В этом случае тензорные соотношения (4.6) и (4.10) в развернутом виде будут представлять собой шесть независимых уравнений, в которые войдут шесть компонент симметричного тензора $\mathbf{T}_{(0)}$ и три функции – проекции вектора места **R**, через которые по (4.12)–(4.14) выражаются компоненты тензора **H** в произвольной системе координат. Совместно с тремя дифференциальными уравнениями равновесия эти шесть определяющих уравнений также образуют замкнутую систему. Условие соосности тензоров **H** и $\mathbf{T}_{(0)}$ при этом следует из формул (4.14).

Если в экспериментах при базовых НС в определенном диапазоне деформирования установлены линейные зависимости между напряжениями Треффтца и логарифмическими деформациями, т.е. $\mu_\tau = \text{const}$ и $K_\sigma = \text{const}$, то из уравнения (4.10) следуют определяющие уравнения физически (но не геометрически) линейной теории. Причем точность этих линейных уравнений при произвольном НС будет зависеть только от точности аппроксимации диаграмм сдвига и объемного (или одноосного) растяжения и сжатия линейными функциями в заданном диапазоне логарифмических деформаций.

Существенно, что линейная зависимость между деформациями и напряжениями при произвольном НС, определяемая соотношением (4.10), в данном случае не постулируется, а является именно следствием линейности диаграмм деформирования, полученных при базовых НС. Иными словами, линейность диаграмм сдвига и одноосных растяжения и сжатия при рассмотренном подходе к определению закона состояния является не только необходимым, но и достаточным условием физической линейности определяющих соотношений при произвольном НС.

При переходе к малым деформациям $\exp\theta \approx 1$ и из (4.8) следует, что тензор напряжений Треффтца $\mathbf{T}_{(0)}$ совпадает с тензором напряжений Коши $\mathbf{T}$. Для определения компонент тензора $\mathbf{H}$ при малых деформациях рассмотрим разложение скалярной функции тензорного аргумента (1.1) в ряд по степеням тензора деформации $\mathbf{D} = \mathbf{F} - \mathbf{E}$, аналогичное разложению в ряд функции $\ln\sqrt{1+x}$ по степеням ее аргумента x:

$$\mathbf{H} = \ln\sqrt{\mathbf{F}} = \ln\sqrt{\mathbf{E}+\mathbf{D}} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D}^2}{2} + \frac{\mathbf{D}^3}{3} - \ldots\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\mathbf{D}^n}{n} \tag{4.15}$$

В инвариантной форме тензор деформации $\mathbf{D}$, с учетом выражения (4.12), можно записать в виде [5]:

$$\mathbf{D} = 2\boldsymbol{\varepsilon} + \nabla\mathbf{u}^T \cdot \nabla\mathbf{u} \tag{4.16}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = 0.5(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ – линейный тензор деформации, $\nabla\mathbf{u}$ – тензор-градиент вектора перемещений $\mathbf{u}$.

Используя формулы (4.15) и (4.16), переход от логарифмических к малым деформациям можно проводить с различной степенью точности. В частности, если при малых деформациях в формуле (4.16) пренебречь значениями компонент тензора $(\nabla\mathbf{u}^T \cdot \nabla\mathbf{u})$ по сравнению с соответствующими компонентами линейного тензора деформаций, и, соответственно, ограничиться только первым слагаемым ряда (4.15), то тензор $\mathbf{H}$, как и следовало ожидать, переходит в линейный тензор малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ (тензор деформаций Коши). При этом из соотношения (4.10) при $\mu_\tau = \mu = \text{const}$ и $K_\sigma = K = \text{const}$ следует закон состояния классической теории упругости (обобщенный закон Гука):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0.5(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) = \frac{\sigma_m}{3K}\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu}\operatorname{dev}\mathbf{T}$$

Если же при вычислении компонент тензора $\mathbf{H}$ учесть квадратичные составляющие, входящие в два первых слагаемых ряда (4.15), то с учетом (4.16) получим

$$\mathbf{H}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \boldsymbol{\varepsilon}_0^2 + 0.5\nabla\mathbf{u}^T \cdot \nabla\mathbf{u} \tag{4.17}$$

где тензор $\mathbf{H}_0$ можно назвать нелинейным тензором малых деформаций.

