

## ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ПОВОРОТАХ

При выполнении операций, развертывании, ориентациях и автоматизированной сборке многие системы (механизмы, краны, манипуляционные роботы, космические аппараты и конструкции, пр.) и их элементы совершают конечные перемещения и повороты, при которых возникают нестационарные упругие колебания. Такие колебания нарушают точность выполнения операций, ограничивают быстродействие систем и приводят к различным помехам.

Ряд проблем динамики и управляемого движения манипуляционных роботов с упругими элементами рассмотрен в [1]: Математические модели, методы анализа и решения некоторых задач механики упругих космических конструкций изложены в [2, 3].

Во многих случаях требуется, чтобы после завершения операции упругие колебания были устранены или сведены к допустимому минимальному уровню. Для этого обычно используются различные демпфирующие устройства или средства активного гашения нестационарных колебаний [4].

В [5] на примере задачи о малых упругих колебаниях стержня при его повороте на конечный угол было показано, что при определенном законе силового или кинематического воздействия, приложенного с целью поворота стержня, можно снизить уровень упругих колебаний после окончания поворота путем обеспечения необходимых соотношений для собственных частот колебаний стержня.

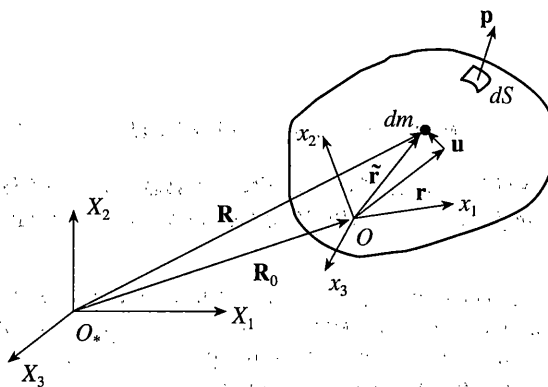
В публикуемой работе этот подход обобщается на случай произвольной пространственной упругой системы, совершающей конечные перемещения и повороты из одного состояния покоя в другое, сопровождаемые упругими колебаниями с конечными деформациями.

**1. Нелинейные уравнения движения упругого тела.** Рассмотрим упругую систему (тело), которая совершает поступательное и вращательное движения, сопровождаемые колебаниями. Колебания тела будем рассматривать в подвижной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , которая "локально" связана с каким-либо элементом тела (или его недеформируемой частью), по всем шести или менее степеням свободы этого элемента (фиг. 1).

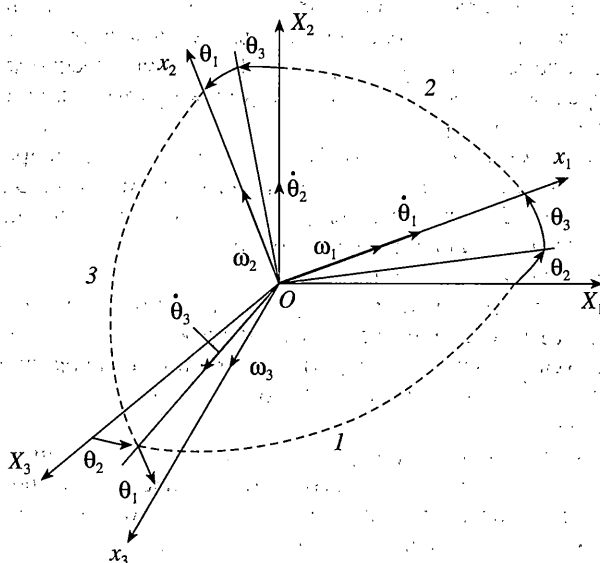
Положение любой точки тела в его недеформированном состоянии характеризуется вектором  $\mathbf{r} = [x_1x_2x_3]^T$ , а перемещения тела, обусловленные его упругими колебаниями относительно системы  $Ox_1x_2x_3$ , — вектором  $\mathbf{u} = [u_1(x_1, x_2, x_3, t)u_2(x_1, x_2, x_3, t)u_3(x_1, x_2, x_3, t)]^T$ .

Положение рассматриваемой подвижной системы координат относительно неподвижной (инерциальной) системы  $O_*X_1X_2X_3$  характеризуется радиусом-вектором  $\mathbf{R}_0 = [X_{01}(t)X_{02}(t)X_{03}(t)]^T$  и вектором углов поворота  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1\theta_2\theta_3]^T$ , где  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  представляют углы крена, рыскания и тангажа, соответственно. Эти углы, их производные по времени  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$  и последовательность вращений тела ( $\theta_2 \rightarrow \theta_3 \rightarrow \theta_1$ ) показаны на фиг. 2.

Векторы скорости поступательного (в точке  $O$ ) и вращательного движений системы  $Ox_1x_2x_3$  в проекциях на ее оси относительно системы  $O_*X_1X_2X_3$  обозначим через



Фиг. 1



Фиг. 2

$\mathbf{v}_0 = [v_{01}(t)v_{02}(t)v_{03}(t)]^T$  и  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1(t)\omega_2(t)\omega_3(t)]^T$ . Из фиг. 2 можно получить кинематические соотношения [6, 7]:

$$\mathbf{v}_0 = \Lambda \dot{\mathbf{R}}_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \Lambda \dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{1.1}$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} c_2 c_3 & s_3 & -s_2 c_3 \\ s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3 & c_1 c_3 & s_1 c_2 + c_1 s_2 s_3 \\ c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3 & -s_1 c_3 & c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3 \end{vmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & s_3 & 0 \\ 0 & c_1 c_3 & s_1 \\ 0 & -s_1 c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \quad s_k = \sin \theta_k, \quad c_k = \cos \theta_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

Здесь  $\Lambda$  является матрицей направляющих косинусов преобразования от системы координат  $O_*X_1X_2X_3$  к системе  $Ox_1x_2x_3$ ; преобразование от  $Ox_1x_2x_3$  к  $O_*X_1X_2X_3$  осуществляется с помощью матрицы  $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$ .

Радиус-векторы и векторы абсолютной скорости  $\mathbf{v}$  и абсолютного ускорения  $\mathbf{a}$  любой точки движущегося и колеблющегося упругого тела (фиг. 1) записываются в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \tilde{\omega}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{u}} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 + \ddot{\omega}\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \ddot{\omega}\tilde{\mathbf{r}} + \ddot{\omega}\tilde{\omega}\mathbf{r} + 2\dot{\omega}\dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}$$

Здесь и далее верхним знаком ( $\sim$ ) обозначается кососимметричная матрица, образованная из компонентов соответствующего вектора как

$$\tilde{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}, \quad \ddot{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

которая используется, чтобы заменить векторное произведение матричным ( $\tilde{\omega} \times \mathbf{r} = \ddot{\omega}\mathbf{r}$ ).

