

О ПОВЕДЕНИИ ДЕФЕКТНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ

На основе плоской модели пластического тела рассматривается изменение упругих характеристик упругопластического тела при пластическом деформировании, происходящее из-за образования дефектов в системах скольжения. Получены выражения матрицы жесткости дефектного упругопластического материала и установлена анизотропия упругих свойств в силу направленного образования микродефектов в системах скольжения. Также приведены результаты эксперимента на стальных образцах, полученные с помощью измерения модуля упругости при разгрузке и деструкционных диаграмм, позволяющие сделать вывод о качественном соответствии рассмотренного теоретического подхода полученным опытными данными.

Поведение деформируемых твердых тел с имеющимися и образующимися под действием механических нагрузок и воздействий внешней среды дефектами является предметом пристального изучения, так как такой подход позволяет давать достаточно достоверные оценки прочности конструкций и объяснять многие эффекты, в частности существенное снижение прочности реальных тел по сравнению с идеальными, бездефектными.

Впервые учет влияния дефектности на деформационные характеристики был исследован Ю.Н. Работновым в теории ползучести материалов введением параметра поврежденности, отражающим изменение эффективной площади сечения в связи с развитием несплошности [1–3]. В течении последних десятилетий теория была обобщена на случаи упругости, пластичности, вязкоупругости и усталости материалов, включая композиты и хрупкие тела.

В теории пластичности В.В. Новожиловым [4] был введен первый инвариант тензора напряжений в условии текучести для учета разрыхляемости, связанной с образующимися дефектами. Один из вариантов теории пластичности тел, содержащих поры, предложен в [5]. Теория повреждающейся среды с использованием тензора эффективных напряжений построена в [6]. Авторами [7] подчеркнута значимость учета повреждаемости при оценке срока службы композиционных материалов особенно в условиях циклического нагружения, когда критерием разрушения является определенное снижение упругих характеристик. Классификация и анализ достижений в области механики континуальных повреждений сделаны в [8]. В общем взаимосвязь деформации и поврежденности может быть выражена объединенными определяющими уравнениями, при помощи которых рассчитываются поля деформаций и повреждений, на основании того, что дефектность уменьшает жесткость и прочность твердого тела.

В [9] рассмотрена плоская модель пластического тела, в которой установлены зависимости деформационных характеристик от условий роста микродефектов при различных напряженных состояниях. Здесь данная модель развивается для учета изменения упругих характеристик упругопластического тела, происходящих из-за образования дефектов в системах скольжения.

Для установления зависимостей деформационных характеристик от вида функции роста микротрещин предположим, что: (J) пластические деформации тела складыва-

ются из необратимых сдвигов по плоскостям скольжения [10] или по направлениям скольжения в плоской модели [11]; (2) необратимые сдвиги происходят только в тех плоскостях, в которых превышает условие текучести, и касательное напряжение в них больше своего предыдущего значения; (3) пластический сдвиг γ^p зависит только от касательного напряжения τ в данной системе скольжения. Аналогично [9] будем полагать, что условия 1–3 выполняются в данной системе скольжения, если в этой системе не превышает условие зарождения микротрещин, которое в плоской модели может быть записано в виде: $f(\tau_s, \sigma_n, \gamma^p) = 0$. В противном случае, т.е. когда в системе скольжения образовались дефекты типа пор или микротрещин, предположим, что: (4) при достижении напряженно-деформированным состоянием условий зарождения микродефекта: $f(\tau_s, \sigma_n, \gamma^p) = 0$ в системе скольжения образуется k_0 дефектов размером l_0 ; (5) при дальнейшем деформировании оставшаяся не разрушенной часть системы скольжения деформируется сдвигом, величина которого зависит только от эффективного касательного напряжения, большего своих предыдущих значений; (6) изменение размеров микродефектов определяется условием их роста; (7) системы скольжения не взаимодействуют, и общая пластическая деформация суммируется по всем направлениям.

Относительно учета упругой деформации в данной модели можно сделать следующие заключения: (а) образование дефектов в системе скольжения приводит к изменению упругих податливостей в данной системе и соответственно во всем теле; (б) в силу направленного образования и роста микродефектов появляется анизотропия эффективных упругих характеристик тела [12], которая зависит от истории нагружения.

Рассмотрим в данной модели пластического тела, состоящего из зерен с единственной системой скольжения, один из возможных способов учета упругих деформаций. Необходимость учета упругих деформаций привлекательна, в частности тем, что одним из экспериментальных методов идентификации дефектности деформируемого твердого тела является измерение падения модуля упругости [13] после упругопластического деформирования.