Выделяя симметричную и кососимметричную части тензора $\nabla\mathbf{u}^T$ в формуле (4.17) ее можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_0 &= \boldsymbol{\varepsilon}_0 - 0.5[\boldsymbol{\varepsilon}_0^2 + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varepsilon}_0 - (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\varepsilon}_0)^T - \mathbf{E}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}]\\ \boldsymbol{\omega} &= 0.5\operatorname{rot}\mathbf{u}\end{aligned} \tag{4.18}$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}$ – вихрь вектора перемещений $\mathbf{u}$ [5].

При вычислении компонент тензора $\mathbf{H}_0$ по формулам (4.17) или (4.18) можно пренебречь значениями квадратов компонент малых линейных деформаций по сравнению со значениями этих же компонент в первой степени, а также значениями последних по сравнению с единицей. Например, в декартовой системе координат x, y, z матрица компонент симметричного нелинейного тензора малых деформаций $\mathbf{H}_0$, в соответствии с (4.17), имеет вид:

$$\left\|\begin{matrix} \varepsilon_x-\frac{\gamma_{xy}^2}{4}-\frac{\gamma_{xz}^2}{4}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] & \frac{\gamma_{xy}}{2}-\frac{\gamma_{xz}\gamma_{yz}}{4}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\gamma_{xz}}{2}-\frac{\gamma_{xy}\gamma_{yz}}{4}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2}-\frac{\gamma_{xz}\gamma_{yz}}{4}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} & \varepsilon_y-\frac{\gamma_{yz}^2}{4}-\frac{\gamma_{yx}^2}{4}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] & \frac{\gamma_{yz}}{2}-\frac{\gamma_{zx}\gamma_{xy}}{4}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2}-\frac{\gamma_{xy}\gamma_{yz}}{4}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\gamma_{yz}}{2}-\frac{\gamma_{zx}\gamma_{xy}}{4}+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} & \varepsilon_z-\frac{\gamma_{zx}^2}{4}-\frac{\gamma_{zy}^2}{4}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \end{matrix}\right\|$$

где u, v, w – компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$; ε_x, ε_y, ..., $\gamma_{xz}/2$ – компоненты линейного тензора малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_0$.

Из соотношения (4.10) при $\mu_\tau = \mu = \text{const}$ и $K_\sigma = K = \text{const}$ в данном случае следует закон состояния при малых упругих деформациях в виде:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\sigma_m}{3K}\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu}\text{dev}\mathbf{T} \qquad (4.19)$$

где тензор $\mathbf{H}_0$ определяется формулами (4.17) или (4.18).

Определяющие соотношения теории упругости, соответствующие тензорной зависимости (4.19), являются физически линейными, однако их геометрическая нелинейность при малых деформациях в общем случае сохраняется. Закон состояния (4.19) уточняет определяющие соотношения классической теории упругости и позволяет количественно описывать геометрически нелинейные эффекты второго порядка при упругом деформировании изотропного твердого тела.

Например, из соотношений (4.19) с учетом (4.17) следует, что для реализации ДС – простой сдвиг, заданного компонентами перемещений $u = \gamma y$, $v = w = 0$ ($\gamma = \text{const}$ – угол сдвига), необходимо, кроме касательных напряжений $\tau_{xy} = \mu\gamma$, прикладывать также и нормальные напряжения $\sigma_x = -\sigma_y = 0.5\mu\gamma^2$. В нелинейной теории упругости количественное описание этого известного эффекта зависит от принятого закона состояния [6]. В данном случае, для малых упругих деформаций определяющее соотношение (4.19), с точностью до величин второго порядка малости, дает однозначное количественное описание напряженного состояния, необходимого для реализации этого ДС. В [4], с учетом указанной особенности перехода от логарифмических к малым деформациям, получено точное аналитическое решение задачи кручения цилиндра круглого сплошного и кольцевого поперечного сечений при малых упругих деформациях, описывающее геометрически нелинейные эффекты второго порядка, в частности, эффект Пойнтинга.