В геометрически нелинейных задачах деформирования упругого тела в квадратичном приближении (когда для угла поворота элемента тела  $\vartheta$  можно принять  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ,  $\cos \vartheta \approx 1 - \vartheta^2/2$ ) перемещение на основании метода Ритца в общем случае может быть представлено в виде разложения [6, 7]:

$$\mathbf{u} = \sum_i q_i \boldsymbol{\varphi}_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i q_j \boldsymbol{\Psi}_{ij} \tag{1.4}$$

Здесь  $q_i(t)$  – обобщенные координаты;  $\boldsymbol{\varphi}_i(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\boldsymbol{\Psi}_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  – заданные вектор-функции, которые выбираются в классе возможных перемещений тела согласно принятой расчетной модели с учетом определенных допущений; при этом функции  $\boldsymbol{\Psi}_{ij}$  выражаются через  $\boldsymbol{\varphi}_i$  и  $\boldsymbol{\varphi}_j$  и являются симметричными ( $\boldsymbol{\Psi}_{ij} = \boldsymbol{\Psi}_{ji}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). В качестве функций  $\boldsymbol{\varphi}_i$  удобно использовать собственные формы малых колебаний рассматриваемой системы.

Уравнения движения можно получить на основании принципа возможных перемещений в виде

$$\int_V (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dm = \mathbf{P}, \quad \int_V \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{a} - \mathbf{g}) dm = \mathbf{M} \tag{1.5}$$

$$\int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dm + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\mathbf{P} = \int_S \mathbf{p} dS, \quad \mathbf{M} = \int_S \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{p} dS, \quad Q_i = \int_S \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \mathbf{p} dS \tag{1.6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i = \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_j q_j \boldsymbol{\Psi}_{ij}$$

где  $\mathbf{g}$  – вектор массовых сил тяготения;  $\mathbf{p}$  – вектор поверхностной нагрузки;  $dm = \rho dV$  – масса элемента тела;  $\rho(x_1, x_2, x_3)$  – плотность тела;  $dV, dS$  – элементы объема и площади поверхности тела;  $\Pi$  – потенциальная энергия деформации упругого тела. Нагрузка

р включает в себя управляющие сосредоточенные силы и моменты. Силы тяготения считаются постоянными и действующими в направлении, противоположном направлению единичного вектора  $\mathbf{v}$  неподвижной системы координат  $O_*X_1X_2X_3$ . Тогда  $\mathbf{g} = -g_0\mathbf{v}$  в системе координат  $O_*X_1X_2X_3$  и  $\mathbf{g} = -g_0\Lambda\mathbf{v}$  в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , где  $g_0$  – ускорение поля массовых сил тяготения.

Уравнения движения (1.5) с учетом (1.2), (1.4) записываются в виде [6, 7]:

$$m\mathbf{a}_0 - \check{\check{\mathbf{L}}}_0\check{\check{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_j \check{\check{\mathbf{L}}}_j\check{\check{q}}_j - \left( \check{\check{\boldsymbol{\omega}}}\check{\check{\mathbf{L}}}_0 + 2\sum_j \check{\check{\mathbf{L}}}_j\check{\check{q}}_j \right)\check{\check{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_j \sum_k L_{jk}\check{\check{q}}_j\check{\check{q}}_k = \mathbf{P} - g_0m\Lambda\mathbf{v}$$

$$- \check{\check{\mathbf{L}}}_0^T\mathbf{a}_0 + \check{\check{\mathbf{I}}}_{00}\check{\check{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_j \check{\check{\mathbf{S}}}_{0j}\check{\check{q}}_j + \left( \check{\check{\boldsymbol{\omega}}}\check{\check{\mathbf{I}}}_{00} + 2\sum_j \check{\check{\mathbf{I}}}_{0j}\check{\check{q}}_j \right)\check{\check{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_j \sum_k \check{\check{\mathbf{S}}}_{0,jk}\check{\check{q}}_j\check{\check{q}}_k = \mathbf{M} - g_0\check{\check{\mathbf{L}}}_0\Lambda\mathbf{v} \quad (1.7)$$

$$\check{\check{\mathbf{L}}}_i^T\mathbf{a}_0 + \check{\check{\mathbf{S}}}_{0i}\check{\check{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_j \check{\check{m}}_{ij}\check{\check{q}}_j - \left( \check{\check{\boldsymbol{\omega}}}^T\check{\check{\mathbf{I}}}_{0i} + 2\sum_j \check{\check{\mathbf{S}}}_{ij}\check{\check{q}}_j \right)\check{\check{\boldsymbol{\omega}}} + \sum_j \sum_k \check{\check{m}}_{i,jk}\check{\check{q}}_j\check{\check{q}}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i - g_0\check{\check{\mathbf{L}}}_i^T\Lambda\mathbf{v}$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$m = \int_V dm, \quad \check{\check{\mathbf{L}}}_0 = \int_V \check{\check{\mathbf{r}}}dm, \quad \check{\check{\mathbf{L}}}_i = \int_V \check{\check{\boldsymbol{\varphi}}}_i dm, \quad \check{\check{\mathbf{L}}}_{ij} = \int_V \check{\check{\boldsymbol{\psi}}}_{ij} dm$$

$$\check{\check{\mathbf{I}}}_{00} = -\int_V \check{\check{\mathbf{r}}}\check{\check{\mathbf{r}}}dm, \quad \check{\check{\mathbf{I}}}_{0i} = -\int_V \check{\check{\mathbf{r}}}\check{\check{\boldsymbol{\varphi}}}_i dm, \quad \check{\check{\mathbf{S}}}_{0i} = \int_V \check{\check{\mathbf{r}}}\check{\check{\boldsymbol{\varphi}}}_i dm, \quad \check{\check{\mathbf{S}}}_{0,ij} = \int_V \check{\check{\mathbf{r}}}\check{\check{\boldsymbol{\psi}}}_{ij} dm \quad (1.8)$$

$$\check{\check{\mathbf{S}}}_{ij} = \int_V \check{\check{\boldsymbol{\varphi}}}_i\check{\check{\boldsymbol{\varphi}}}_j dm, \quad \check{\check{m}}_{ij} = \int_V \check{\check{\boldsymbol{\varphi}}}_i^T\check{\check{\boldsymbol{\varphi}}}_j dm, \quad \check{\check{m}}_{i,jk} = \int_V \check{\check{\boldsymbol{\varphi}}}_i^T\check{\check{\boldsymbol{\psi}}}_{jk} dm \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

Здесь инерционные характеристики, отмеченные сверху волной, вычисляются для деформированного тела и зависят от обобщенных координат в силу того, что от них зависят функции  $\check{\check{\mathbf{r}}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$  и  $\check{\check{\boldsymbol{\varphi}}}_i$  как (1.4) и (1.6). Например, матрица инерции  $\check{\check{\mathbf{I}}}_{00}$  зависит от обобщенных координат до четвертой степени включительно. При практических расчетах, считая упругие перемещения малыми по сравнению с габаритными размерами системы, в уравнениях (1.7) с учетом (1.8) можно ограничиться нелинейными членами не выше третьего или даже второго порядка по координатам  $q_i$ .

