МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2004

УДК 534.1

© 2004 г. Л.В. ФЕДОРОВ

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С БОЛЬШИМИ СКОРОСТЯМИ

Рассматривается движение тела переменной массы с учетом релятивистских эффектов, обсуждаемых в специальной теории относительности (СТО). Получены основные уравнения, описывающие кинематику движения. Проведено сравнение основных формул, описывающих движение тела переменной массы, полученных из классической теории и следующих из СТО.

1. Движение с нерелятивистскими скоростями. При движении со скоростями, намного меньшими скорости света, уравнение, описывающее движение тела переменной массы, можно получить из закона сохранения импульса. Движение рассматривается относительно инерциальной системы отсчета $OXYZ$. Тело массой m, отбрасывая от себя часть dm со скоростью $\mathbf{u}$ относительно системы $OXYZ$, получает импульс $d(m\mathbf{v})$, где $\mathbf{v}$ – скорость тела относительно системы $OXYZ$. Тело и его отброшенная часть составляют замкнутую систему (предполагается, что внешние силы отсутствуют). Тогда для такой системы сохраняется импульс, т.е. импульс, полученный телом, будет равен импульсу отброшенной части:

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{u}dm \tag{1.1}$$

Дифференцируя по времени правую часть уравнения (1.1) можно получить:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{u}-\mathbf{v})\frac{dm}{dt} \tag{1.2}$$

Это выражение является основным в механике тела переменной массы и было получено Мещерским [1]. Вводя обозначение для относительной скорости $\mathbf{V}_r = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ отброшенной части dm относительно тела m, можно переписать (1.2) в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{V}_r\frac{dm}{dt} \tag{1.3}$$

Выражение (1.3) может быть проинтегрировано в одном важном частном случае, для которого относительная скорость постоянна. Этот случай характерен для реактивного движения, когда относительная скорость является характеристикой двигательной установки. Не ограничивая общность, можно рассмотреть движение вдоль оси OX. В этом случае уравнение (1.3) примет вид:

$$m\dot{v} = -V_r\dot{m} \tag{1.4}$$

где точкой обозначена производная по времени. В правой части стоит знак минус, так как относительная скорость имеет направление, противоположное направлению движения. Интегрируя уравнение (1.4), можно получить формулу Циолковского:

$$v = v_0 + V_r\ln(m_0/m) \tag{1.5}$$

которая позволяет определить изменение скорости тела от v_0 до v при изменении массы тела от m_0 до m (m_0 – масса тела при скорости v_0).

Из равенства (1.5) можно получить формулу для изменения массы тела при изменении скорости от v_0 до v:

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{v - v_0}{V_r}\right) \tag{1.6}$$

Дифференцируя равенство (1.5) по времени можно определить ускорение тела относительно системы $OXYZ$:

$$a = -V_r \dot{m}/m \tag{1.7}$$

Пройденный путь определяется в результате интегрирования соотношения (1.5).

2. Движение с релятивистскими скоростями. Полученные выражения можно обобщить на случай движения с большими скоростями, т.е. с учетом эффектов, обсуждаемых в СТО [2, 3]. В этом случае закон сохранения импульса (1.1) имеет вид

$$d\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \mathbf{u}d\left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{2.1}$$

где c – скорость света.

Раскрывая скобки в уравнении (2.1) и дифференцируя по времени t (под t понимается время в системе $OXYZ$) можно обобщить уравнение (1.2) следующим образом:

$$\frac{m}{1 - v^2/c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \mathbf{uv}/c^2}\frac{dm}{dt} \tag{2.2}$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой релятивистское обобщение для относительной скорости отброшенной части тела, т.е.:

$$\mathbf{V}_r = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \mathbf{uv}/c^2}$$

С учетом этого результата уравнение (2.2) можно переписать в виде:

$$\frac{m}{1 - v^2/c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{V}_r\frac{dm}{dt} \tag{2.3}$$

Это уравнение является обобщением уравнения (1.3). При движении тела со скоростью много меньшей скорости света ($v \ll c$) уравнение (2.3) переходит в уравнение (1.3) и для относительной скорости V_r получается классическое выражение.