При рассмотрении плоской модели пластического тела [9] предположим, что трещины образуются в плоскостях скольжения размером l_0 в начальный момент и далее они растут в соответствии с условиями роста [5]. В этой модели удобно пользоваться векторной мерой повреждений [14]: $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где ω_i – декартовы координаты вектора поврежденности ω в осях x_1, x_2 .

Если ввести орты \mathbf{p} и \mathbf{q} в плоской модели пластического тела, связанные с предварительным пропорциональным путем деформирования, то до момента образования микротрещин имеем упругое изотропное тело, если первоначально оно было изотропным. Тогда упругие постоянные в системе координат, связанной с ортами \mathbf{p}, \mathbf{q} будут: $E, \nu, G = E/2(1 + \nu)$. При образовании микротрещин в системе скольжения, связанной с направлением нагружения, микротрещины образуются по направлению \mathbf{q} , и координатами вектора ω будут: $\omega = (0, \omega_2)$. Полагая, что напряженно-деформированное состояние среды с повреждениями описывается потенциалом, в качестве переменных которого используются компоненты тензора деформации и компоненты вектора поврежденности [14], тогда в случае плоского деформированного состояния ортотропной среды с повреждениями упругий потенциал имеет вид:

$$W = P(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_6^e, \omega_1, \omega_2)$$

$$\varepsilon_1^e = \varepsilon_{11}^e, \quad \varepsilon_2^e = \varepsilon_{22}^e, \quad \varepsilon_6^e = 2\varepsilon_{12}^e \quad (1)$$

$$\sigma_m = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_m} = C_{mn} \varepsilon_n$$

где C_{mn} – компоненты матрицы упругих постоянных. Для квадратичного представления по ε_i и ω_i потенциал (1) имеет вид:

$$W = k_1 I_1^2 + k_2 I_1 I_2 + k_3 I_1^2 I_4 + k_4 I_1^2 I_5 + k_6 I_1 I_7 + k_7 I_2^2 + k_8 I_2^2 I_4 + k_9 I_2^2 I_5 + k_{11} I_2 I_7 + k_{12} I_3 + k_{13} I_3 I_4 + k_{14} I_3 I_5 + k_{16} I_1 I_2 I_4 + k_{17} I_1 I_2 I_5 + P_0 + P_1(\varepsilon_n, \omega_i) + P_2(\omega_i) \quad (2)$$

где $I_1 = \varepsilon_1^e, I_2 = \varepsilon_2^e, I_3 = \varepsilon_6^e$ – инварианты тензора упругих деформаций для ортотропного тела, $I_4 = \omega_1^2, I_5 = \omega_2^2, I_7 = \omega_1 \omega_2 \varepsilon_6^e$ – инварианты вектора поврежденности и совместный инвариант вектора поврежденности и тензора упругих деформаций, k_i – коэффициенты разложения, P_0 – константа, $P_1(\varepsilon_n, \omega_i)$ – полином, линейный по $\varepsilon_n^e, P_2(\omega_i)$ – полином квадратичный по ω_i . Для системы координат, связанной с k -й плоскостью скольжения, в которой ось 1 направлена по оси скольжения, ось 2 – по нормали к оси скольжения, используя (2), получим:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_1^e \\ \varepsilon_2^e \\ 2\varepsilon_{12}^e \end{pmatrix}_k \quad (3)$$

$$C_{11} = C_{11}^0 - 2k_4 \omega_2^2, \quad C_{12} = C_{21} = C_{12}^0 - k_{17} \omega_2^2$$

$$C_{22} = C_{22}^0 - 2k_9 \omega_2^2, \quad C_{66} = C_{66}^0 - 2k_{14} \omega_2^2$$

$$C_{16} = C_{61} = C_{26} = C_{62} = 0$$

$$C_{11}^0 = C_{22}^0, \quad C_{11}^0 = E/(1 - \nu^2)$$

$$C_{66}^0 = G = E/2(1 + \nu), \quad C_{12}^0 = \nu E/(1 - \nu^2)$$

где C_{ij}^0 – суть упругие постоянные неповрежденных систем скольжения.