Потенциальная энергия деформации упругого тела записывается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T) dV \quad (1.9)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13}]^T$  – вектор деформаций относительного удлинения ( $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ) и сдвига ( $\gamma_{\alpha\beta}$ );  $\boldsymbol{\varepsilon}_T$  – вектор начальных температурных или технологических деформаций;  $\mathbf{C}$  – симметричная матрица коэффициентов упругости, входящих в соотношения закона Гука  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)$ ;  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}\tau_{12}\tau_{23}\tau_{31}]^T$  – вектор напряжений.

При конечных углах поворота элементов упругого тела в квадратичном приближении

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right], \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (1.10)$$

( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ )

В случае тонких тел (стержней, пластин, оболочек) их нормальные перемещения, которые обычно значительно больше тангенциальных, можно представить по методу Ритца в виде линейных зависимостей от обобщенных координат. Тангенциальные перемещения при этом можно выразить через нормальные перемещения квадратичным образом, пренебрегая инерцией в тангенциальных направлениях и интегрируя квазистатические уравнения равновесия с учетом закона Гука и конечных деформаций (1.10). Тогда тангенциальные перемещения выражаются через обобщенные координаты квадратично в виде (1.4). Выражение  $\Pi$  в обобщенных координатах при этом будет содержать нелинейные члены до четвертого порядка, а обобщенные упругие силы  $\partial\Pi/\partial q_i$  – до третьего порядка включительно.

Для решения задачи динамики упругой в общем случае свободной системы, движущейся под действием заданных нагрузок и сил тяготения используются уравнения (1.7) с учетом  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v}_0$ , к которым добавляются кинематические соотношения (1.1) в виде

$$\dot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\omega} \tag{1.11}$$

В результате получается замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений: двенадцать уравнений первого порядка для двенадцати компонент векторных функций  $\mathbf{R}_0, \boldsymbol{\theta}; \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}$  и  $n$  уравнений второго порядка для обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Эта система связанных дифференциальных уравнений может быть проинтегрирована численно при заданных начальных условиях.

Для управляемого движения необходимо определить колебания системы и действующие на нее управляющие силы или реакции при заданном движении некоторых точек или абсолютно жесткой части этой системы. Эта задача характерна для управляемых систем, совершающих заданное программное движение, а также для системы, присоединенной к достаточно жесткому и массивному несущему телу (основанию), на движение которого колебания присоединенной системы практически не оказывает влияния.

Когда задано движение несущего тела, функции  $\mathbf{v}_0(t), \boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{R}_0(t)$  и  $\boldsymbol{\theta}(t)$  являются известными. Уравнения для неизвестных обобщенных координат  $q_i(t)$ , описывающих относительное движение присоединенной к несущему телу упругой системы, на основании (1.7) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \sum_j \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j - 2 \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{ij}^T \boldsymbol{\omega} \dot{q}_j + \sum_j \sum_k \tilde{m}_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = \\ & = Q_i - \tilde{\mathbf{L}}_i^T (\mathbf{a}_0 + g_0 \mathbf{A} \mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{S}}_{0i}^T \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{I}}_{0i}^T \boldsymbol{\omega} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Первые два уравнения системы (1.7) в данном случае могут быть использованы для определения необходимых управляющих сил (или реакций закрепления), входящих в  $\mathbf{P}(t)$  и  $\mathbf{M}(t)$ .

**2. Конечные перемещения и повороты линейной упругой системы.** Рассмотрим быстрые конечные перемещения и повороты упругой системы из одного состояния покоя в другое за время  $T$ . В этом случае

$$\mathbf{v}_0(0) = \mathbf{v}_0(T) = 0, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0 \tag{2.1}$$

и поэтому можно предположить, что  $\mathbf{v}_0$  и  $\boldsymbol{\omega}$  остаются достаточно малыми при  $0 < t < T$ . Кроме того, будем считать, что система является достаточно жесткой, так что ее упругие перемещения также малы; они в данном случае вместо (1.4) ищутся в виде  $\mathbf{u} = \Sigma q_i \boldsymbol{\Phi}_i$ . Силами тяжести будем пренебрегать по сравнению с центробежными силами.

Пренебрегая нелинейными членами с  $v_0$ ,  $\omega$  и  $q_i$ , и полагая  $g_0 \approx 0$  из системы (1.7) с учетом (1.8) получим линейные уравнения движения

$$\begin{aligned}
 m\dot{v}_0 - \check{L}_0\dot{\omega} + \sum_j L_j \ddot{q}_j &= P \\
 -\check{L}_0^T \dot{v}_0 + I_{00}\dot{\omega} + \sum_j S_{0j} \ddot{q}_j &= M \\
 L_i^T \dot{v}_0 + S_{0i}^T \dot{\omega} + \sum_j m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j k_{ij} \dot{q}_j &= Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 m &= \int_V dm, \quad L_0 = \int_V r dm, \quad L_i = \int_V \varphi_i dm \\
 I_{00} &= -\int_V \check{r}\check{r} dm, \quad S_{0i} = \int_V \check{r}\varphi_i dm, \quad m_{ij} = \int_V \varphi_i^T \varphi_j dm
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$P = \int_S p dS, \quad M = \int_S \check{r} p dS, \quad Q_i = \int_S \varphi_i^T p dS$$

где  $k_{ij}$  – коэффициенты жесткости, представляющие потенциальную энергию деформации линейной системы в обобщенных координатах

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} q_i q_j$$

Для абсолютно твердого тела из уравнений (2.2) при  $q_i \equiv 0$  получим

$$m\dot{v}_0 - \check{L}_0\dot{\omega} = P, \quad -\check{L}_0^T \dot{v}_0 + I_{00}\dot{\omega} = M \tag{2.4}$$

В этих уравнениях по сравнению с точными уравнениями движения вращающегося твердого тела не учитываются центробежные силы инерции.