Как и в п. 1, рассматривая одномерное движение и считая относительную скорость постоянной величиной, можно получить обобщение уравнения (1.4)

$$\frac{m\dot{v}}{1 - v^2/c^2} = -V_r \dot{m} \tag{2.4}$$

Интегрируя уравнение (2.4), можно обобщить формулу (1.5) для связи скорости движения тела с расходом массы

$$v = c\frac{\alpha(m_0/m)^{2V_r/c} - 1}{\alpha(m_0/m)^{2V_r/c} + 1}, \quad \alpha = \frac{1 + v_0/c}{1 - v_0/c} \tag{2.5}$$

и формулу (1.6), описывающую изменение массы тела в зависимости от достигнутой скорости

$$m = m_0\left(\alpha\frac{1 - \upsilon/c}{1 + \upsilon/c}\right)^{c/2V_r} \tag{2.6}$$

Собственное время, т.е. время, измеренного по часам движущегося тела, определяется выражением [2, 3]:

$$\tau = \int\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}dt = \int\frac{2\sqrt{\alpha}(m_0/m)^{V_r/c}}{1 + \alpha(m_0/m)^{2V_r/c}}dt \tag{2.7}$$

Из равенства (2.5) можно найти ускорение тела относительно системы $OXYZ$. Получаемый результат

$$a = -4V_r\alpha\frac{\dot{m}}{m}\frac{(m_0/m)^{2V_r/c}}{[1 + \alpha(m_0/m)^{2V_r/c}]^2} \tag{2.8}$$

является обобщением формулы (1.7). Можно определить также ускорение a_m, которое будет возникать в системе отсчета, связанной с движущимся телом [3]:

$$a_m = a(1 - \upsilon^2/c^2)^{-3/2} = -\frac{V_r}{2\sqrt{\alpha}}\frac{\dot{m}}{m}\frac{1 + \alpha(m_0/m)^{2V_r/c}}{(m_0/m)^{V_r/c}} \tag{2.9}$$

3. Примеры. Сравним скорости движения тела, определяемые по классической и релятивистской формулам. Рассмотрим случай, когда тело начинает движение из состояния покоя ($\upsilon_0 = 0$) и относительная скорость равна скорости света ($V_r = c$). При этом двигательная установка считается идеальной – продукты сгорания полностью и без потерь преобразуются в излучение, которое также без потерь отбрасывается от тела со скоростью света. Для такого движения из формулы (1.5) получается выражение для скорости, соответствующее классической теории

$$\upsilon_k = c\ln(m_0/m) \tag{3.1}$$

а из формулы (2.5) следует выражение для скорости тела с учетом релятивистских эффектов

$$\upsilon_p = c\frac{(m_0/m)^2 - 1}{(m_0/m)^2 + 1} \tag{3.2}$$

Результирующие значения скоростей в долях от скорости света представлены в таблице в зависимости от расхода массы

m/m_0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
υ_k/c	0.1053	0.2231	0.3566	0.5108	0.6931	0.9162	1.2039	1.6094	2.3025
υ_p/c	0.1049	0.2195	0.3422	0.4705	0.6000	0.7241	0.8348	0.9230	0.9801

Здесь второй столбец – результат, следующий из формулы (3.1), соответствующей классической теории, а третий столбец – результат, полученный по формуле (3.2). Как следует из таблицы, формула (3.1) при большом расходе массы приводит к неверному результату – скорость тела оказывается больше скорости света, что противоречит СТО. Однако следует отметить, что до скоростей тела, составляющих примерно одну треть от скорости света, результаты, следующие из формул (3.1) и (3.2), отличаются мало, что позволяет сделать вывод о пригодности классических формул для описания кинематики движения вплоть до таких скоростей.

В рассмотренном выше примере тело считается идеальной ракетой, и полученные характеристики движения являются максимально достижимыми. Это позволяет оценить возможности самого принципа реактивного движения. Так, для рассмотренного в примере движения (отсутствие внешних сил, $v_0 = 0$, $V_r = c$) можно определить количество топлива (или расхода массы), которое потребуется для того, чтобы тело, начав движение, разогналось до субсветовых скоростей, затормозило до нулевой скорости, а затем вернулось в точку старта.