В отличие от определяющих соотношений классической теории упругости, получаемых путем индуктивного обобщения результатов частных экспериментов на произвольное НС, закон состояния (4.19) невозможно получить постулированием. Как показано выше, этот закон выводится дедуктивным методом, т.е. он является следствием общего закона состояния (4.6) при линейных зависимостях между напряжениями и малыми упругими деформациями, устанавливаемых в двух базовых экспериментах.

Используя полученное тензорное определяющее соотношение (4.19), можно уточнять решения многих задач классической теории упругости. Например, возможно уточнение теории кручения призматических стержней Сен-Венана, решения плоской задачи теории упругости и др. Требует уточнений доказательства известных теорем о существовании и единственности решений, а также связанное с ними решение проблемы упругой устойчивости.

5. Определяющие соотношения при простом деформировании. Для конкретизации уравнения (1.10), определяющего зависимость тензора напряжений $\mathbf{T}_{(0)}$ от тензора деформаций $\mathbf{H}$ при простом деформировании, необходимо определить вид энергетической функции $u_0(I_{H1}, J_{H2}, J_{H3})$ при произвольном ДС, аналогично тому, как ранее определялась функция $u_\chi(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$ при произвольном НС.

Для этого рассматриваются два базовых ДС – чистый сдвиг и всестороннее равномерное растяжение и сжатие [1]. Как показано далее, ДС – чистый сдвиг при тензорно нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями отличается от одноименного НС, рассмотренного ранее.

В частности, при этом ДС заданы компоненты логарифмических деформаций, равные

$$H_1 = -H_3 = \bar{\gamma}/2, \quad H_2 = 0 \tag{5.1}$$

где $\bar{\gamma}$ – логарифмическая деформация сдвига. Поскольку объемная деформация при этом равна нулю, то тензор напряжений Треффтца при ДС – чистый сдвиг совпадает с тензором напряжений Коши, т.е. $\mathbf{T}_{(0)} = \mathbf{T}$.

При этом из общего уравнения (1.10), с учетом (5.1) получим выражения для трех первых производных функции $u_0(I_{H1}, J_{H2}, J_{H3})$ при ДС – чистый сдвиг, аналогичные формулам (2.6):

$$\frac{\partial u_0}{\partial I_{H1}} = -\frac{2\xi_{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma}/2)}{3}2\mu_{\bar{\gamma}}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial J_{H2}} = -2\mu_{\bar{\gamma}}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial J_{H3}} = -\frac{3\zeta_{\bar{\gamma}}}{(\bar{\gamma}/2)}2\mu_{\bar{\gamma}} \tag{5.2}$$

$$\mu_{\bar{\gamma}} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2\bar{\gamma} = \tau_{\bar{\gamma}}/\bar{\gamma}, \quad \xi_{\bar{\gamma}} = 3p_{\bar{\gamma}}/(2\tau_{\bar{\gamma}}), \quad \zeta_{\bar{\gamma}} = \operatorname{dev}\sigma_2/(2\tau_{\bar{\gamma}})$$

где $\mu_{\bar{\gamma}}$ – секущий модуль сдвига, определяемый по диаграмме деформирования материала при ДС – чистый сдвиг, $\xi_{\bar{\gamma}}$ и $\zeta_{\bar{\gamma}}$ – коэффициенты, которые по аналогии с коэффициентами ξ_τ и ζ_τ введенными ранее, можно назвать, соответственно, коэффициентами объемного и поперечного напряжения при ДС – чистый сдвиг. Давление $p_{\bar{\gamma}}$ обеспечивает неизменность объема при этом ДС, а среднее главное напряжение σ_2 необходимо прикладывать для предотвращения деформации в направлении, перпендикулярном плоскости сдвига. Индекс $\bar{\gamma}$ у величин в формулах (5.2) означает, что они являются функциями параметра $\bar{\gamma}$, определяемыми в эксперименте при ДС – чистый сдвиг. Числовые коэффициенты в формулах (5.2) введены для того, чтобы сохранить аналогию этих формул с выражениями (2.6), которая, в данном случае, является проявлением известной статико-кинематической аналогии применительно к рассматриваемым НС и ДС.