Из уравнений (2.4) получим, что для выполнения (2.1), т.е. для перевода твердого тела из одного состояния покоя в другое, необходимо, чтобы управляющие силы удовлетворяли условиям

$$\int_0^T P dt = 0, \quad \int_0^T M dt = 0 \tag{2.5}$$

Эти условия при силовых управляющих воздействиях можно выполнить, используя различные знакпеременные функции  $P(t)$ ,  $M(t)$ , например, кусочно-постоянные, кусочно-линейные и т.д. Примем их в виде волны синусоиды

$$\begin{aligned}
 P &= P^0 \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad M = M^0 \sin \frac{2\pi t}{T} \quad \text{при } 0 \leq t \leq T \\
 P &= 0, \quad M = 0 \quad \text{при } t > T
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Тогда, интегрируя уравнения (2.4) с учетом (2.1), (2.6), получим

$$\begin{aligned}
 v_0 &= v_0^0 \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad \omega = \omega^0 \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right) \quad \text{при } 0 \leq t \leq T \\
 v_0 &= 0, \quad \omega = 0 \quad \text{при } t > T
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{v}_0^0 = \frac{T}{\pi m} \left[ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{m} \check{\mathbf{L}}_0 \mathbf{I}^{-1} \check{\mathbf{L}}_0^T \right) \mathbf{P}^0 + \check{\mathbf{L}}_0 \mathbf{I}^{-1} \mathbf{M}^0 \right] \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\omega}^0 = \frac{T}{\pi m} \mathbf{I}^{-1} \left[ \frac{1}{m} \check{\mathbf{L}}_0^T \mathbf{P}^0 + \mathbf{M}^0 \right], \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_{00} - \frac{1}{m} \check{\mathbf{L}}_0^T \check{\mathbf{L}}_0$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

Если оси системы координат  $Ox_1x_2x_3$  совместить с главными центральными осями недеформированного тела, то  $\mathbf{L}_0 = 0$ , а матрица  $\mathbf{I}_{00}$ , представляющая тензор инерции твердого тела, будет диагональной. Это упрощает выражения (2.8).

Векторы  $\mathbf{R}_0$  и  $\boldsymbol{\theta}$  определяются путем интегрирования кинематических соотношений (1.11) с учетом (2.7) при начальных условиях  $\mathbf{R}_0(0) = \mathbf{R}_{0,0}$ ,  $\boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0$ . В результате получаются зависимости  $\mathbf{R}_0(T)$ ,  $\boldsymbol{\theta}(T)$  от  $\mathbf{P}^0$ ,  $\mathbf{M}^0$ , по которым можно установить значения  $\mathbf{P}^0$ ,  $\mathbf{M}^0$ , необходимые для передвижения и поворота тела силовыми воздействиями (2.6) за время  $T$  в заданное положение  $\mathbf{R}_{0,T} = \mathbf{R}_0(T)$ ,  $\boldsymbol{\theta}_T = \boldsymbol{\theta}(T)$ .

Далее рассмотрим вопрос о том, каким образом можно устранить или минимизировать до заданного уровня упругие колебания системы после ее передвижения и поворота. В качестве заданных функций  $\phi_i$  будем использовать собственные формы колебаний упругого тела при определенных граничных условиях на  $S$ . Тогда в силу условий ортогональности собственных форм колебаний  $m_{ij} = 0$ ,  $k_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . При этом уравнения для нормальных координат  $q_i(t)$  будут несвязанными между собой и они могут быть решены точно.

Рассмотрим дифференциальное уравнение типа уравнения для нормальных координат с правой частью в виде волны синусоиды, как в (2.6):

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \begin{cases} a \sin \Omega t & \text{при } 0 \leq t \leq T, \quad \Omega = 2\pi/T \\ 0 & \text{при } t > T \end{cases} \quad (2.9)$$

Решение этого уравнения при  $\Omega \neq \omega$  и  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$  будет

$$y = \frac{a}{\omega(\Omega^2 - \omega^2)} [\Omega \sin \omega t - \omega \sin \Omega t] \quad \text{при } 0 \leq t \leq T \quad (2.10)$$

$$y = \frac{a\Omega}{\omega(\Omega^2 - \omega^2)} [\sin \omega t - \sin \omega(t - T)] \quad \text{при } t > T$$

Отсюда следует, что

$$y \equiv 0 \quad \text{при } t \geq T, \quad \text{если } \omega = k\Omega \quad (k = 2, 3, 4, \dots) \quad (2.11)$$

Таким образом, при воздействии импульса в виде одной волны синусоиды колебания системы (2.9) прекращаются одновременно с прекращением его действия, если продолжительность импульса превышает в целое число раз ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ) период собственных колебаний, т.е. если  $T = k2\pi/\omega$ .

То же самое справедливо для импульса в виде  $n$  волн синусоиды ( $\Omega = 2\pi n/T$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n \neq k$ ) и для произвольного импульса  $f(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющего условиям

$$f(t) = -f(T - t); \quad \int_0^T f(t) \sin(2\pi kt/T) dt = 0$$

Этот факт можно использовать для устранения упругих колебаний линейной системы путем выбора продолжительности импульса по отношению к периодам собственных колебаний или наоборот путем обеспечения необходимых значений собственных частот при заданной продолжительности импульса.

Пусть свободная линейная система (2.2) подвергается силовым управляющим воздействиям в виде заданной нагрузки  $\mathbf{p}$  и входящих в ее состав сосредоточенных сил

и моментов. В этом случае в качестве функции  $\varphi_i$  будем использовать собственные формы колебаний свободной (незакрепленной) системы. Тогда на основании условий ортогональности этих форм между собой и с формами перемещения свободного недеформируемого тела будем иметь

$$m_{ij} = 0, \quad k_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j; \quad \mathbf{L}_i = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_{0i} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Уравнения (2.2) примут вид

$$m\dot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{L}_0\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{P} \\ -\check{\mathbf{L}}_0^T \dot{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{I}_{00}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M} \quad (2.13)$$

$$m_{ii}\ddot{q}_i + k_{ii}q_i = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Для перемещения и поворота системы управляющая нагрузка (силы и моменты) задается аналогично (2.6) в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^0 \sin(2\pi t/T) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T, \quad \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t > T \quad (2.14)$$

Продолжительность импульса  $T$  выбирается так, чтобы выполнялось условие  $T = k2\pi/\omega_i$ , ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ),  $\omega_i = \sqrt{k_{i1}/m_{i1}}$  – низшая собственная частота колебаний. В этом случае на основании решения (2.10) при  $t \geq T$  прекращаются колебания по низшей собственной форме ( $q_i(t) \equiv 0$  при  $t \geq T$ ).