Из равенств (2.6) или (3.2) можно определить расход массы при достижении телом заданной скорости. Так, при $v_0 = 0$ и $V_r = c$ получается следующая зависимость

$$m = m_0\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \tag{3.3}$$

Пусть тело разгоняется до скорости в 250000 км/сек (или 5/6 скорости света). Из формулы (3.3) следует, что $m = m_0\sqrt{11} = 0.3015m_0$. Т.е., расход массы составляет около 70%. Для возвращения тела в исходную точку придется еще три раза производить такой же расход массы. В результате в точку старта возвратится масса $m = m_0(\sqrt{11})^{-4} = m_0/121$, т.е. менее 1% от начальной массы.

Из этого следует, что у реактивной техники существует определенный предел применения. Можно утверждать, что расстояния, соизмеримые с расстояниями между звездами, не могут быть преодолены с использованием реактивного движения, так как для преодоления таких расстояний требуется достижение скоростей, сравнимых со скоростью света, а это в свою очередь требует большого расхода массы (топлива для двигательной установки). Следует отметить, что полученные оценки сделаны в предположении, что двигательная установка идеальная. В реальных условиях двигательная установка не является идеальной и, следовательно, расход массы оказывается нереально большим. Ограниченность применения принципа реактивного движения для преодоления расстояний, измеряемых световыми годами, отмечается в частности в работе [3].

В качестве другого примера рассмотрим движение тела при заданном законе расхода массы (как и ранее предполагается отсутствие внешних сил, $v_0 = 0$, $V_r = c$).

Пусть закон изменения массы со временем в системе $OXYZ$ задан в виде

$$m = m_0 e^{-\mu t} \tag{3.4}$$

Тогда основные кинематические характеристики движения относительно неподвижной системы $OXYZ$ позволяют получить следующие выражения для ускорения и скорости

$$a(t) = 4c\mu\frac{e^{2\mu t}}{(1 + e^{2\mu t})^2} \tag{3.5}$$

$$v(t) = c\frac{e^{2\mu t} - 1}{e^{2\mu t} + 1} \tag{3.6}$$

В системе координат, связанной с телом, ускорение определяется следующим образом

$$a_m = \frac{c\mu}{2}\frac{1 + e^{2\mu t}}{e^{\mu t}}$$

местное время τ связано со временем t в неподвижной системе соотношением

$$\tau = \int_0^t \frac{2m_0/m}{1+(m_0/m)^2}dt = \frac{2}{\mu}\left(\operatorname{arctg} e^{\mu t} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.7}$$

Путь, пройденный телом относительно неподвижной системы, определяется в результате интегрирования равенства (3.6)

$$x = c\int_0^t \frac{e^{2\mu t}-1}{e^{2\mu t}+1}dt = \frac{c}{\mu}\left(\ln\frac{1+e^{2\mu t}}{2} - \mu t\right)$$

Определим величину μ, входящую в формулу (3.4), из условия, требующего, чтобы в начальный момент времени ускорение тела было равно ускорению свободного падения g. Из равенства (3.5) получим $\mu = g/c = 2/3 \cdot 10^{-7}$ 1/сек. Время разгона можно вычислить с помощью равенства (3.6) приняв, что к концу разгона скорость тела составит заданную величину. Если выбрать скорость в конце разгона равной 250000 км/сек (или 5/6 скорости света), то время разгона составит $t_p = \ln 11/2\mu = \ln\sqrt{11}\, c/g = 1.199\, c/g = 3.597 \cdot 10^7$ сек = 413 дней.

Ускорение тела относительно неподвижной системы координат к концу разгона будет $a(t_p) = g11/36 = 0.306g$. В системе координат, связанной с телом, ускорение к концу разгона будет $a_m(t_p) = g6/\sqrt{11} = 1.809g$. Таким образом, ускорение к концу разгона в подвижной системе координат будет больше ускорения относительно неподвижной системы $OXYZ$.