Выражение удельной энергии $\bar{u}_0$ при ДС – чистый сдвиг имеет вид

$$\bar{u}_0(\bar{\gamma}) = \int_0^{\bar{\gamma}} \tau_{\bar{\gamma}} d\bar{\gamma} = \int_0^{\bar{\gamma}} \mu_{\bar{\gamma}} \bar{\gamma} d\bar{\gamma} \tag{5.3}$$

При втором базовом ДС – всестороннем равномерном растяжении и сжатии задана объемная логарифмическая деформация $\bar{\theta}$ и, следовательно,

$$H_1 = H_2 = H_3 = \bar{\theta}/3 \tag{5.4}$$

При этом из (1.10) следует, что

$$\partial\tilde{u}_0/\partial I_{H1} = -p_{(0)\bar{\theta}} = -p_{\bar{\theta}}\exp\bar{\theta} \tag{5.5}$$

где $p_{\bar{\theta}}$ – давление, являющееся функцией деформации $\bar{\theta}$.

Сама удельная энергия $\tilde{u}_0(\bar{\theta})$ при этом равна интегралу

$$\tilde{u}_0(\bar{\theta}) = -\int_0^{\bar{\theta}} p_{(0)\bar{\theta}}d\bar{\theta} = \int_0^{\bar{\theta}} K_{\bar{\theta}}\bar{\theta}d\bar{\theta}, \quad K_{\bar{\theta}}(\bar{\theta}) = -\frac{p_{(0)\bar{\theta}}}{\bar{\theta}} \tag{5.6}$$

где $K_{\bar{\theta}}(\bar{\theta})$ – секущий модуль объемного растяжения и сжатия.

Для определения функции $u_0(I_{H1}, J_{H2}, J_{H3})$ при произвольном ДС необходимо найти такие значения параметров двух рассмотренных базовых ДС $\bar{\gamma}$ и $\bar{\theta}$, при которых

$$u_0(I_{H1}, J_{H2}, J_{H3}) = \bar{u}_0(\bar{\gamma}) + \tilde{u}_0(\bar{\theta}) \tag{5.7}$$

При этом параметры $\bar{\gamma}$ и $\bar{\theta}$, которые можно назвать эквивалентным сдвигом и эквивалентной объемной деформацией, соответственно, должны однозначно определяться инвариантами I_{H1}, J_{H2} и J_{H3} заданного ДС.

Выделяя девиаторную составляющую удельной энергии и раскладывая эту функцию в ряд по степеням инвариантов I_{H1}, J_{H2} и J_{H3}, аналогично разложению в ряд (3.9) функции $u_X^{(\mathrm{dev})}(I_{(0)1}, J_{(0)2}, J_{(0)3})$, с учетом формул (5.2) получим, что значение эквивалентного сдвига $\bar{\gamma}$, при котором выполняется равенство (5.7), определяется из решения кубического уравнения, аналогичного уравнению (3.10) [1]

$$(\bar{\gamma}/2)^3 + 2\xi_{\bar{\gamma}}(I_{H1}/3)(\bar{\gamma}/2)^2 + J_{H2}(\bar{\gamma}/2) + 3\zeta_{\bar{\gamma}}J_{H3} = 0 \tag{5.8}$$

Раскладывая в ряд другую составляющую энергии, зависящую только от объемной деформации заданного ДС – θ, получим, что эквивалентная объемная деформация $\bar{\theta}$ равна θ, т.е. равенство (5.7) выполняется при

$$\bar{\theta} = \theta = I_{H1} \tag{5.9}$$

Формулы (5.3), (5.6) и (5.7), совместно с выражениями (5.8) и (5.9), полностью определяют вид энергетической функции $u_0(I_{H1}, J_{H2}, J_{H3})$ при произвольном ДС, через четыре функции $\mu_{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma})$, $\xi_{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma})$, $\zeta_{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma})$ и $K_{\bar{\theta}}(\bar{\theta})$, определяемых при базовых ДС.