Если систему спроектировать так, чтобы первая  $\omega_1$  и  $m$ -я  $\omega_m$  собственные частоты находились в соотношении  $\omega_m/\omega_1 = k_m/k_1$ , где  $k_1, k_m$  – целые числа из ряда 2, 3, 4, ... при  $k_m > k_1$ , то при  $t \geq T$  также прекратятся колебания по  $m$ -ой собственной форме ( $q_m \equiv 0$  при  $t \geq T$ ).

Таким образом, для устранения колебаний упругой линейной системы после ее передвижения и поворота под действием импульса его продолжительность должна быть согласована со значениями частот собственных форм колебаний, которые требуется устранить. Амплитудные значения равнодействующих сил и моментов (векторы  $\mathbf{P}^0, \mathbf{M}^0$ ) нагрузки (2.14) определяются на основании решения (1.11) с учетом (2.7), (2.8), так чтобы система после ее перемещения и поворота остановилась в заданном положении  $\mathbf{R}_{0,T}, \boldsymbol{\theta}_T$ .

Рассмотрим теперь случай, когда управление передвижением и поворотом системы осуществляется кинематически. Пусть  $\mathbf{v}_0(t)$  и  $\boldsymbol{\omega}(t)$  заданы в виде (2.7), где  $\mathbf{v}_0^0, \boldsymbol{\omega}^0$  – заданные векторы. Будем считать, что внешняя нагрузка отсутствует, а  $\mathbf{p}$  в данном случае представляет только реакции на части поверхности  $S^0 \subset S$ , по которой происходит соединение упругой системы с несущим телом;  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  – равнодействующие этих реакций.

В качестве функций  $\varphi_i$  возьмем собственные формы колебаний неподвижно закрепленного на  $S^0$  упругого тела. При этом выполняются условия:

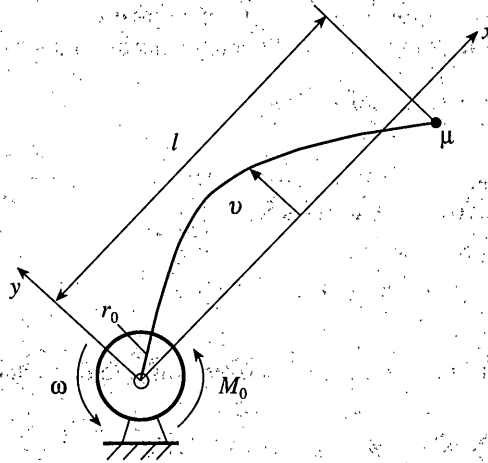
$$\varphi_i = 0 \quad \text{на} \quad S^0; \quad m_{ij} = 0, \quad k_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \quad (2.15)$$

Уравнения упругих колебаний присоединенной системы следуют из уравнений (2.2) с учетом (2.15):

$$m_{ii}\ddot{q}_i + k_{ii}q_i = -\mathbf{L}_i^T \dot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{S}_{0i}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.16)$$

Решение этих уравнений при заданных в виде (2.7) функциях  $\mathbf{v}_0(t)$  и  $\boldsymbol{\omega}(t)$  записывается также как (2.10) для уравнения (2.9). При движении несущего тела (основания) по закону (2.7) колебания по  $i$ -ой форме прекратятся ( $q_i(t) \equiv 0$  при  $t \geq T$ ), если выполняется условие  $T = k2\pi/\omega_i$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ),  $\omega_i = \sqrt{k_{ii}/m_{ii}}$ .





Фиг. 3

Первые два векторных уравнения (2.2) в данном случае используются для определения реакций  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$ .

Возможны различные варианты смешанных условий на границе  $S^0$ , соединяющей упругое тело с основанием. Например, при шарнирном соединении упругой системы с неподвижным основанием заданы  $\mathbf{v}_0 \equiv \mathbf{0}$  и внешняя нагрузка  $\mathbf{p}$  на поверхности  $S$ . В этом случае в качестве функций  $\Phi_i$  используются собственные формы колебаний шарнирно закрепленной системы; условия ортогональности для которых записываются в виде:

$$m_{ij} = 0, \quad k_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j; \quad S_{0i} = 0 \quad (2.17)$$

С учетом этих условий при  $\mathbf{v}_0 \equiv \mathbf{0}$  уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{00} \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M} \\ m_{ii} \ddot{q}_i + k_{ii} \dot{q}_i &= Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Уравнения для нормальных координат  $q_i$  в системах (2.13), (2.18) совпадают по виду и отличаются только значениями коэффициентов  $m_{ii}$ ,  $k_{ii}$  и обобщенных сил  $Q_i$ , поскольку они соответствуют различным собственным формам колебаний. Соответственно будут отличаться продолжительность импульса и амплитудные значения нагрузки (управляющих сил), необходимые для передвижения и поворота этих систем и устранения упругих колебаний.

**3. Нелинейная задача поворота гибкого стержня.** Рассмотрим колебания вращающегося гибкого стержня с абсолютно жестким центральным телом и с сосредоточенной массой на свободном конце (фиг. 3) в двух вариантах: (1) задан угол поворота тела  $\theta(t)$ , (2) задан момент  $M_0(t)$ , действующий на тело.

При поперечных колебаниях стержня в плоскости вращения будем считать его нерастяжимым. Тогда продольное перемещение стержня  $u(x, t)$  при конечных деформациях (1.10) с учетом  $u(0, t) = 0$  выражается через поперечное перемещение как

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^x v^2 dx \quad (3.1)$$

где штрихом обозначается производная по координате  $x$ .

Поперечные перемещения по методу Ритца представим в виде разложения

$$v = \sum_i q_i(t) \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

где  $\varphi_i(x)$  – заданные функции.

Из условия (3.1) с учётом (3.2) получаем

$$u = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i(t) q_j(t) \psi_{ij}(x), \quad \psi_{ij}(x) = - \int_0^x \varphi_i' \varphi_j' dx \quad (3.3)$$

Потенциальная энергия изгиба стержня будет определяться выражением

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dx = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} q_i q_j, \quad k_{ij} = \int_0^l EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx \quad (3.4)$$

где  $EI(x)$  – изгибная жесткость стержня.