За время разгона тела пройдет расстояние

$$x(t_p) = \frac{c}{\mu}\ln\frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{c^2}{g}\ln\frac{6}{\sqrt{11}} = 5.335 \cdot 10^{15}\ \text{м} = 0.564\ \text{св. года}$$

Из формулы (3.7) можно определить, сколько времени будет длиться разгон по часам, связанным с телом

$$\tau_p = \frac{2}{\mu}\left(\operatorname{arctg} e^{\mu t_p} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2c}{g}\left(\operatorname{arctg} e^{\mu t_p} - \frac{\pi}{4}\right) = 2.955 \cdot 10^7\ \text{сек} = 342\ \text{дня}.$$

Таким образом, тело с расходом массы задаваемым формулой (3.4) при условии, что в начальный момент времени ускорение равно ускорению свободного падения, за 413 дней достигнет скорости 5/6 скорости света. По часам, связанным с телом, пройдет 342 дня. За это время тело пройдет расстояние 0.564 светового года, и расход массы составит около 70%.

Основные характеристики движения можно определить также из условия, согласно которому в местной системе координат ускорение является постоянным и равным ускорению свободного падения. Как и для рассмотренного выше примера, предполагается отсутствие внешних сил и $v_0 = 0$, $V_r = c$. В этом случае из уравнения (2.9) следует уравнение для расхода массы

$$-4c\frac{\dot m}{m}\frac{(m_0/m)^2}{[1+(m_0/m)^2]^2} = g \tag{3.8}$$

Решение уравнения (3.8) имеет вид

$$m = m_0(\sqrt{1+y^2} - y), \quad y = gt/c \tag{3.9}$$

Зная закон изменения массы (3.9), из уравнений (3.2), (2.7) и (2.8) можно найти скорость движения υ, ускорение a относительно неподвижной системы координат и местное время τ:

$$\upsilon = c\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \quad a = g(1+y^2)^{-3/2}, \quad \tau = \frac{c}{g}\ln(\sqrt{1+y^2}+y) \tag{3.10}$$

Пройденный телом путь можно определить, интегрируя равенство (3.10):

$$x = \frac{c^2}{2g}(\sqrt{1+y^2}-1)$$

Если тело разгоняется до скорости 5/6 скорости света, то из равенства (3.10) находится время разгона, которое составляет $t_p = 5c/(g\sqrt{11}) = 1.508\ c/g = 4.523 \cdot 10^7$ сек = 523 дня. За это время тело пройдет путь $x = c^2(6/\sqrt{11}-1)/2g = 3.641 \cdot 10^{15}$ м = 0.385 св. года.

Ускорение относительно неподвижной системы координат понизится до величины $a(t_p) = g(\sqrt{11}/6)^3 = 0.169g$. По часам, связанным с телом, пройдет время $\tau_p = \ln 11/2\mu =$ $= \ln\sqrt{11}\ c/g = 1.199\ c/g = 3.597 \cdot 10^7$ сек = 413 дней.

4. Заключение. Следует отметить, что вопросы о движении тела переменной массы с учетом релятивистских эффектов рассматривались также и другими авторами. Так, например в [5] приводятся основные уравнения для описания кинематики движения (2.1), (3.3). В [6] рассматривался вопрос о применимости принципа реактивного движения для движения с релятивистскими скоростями. Однако в настоящей работе эти вопросы рассмотрены более подробно. Исследуются дополнительные характеристики движения (время и ускорение в системе отсчета, связанной с телом), проводятся расчеты движения при различных законах изменения массы. Также получены не только качественные, но и количественные оценки, показывающие область применимости принципа реактивного движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия. Т. 1. М.: Сов. энциклопедия, 1988. 704 с.
2. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 506 с.
3. *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1983. 336 с.
4. *Шкловский И.С.* Вселенная, жизнь, разум. М.: Наука, 1987. 320 с.
5. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности. М.: Оникс 21 век: Мир и образование, 2003. 431 с.
6. *Федюшин Б.К., Караваев З.Ф.* О расчете неидеальных релятивистских ракет и области применимости реактивного принципа полета // Тр. 6-х чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей Ф.А. Цандера. Секция "Астродинамика". М., 1980. С. 129–134.

Москва

Поступила в редакцию 18.09.2003