В свою очередь, известная функция $u_0(I_{H1}, J_{H2}, J_{H3})$ позволяет конкретизировать тензорно нелинейное уравнение (1.10), которое после вычислений, аналогичных формулам (4.1) и (4.2), определяет зависимость тензора $\mathbf{T}_{(0)}$ от тензора $\mathbf{H}$ при простом деформировании, обратную зависимости (4.6):

$$\mathbf{T}_{(0)} = K_{\theta}\theta\mathbf{E} + 2\bar{\mu}_{\bar{\gamma}}\left[-\frac{2}{3}\xi_{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma}/2)\mathbf{E} + \mathrm{dev}\mathbf{H} - \frac{3\zeta_{\bar{\gamma}}}{(\bar{\gamma}/2)}\left(\mathrm{dev}^2\mathbf{H} + \frac{2}{3}J_{H2}\mathbf{E}\right)\right] \tag{5.10}$$

$$\bar{\mu}_{\bar{\gamma}} = \mu_{\bar{\gamma}}/[1+\alpha_{\bar{\gamma}}(\bar{\xi}'_{\bar{\gamma}}+1)+\beta_{\bar{\gamma}}(\bar{\zeta}'_{\bar{\gamma}}-1)] \tag{5.11}$$

$$\alpha_{\bar{\gamma}} = \frac{\xi_{\bar{\gamma}} I_{H1}}{3(\bar{\gamma}/2)}, \quad \beta_{\bar{\gamma}} = \frac{3\zeta_{\bar{\gamma}} J_{H3}}{2(\bar{\gamma}/2)^3}, \quad \bar{\xi}'_{\bar{\gamma}} = \frac{d(\ln\xi_{\bar{\gamma}})}{d(\ln\bar{\gamma})}, \quad \bar{\zeta}'_{\bar{\gamma}} = \frac{d(\ln\zeta_{\bar{\gamma}})}{d(\ln\bar{\gamma})} \tag{5.12}$$

где $\bar{\mu}_{\bar{\gamma}}$ – модуль сдвига, приведенный к заданному ДС, $\alpha_{\bar{\gamma}}$, $\beta_{\bar{\gamma}}$, $\bar{\xi}'_{\bar{\gamma}}$ и $\bar{\zeta}'_{\bar{\gamma}}$ – безразмерные коэффициенты, зависящие от экспериментальных функций $\xi_{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma})$ и $\zeta_{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma})$, инвариантов I_{H1}, J_{H2} и J_{H3} и эквивалентного сдвига $\bar{\gamma}$, определяемого из кубического уравнения (5.8).

Согласно уже отмечавшейся выше статико-кинематической аналогии, уравнения (5.8), (5.10) – (5.12) аналогичны ранее полученным уравнениям (3.10), (4.4)–(4.7) и при соответствующих заменах они переходят одно в другое.

Если коэффициенты $\xi_{\bar{\gamma}}$ и $\zeta_{\bar{\gamma}}$ при ДС – чистый сдвиг равны нулю, то уравнение (5.10) становится тензорно линейным и принимает вид, аналогичный соотношению (4.10)

$$\mathbf{T}_{(0)} = K_\theta \theta \mathbf{E} + 2\mu_{\bar{\gamma}} \operatorname{dev}\mathbf{H} \tag{5.13}$$

где величина эквивалентного сдвига $\bar{\gamma}$, согласно уравнению (5.8), равна $\bar{\gamma} = 2\sqrt{-J_{H2}}$. При этом ДС – чистый сдвиг совпадает с одноименным НС.

Очевидно, что все особенности получения замкнутой системы разрешающих уравнений, рассмотренные в предыдущем пункте, остаются справедливыми и для определяющих уравнений (5.10) и (5.13).