Колебания будем рассматривать в системе координат  $Oxy$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega(t)$ . В случае кинематического воздействия система координат  $Oxy$  связана с центральным телом и поэтому  $\omega = \dot{\theta}(t)$ ; при этом заданные функции  $\varphi_i(x)$  должны удовлетворять условиям закрепления на неподвижном теле  $\varphi_i(0) = \varphi_i'(0) = 0$ . В случае силового воздействия на центральное тело моментом  $M_0(t)$  угловая скорость  $\omega(t)$  считается неизвестной, а функции  $\varphi_i(x)$  выбираются так, что  $\varphi_i(0) = r_0 \varphi_i'(0)$ ,  $\varphi_i'(0) \neq 0$ .

Нелинейные уравнения движения стержня получим из уравнений (1.7), полагая

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_0 + x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_i \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_{ij} = \begin{Bmatrix} \psi_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Тогда будем иметь

$$\tilde{J}_{00} \dot{\omega} + \sum_j \tilde{S}_{0j} \ddot{q}_j + 2\omega \sum_j \tilde{J}_{0j} \dot{q}_j + \sum_i \sum_j \tilde{S}_{0,ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k = M \quad (3.6)$$

$$\tilde{S}_{0i} \dot{\omega} + \sum_j m_{ij} \ddot{q}_j - 2\omega \sum_j \tilde{S}_{ij} \dot{q}_j + \sum_i \sum_j m_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j k_{ij} \ddot{q}_j - \omega^2 \tilde{J}_{0i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\tilde{J}_{00} = J_0^0 + J_0 + \sum_i \tilde{J}_{0i} q_i, \quad \tilde{J}_{0i} = \sum_j (m_{ij} + \mu_{0,ij}) q_j$$

$$\tilde{S}_{0i} = m_{0i} + \sum_j \sum_k \left( \frac{1}{2} \mu_{i,jk} - \mu_{j,ik} \right) q_j q_k$$

$$\tilde{S}_{0,jk} = - \sum_i \mu_{i,jk} q_i, \quad \tilde{S}_{ij} = \sum_k (\mu_{j,ik} - \mu_{i,jk}) q_k$$

$$J_0 = \int_0^l m(r_0 + x)^2 dx, \quad m_{0i} = \int_0^l m(r_0 + x)\varphi_i dx \quad (3.7)$$

$$m_{ij} = \int_0^l m\varphi_i\varphi_j dx, \quad \mu_{0,ij} = \int_0^l m(r_0 + x)\psi_{ij} dx$$

$$m_{i,jk} = \int_0^l m\varphi_i\psi_{jk} dx, \quad m = \bar{m}(x) + \mu\delta(x-l)$$

$$M = M_0 + \int_0^l (r_0 + x)p dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j} q_i q_j \int_0^l p\psi_{ij} dx$$

$$Q_i = \int_0^l p\varphi_i dx \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

где  $J_0^0$  – приведенный момент инерции центрального тела,  $\bar{m}(x)$  – погонная масса стержня,  $\mu$  – сосредоточенная масса на конце стержня,  $\delta(\dots)$  – дельта-функция. В выражениях для коэффициентов (3.7) опущены некоторые нелинейные члены, зависящие от произведения  $\psi_{ij}\psi_{kl}$ .

Расчеты выполним для стержня постоянного поперечного сечения ( $EI = \text{const}$ ,  $\bar{m} = \text{const}$ ) с сосредоточенной массой на конце  $x = l$ .

(1) Поворот стержня на угол  $\theta_T = \pi/2$  за время  $T$  осуществляется с помощью кинематического воздействия (заданного поворота центрального тела)

$$\theta = \frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right), \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{\pi}{2T} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (t \leq T) \quad (3.8)$$

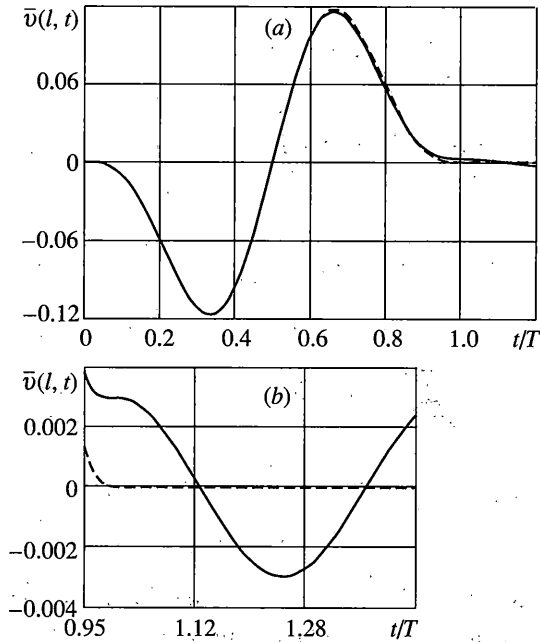
при отсутствии поперечной нагрузки ( $p \equiv 0$ ).

Для расчета в качестве функций  $\varphi_i(x)$  используются три низших собственных формы колебаний неподвижно закрепленного стержня с сосредоточенной массой  $\mu = 0.20657\bar{m}l$  на конце; при этом значении  $\mu$  отношение двух первых собственных частот равно  $\omega_2/\omega_1 = 7$ .

Безразмерные собственные частоты  $\omega_i \sqrt{\bar{m}l^4/EI}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) равны: 2.5936, 18.155, 53.477, 108.09. На основании условий ортогональности собственных форм колебаний  $m_{ij} = 0$ ,  $k_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

Продолжительность воздействия  $T$  берем такой, чтобы она в два раза превышала период малых (линейных) колебаний по нижней собственной форме ( $T = 2T_1 = 4\pi/\omega_1$ ) и, соответственно, в четырнадцать раз – по второй собственной форме ( $T = 14T_2 = 28\pi/\omega_2$ ). Тогда при использовании линейных уравнений при  $t \geq T$  устраняются колебания по первой и второй собственным формам.

На фиг. 4, *a, b* показаны графики изменения безразмерного прогиба на конце поворачивающегося стержня  $\bar{v}(l, t) = v(l, t)/l$ : сплошные линии – результаты численного решения полных нелинейных уравнений при нулевых начальных условиях (второе уравнение (3.6) с учетом (3.7) при  $i, j, k = 1, 2, 3$ ); штриховые линии – результаты решения линейных уравнений (в (3.6) опущены все нелинейные члены с  $\omega$  и  $q_i$ ). Если в уравне-



Фиг. 4

ниях (3.6) наряду с линейными членами, учесть только нелинейные члены  $\omega^2 \tilde{J}_{0i}$ , представляющие центробежные силы инерции, то результаты оказываются весьма близкими с результатами решения полных нелинейных уравнений.