Для малых упругих деформаций тензорное определяющее соотношение теории упругости, обратное зависимости (4.19), описывающее геометрически нелинейные эффекты второго порядка, следует из (5.13) при $K_\theta = K = \text{const}$, $\mu_{\bar{\gamma}} = \mu = \text{const}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$:

$$\mathbf{T} = K\mathbf{E}\operatorname{tr}\mathbf{H}_0 + 2\mu \operatorname{dev}\mathbf{H}_0 \tag{5.14}$$

где $\operatorname{tr}\mathbf{H}_0$ – след нелинейного тензора малых деформаций $\mathbf{H}_0$.

В настоящее время одним из проявлений тензорной нелинейности определяющих соотношений в экспериментах считают эффект Пойнтинга [9]. Действительно, при чистом кручении цилиндрического образца тензорная нелинейность закона состояния делает возможным появление продольных, окружных и радиальных компонент деформаций и изменение соответствующих размеров цилиндра. Однако в [4] показано, что эффект удлинения при свободном кручении может быть описан и на основе тензорного линейного уравнения (4.10), поскольку равенство нулю компоненты логарифмической деформации в продольном направлении при кручении не означает отсутствия изменения продольного размера образца. Поэтому наблюдаемое в опытах удлинение при кручении еще не может являться признаком тензорной нелинейности определяющих соотношений для данного материала, хотя эта нелинейность и может вносить свой вклад в эффект Пойнтинга.

Как уже отмечалось, все тензорно нелинейные эффекты, описываемые уравнением (4.6),определяются только двумя функциями – коэффициентами ξ_τ и ζ_τ. Соответственно, в уравнениях (5.10), тензорная нелинейность связана только с коэффициентами $\xi_{\bar{\gamma}}$ и $\zeta_{\bar{\gamma}}$. Анализ уравнений (4.6) и (5.10) показал, что наиболее четким признаком проявления тензорной нелинейности определяющих уравнений в экспериментах является несовпадение диаграмм растяжения и сжатия материала друг с другом. Если хотя бы один из коэффициентов ξ_τ и ζ_τ (или $\xi_{\bar{\gamma}}$ и $\zeta_{\bar{\gamma}}$) не равен нулю, то из уравнений (4.6) и (5.10) следует, что диаграмма растяжения у такого материала будет отличаться от его диаграммы сжатия. И наоборот, совпадение диаграмм друг с другом возможно только при нулевых значениях всех отмеченных коэффициентов и, соответственно, тензорно линейных определяющих соотношениях. При этом диаграммы растяжения и сжатия, конечно, должны быть определены с использованием логарифмической меры деформаций и меры напряжений Треффтца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Панов А.Д.* Теория деформирования изотропного твердого тела при конечных деформациях. (Новый метод определения закона состояния) М.: МГТА им. А.Н. Косыгина, 1998. 126 с.
2. *Панов А.Д.* Особенности определения предельного состояния в элементах конструкций из высокопластичных материалов // Научные труды IV Международного семинара "Актуальные проблемы прочности" им. В.А. Лихачева, Т. 1. Новгород, 2000. С. 148–153.
3. *Панов А.Д.* Особенности определения диаграммы сдвига материала при конечных деформациях // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения. Тр. V Междунар. конф. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 400–407.
4. *Панов А.Д.* Нелинейные эффекты при осесимметричном деформировании цилиндрического тела. Эффект Пойнтинга // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 5. С. 27–43.
5. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. *Панов А.Д.* Теория деформирования изотропных материалов различно сопротивляющихся растяжению и сжатию // Труды второй Международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы фундаментальных наук". Т. II (2). Секция Е. Москва: МГТУ, 1994. С. 42–45.
8. *Панов А.Д.* Новый метод построения определяющих уравнений деформирования изотропного твердого тела // Научные труды III Международного семинара "Актуальные проблемы прочности" им. В.А. Лихачева. Т. 1. Новгород, 1999. С. 177–181.
9. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.

Москва

Поступила в редакцию
2.02.2004