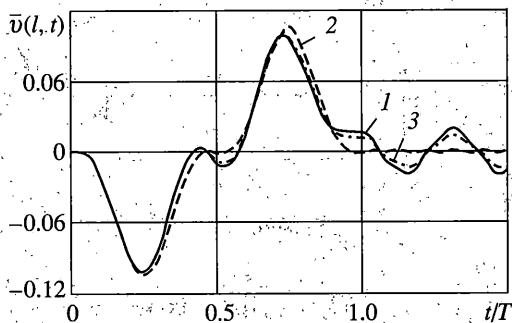
(2) Поворот стержня на угол  $\theta_T = \pi/2$  за время  $T$  осуществляется с помощью момента

$$M_0 = \bar{M}_0 \sin(2\pi t/T) \quad \text{при} \quad t \leq T \quad (3.9)$$

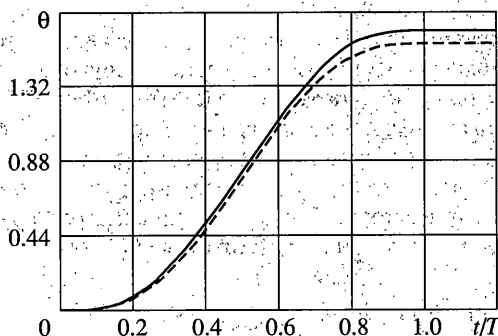
При этом будем считать, что отсутствуют центральное тело ( $r_0 = 0, J_0^0 = 0$ ) и поперечная нагрузка ( $p \equiv 0$ ). Амплитудное значение момента  $\bar{M}_0$  находим путем интегрирования дифференциальных уравнений вращения стержня как твердого тела  $J_0 \dot{\omega} = M_0(t)$ ,  $\dot{\theta} = \omega$  при условиях  $\theta(0) = 0, \theta(T) = \pi/2$ . В результате получим

$$\theta = \frac{\bar{M}_0 T^2}{2\pi J_0} \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right), \quad \bar{M}_0 = \frac{\pi^2 J_0}{T^2} \quad (3.10)$$

В качестве функций  $\varphi_i(x)$  используются три низших собственных формы упругих колебаний стержня, шарнирно закрепленного на конце  $x = 0$  и несущего сосредоточенную массу  $\mu = 0.20657 \bar{m} l$  на свободном конце  $x = l$ . Безразмерные собственные частоты  $\omega_i \sqrt{ml^4/EI}$  шарнирно закрепленного на одном конце стержня с сосредоточенной массой  $\mu = 0.20657 ml$  на другом конце при  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  будут равны: 0, 12.445, 42.861, 92.604, 161.92. На основании условий ортогональности собственных форм колебаний  $m_{0i} = 0$  при  $i \neq 0, m_{ij} = 0, k_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .



Фиг. 5



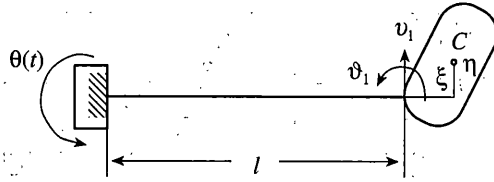
Фиг. 6

Продолжительность воздействия  $T$  берем такой, чтобы она в три раза превышала период малых (линейных) колебаний по нижней ненулевой собственной форме ( $T = 3T_1 = 6\pi/\omega_1$ ).

На фиг. 5, показаны графики  $\bar{v}(l, t)$ : сплошные линии 1 – решение полных нелинейных уравнений (3.6) с учетом (3.7) при  $i, j, k = 1, 2, 3$ ; штриховые линии 2 – решение линейных уравнений (3.6); штрихпунктирные линии 3 – решение уравнений (3.6), в которых из нелинейных членов оставлены только члены  $\omega^2 \tilde{J}_{0i}$ .

Из сравнения результатов, представленных на фиг. 4 и 5, видно, что в случае силового поворота стержня с помощью момента  $M_0(t)$  нелинейности оказывают более существенное влияние на его упругие колебания, чем в случае кинематического поворота с помощью заданного угла  $\theta(t)$ . Нелинейности также повышают уровень “остаточных” колебаний, происходящих после прекращения действия импульса и окончания поворота стержня при  $t > T$ .

Малые колебания в силу ортогональности собственных форм с перемещениями твердого тела не оказывают влияние на поворот стержня. Однако нелинейные колебания с конечными амплитудами становятся связанными с перемещениями твердого тела и поэтому нелинейности оказывают влияние на поворот упругого стержня или, то же самое, на поворот связанной с ним системы координат  $Oxy$ . На фиг. 6 показаны графики изменения угла поворота упругого стержня  $\theta(t)$  под действием момента (3.9): сплошные линии – решение полных нелинейных уравнений (3.6) с учетом (3.7) и уравнения  $\theta = \omega$  при нулевых начальных условиях ( $\omega = \theta = \dot{q}_i = \dot{q}_i = 0$  при  $t = 0$ ); штриховые ли-



Фиг. 7.

нии – решение линейных уравнений (3.6), которое получается аналитически в виде (3.10). При учете в уравнениях (3.6) наряду с линейными только нелинейных членов  $\omega^2 \tilde{J}_{0i}$ , представляющих центробежные силы инерции, результаты для  $\theta(t)$  практически совпадают с решением нелинейных уравнений (3.6).

**4. Линейная задача поворота упругого стержня с массивным твердым телом на конце.** Рассмотрим плоскую задачу поворота и колебаний упругого стержня, на конце которого прикреплено массивное абсолютно твердое тело (фиг. 7). Задача состоит в том, чтобы переместить и развернуть тело за заданное время  $T$  из одного состояния покоя в другое. Это передвижение по траектории в виде окружности осуществляется кинематически за счет поворота стержня относительно другого конца (центра вращения) на угол  $\theta(t)$ . Этот угол при выбранном положении центра вращения, определенной длине стержня и заданном значении конечного угла  $\theta_T = \theta(T)$  берется в виде

$$\theta = \theta_T \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right) \quad \text{при } t \leq T \quad (4.1)$$

Этот закон движения получается как решение задачи поворота тела на абсолютно жестком стержне при условиях  $\theta(0) = \theta(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(T) = 0$ ,  $\theta(T) = \theta_T$ , без учета центробежных сил инерции и сил тяжести.

При повороте тела на упругом стержне также будем пренебрегать центробежными силами инерции и силами тяжести. Стержень будем считать невесомым, а его изгибные перемещения малыми. При этих предположениях линейные уравнения движения тела записываются в виде

$$J(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}_1) + S(\dot{\theta}l + \dot{v}_1) + k_{11}\varphi_1 + k_{12}v_1 = 0 \quad (4.2)$$

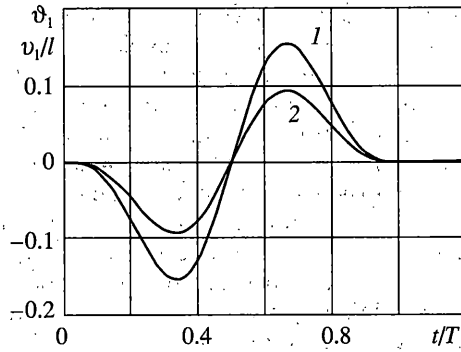
$$S(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}_1) + M(\dot{\theta}l + \dot{v}_1) + k_{12}\varphi_1 + k_{22}v_1 = 0$$

$\varphi_1(t)$ ,  $v_1(t)$  – угол поворота и поперечное перемещение конца стержня, соединенного с телом, обусловленные его изгибом;  $M$  – масса тела;  $S = M\xi$  – момент массы;  $J$  – момент инерции тела относительно точки, в которой оно соединяется с концом стержня;  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{22}$  – коэффициенты жесткости стержня. Для консольного стержня постоянно поперечного сечения последние определяются как

$$k_{11} = 4EI/l, \quad k_{12} = -6EI/l^2, \quad k_{22} = 12EI/l^3 \quad (4.3)$$

где  $EI$  – изгибная жесткость стержня.

Для того, чтобы при повороте системы по закону (4.1) упругие колебания прекратились, начиная с момента ее остановки при  $t \geq T$ , необходимо, как было показано ранее, выполнить условие  $\omega_2/\omega_1 = k_2/k_1$ , где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – собственные частоты колебаний рассматриваемой двухстепенной системы;  $k_1 = T\omega_1/2\pi$ ,  $k_2 = T\omega_2/2\pi$  – заданные целые числа из ряда 2, 3, 4 ... при  $k_2 > k_1$ .



Фиг. 8

Частотное уравнение для рассматриваемой системы записывается в виде

$$a\omega^4 - b\omega^2 + c = 0 \quad (4.4)$$

$$a = JM - S^2, \quad b = k_{11}M + k_{22}J - 2k_{12}S, \quad c = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$$

Обозначим  $k_2/k_1 = \alpha$ ; это число известно по условию выбора  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда требуемое соотношение  $\omega_2/\omega_1 = \alpha$  при использовании выражений для корней уравнения (4.4) записывается в виде

$$b^2/(ac) = (\alpha^2 + 1)^2/\alpha^2 \quad (4.5)$$

Соотношение (4.5) должно быть удовлетворено путем выбора какого-либо варьируемого параметра системы. При выполнении условия (4.5) собственные частоты колебаний определяются как

$$\omega_1^2 = \frac{b}{a} \frac{1}{\alpha^2 + 1}, \quad \omega_2^2 = \frac{b}{a} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} = \omega_1^2 \alpha^2 \quad (4.6)$$

Для примера возьмем  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 10$  и  $\alpha = 5$ . Это означает, что продолжительность  $T$  управляющего воздействия (4.1) превышает период собственных колебаний по первой и второй формам в два и в десять раз, соответственно. По соотношению  $\omega_2/\omega_1 = \alpha$  или (4.5) при  $\alpha = 5$ , задаваясь, например, величиной  $\xi = 0.1l$  и определяя  $\eta$ , получим

$$S = 0.1Ml, \quad J = \frac{0.52}{3}Ml^2, \quad \omega_1^2 = \frac{12}{7} \frac{EI}{Ml^3}, \quad \omega_2^2 = 25\omega_1^2 \quad (4.7)$$

Таким образом, в данном случае для настройки собственных частот колебаний системы используется регулирование положения точки крепления тела к стержню по отношению к положению центра тяжести тела (точка  $C$  на фиг. 7).

На фиг. 8 представлены результаты численного решения уравнений (4.2) с коэффициентами (4.3), (4.7), для которых выполняются условия  $T = 2(\omega_1/2\pi) = 10(\omega_2/2\pi)$ , при повороте системы на угол  $\theta_T = \pi/2$  по закону (4.1) при начальных условиях  $\vartheta_1(0) = \dot{\vartheta}_1(0) = \dot{v}_1(0) = v_1(0) = 0$ . Видно, что в момент времени  $t = T$  движение системы прекращается (кривая 1 соответствует  $\vartheta_1$ , а кривая 2 —  $v_1/l$ ).

**5. Заключение.** Рассмотрена динамика управляемого движения пространственной системы (тела) при быстрых конечных перемещениях и поворотах, сопровождаемых нестационарными упругими колебаниями с конечными деформациями. Получены уравнения движения в скоростях связанной с телом подвижной системы координат и в обобщенных координатах, представляющих упругие колебания.

Для перемещения и поворота тела из одного состояния покоя в другое используется силовое или кинематическое управляющее воздействие (импульс) в виде одной волны синусоиды. Показано, что если использовать линейные уравнения движения (пренебрегая нелинейными членами с угловой скоростью и обобщенными координатами), то при продолжительности импульса  $T$ , превышающей в целое число раз ( $k = 2, 3, \dots$ ) период собственной формы колебаний, упругие колебания по данной форме прекращаются одновременно с остановкой тела в момент прекращения воздействия. То же самое справедливо для произвольного импульса  $f(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющего условию  $f(t) = -f(T - t)$  и ортогонального с гармоникой  $\sin(2\pi kt/T)$ .

Для устранения колебаний по нескольким собственным формам их частоты колебаний путем варьирования параметров системы согласуются с продолжительностью импульса, так чтобы выполнялись необходимые для этого соотношения.

На примерах расчета динамики гибкого стержня при конечном повороте показано, что при использовании нелинейных уравнений движения колебания после прекращения управляющего воздействия остаются, однако их уровень резко снижается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 03-01-00688).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 368 с.
2. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. Механика больших космических конструкций. М.: Изд-во "Факториал", 1997. 302 с.
3. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987, 232 с.
4. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Управление колебаниями упругих конструкций при нестационарных возмущениях // Известия РАН. МТТ. 2003. № 2. С. 157–167.
5. Гришанина Т.В. Управляемый поворот упругого стержня на конечный угол // Вестник МАИ. 2004. Т. 11. № 1. С. 64–68.
6. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Нелинейные и параметрические колебания упругих систем. М.: Изд-во МАИ, 1993. 68 с.
7. Шклярчук Ф.Н. Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций // Известия РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 161–175.

Москва

Поступила в редакцию  
28.04.04