В k -й системе скольжения ω_2 есть функция длины микротрещины l , которая в свою очередь зависит от величины сдвиговой пластической деформации γ^p в этой системе скольжения и определяется условиями роста микротрещины [5]. В системе координат, связанной с пропорциональным путем нагружения и единичными векторами базиса ρ и q соотношения (3) для k -й системы скольжения будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_\rho \\ \sigma_q \\ \sigma_{\rho q} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_\rho^e \\ \varepsilon_q^e \\ 2\varepsilon_{\rho q}^e \end{pmatrix}_k \quad (4)$$

где $\varepsilon_\rho^e, \varepsilon_q^e, \varepsilon_{\rho q}^e$ – упругие деформации, соответствующие напряжениям, действующим на k -й плоскости скольжения. Компоненты тензора напряжений определяются суммированием по всем системам скольжения, а именно интегрированием (4) по углу λ в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Причем, в диапазоне $-\pi + \varphi < \lambda < \pi - \varphi$, где угол φ опреде-

ляется из условия: $\cos \varphi = \tau_y / \tau$ [9], материал является неповрежденным, и в этом случае $\omega_2 = 0$. При $-\varphi \leq \lambda \leq \varphi$ в плоскостях скольжения $\omega_2 \neq 0$ и компоненты матрицы \bar{C}_{ij} при переходе от системы координат 012 к системе 0pqr будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij}^k &= a_{ijl}^k U_l^k \quad (l = 1, 2, 3, 4) \\ U_1^k &= 1/8(3C_{11} + 3C_{22} + 2C_{12} + 4C_{66}), \quad U_2^k = 1/2(C_{11} - C_{22}) \\ U_3^k &= 1/8(C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66}), \quad U_4^k = 1/8(C_{11} + C_{22} + 6C_{12} - 4C_{66}) \end{aligned} \quad (5)$$

где a_{ijl}^k – ориентационные факторы [15]. Подставляя C_{ij}^k из (3) в U_l^k , получим

$$U_l^k = U_l^{0k} - A_l^k \omega_2^2 \quad (6)$$

где A_l^k – выражаются через коэффициенты k_i разложения потенциала деформации (2).

Действующие напряжения находим суммированием по всем плоскостям скольжения:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bar{C}_{ij}^k d\lambda \varepsilon_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{ijl}^k U_l^{0k} d\lambda \varepsilon_j - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{ijl}^k A_l^k \omega_2^2 d\lambda \varepsilon_j \\ A_1 &= 1/4(3k_4 + 3k_9 + 4k_{14} + k_{17}), \quad A_2 = k_4 - k_9 \\ A_3 &= 1/4(k_4 + k_9 - 4k_{14} - k_{17}), \quad A_4 = 1/4(k_4 + k_9 - 4k_{14} + 3k_{17}). \end{aligned} \quad (7)$$

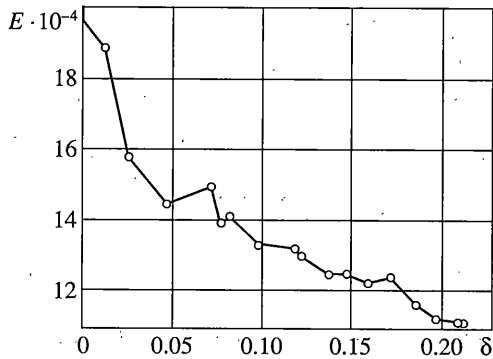
Первый интеграл в (7) дает матрицу жесткостей линейной изотропной теории упругости; а во втором интеграле подынтегральное выражение отлично от нуля при $\lambda \in [-\varphi, \varphi]$, причем постоянные A_l выносятся за знак интеграла, ω_2^2 – положительная симметричная функция по λ относительно значения $\lambda = 0$ при пропорциональном нагружении.

Полагая $\omega_2^2 = l_k/a$ (l_k – длина микротрещин в k -й системе скольжения, a – расстояние между центрами соседних микротрещин в данной системе скольжения) в качестве первого приближения, оценим вклад имеющих микротрещин в системах скольжения в изменение матрицы жесткости неповрежденного материала. Условие изменения l_k примем в виде [5]:

$$\frac{l_k - l_k^0}{a} = B(\gamma_k^p - \gamma_k^{p0}) \operatorname{sh} \frac{\sigma_0}{\sigma_i} \quad (8)$$

где γ_k^p – сдвиговая пластическая деформация в k -й системе скольжения; γ_k^{p0} – сдвиговая пластическая деформация, при которой происходит образование микротрещин размером l_k^0 в k -й системе скольжения; σ_0 – шаровая часть тензора напряжений; σ_i – интенсивность напряжений, $B = \text{const}$. Тогда, учитывая, что $\gamma = \varepsilon \cos \lambda / \sqrt{2}$, $\sigma_0 / \sigma_i = \text{const}$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_i &= [C_{ij}^0] \varepsilon_j - A_l \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} a_{ijl}^k B_1 (e - e_0) \varepsilon_j \cos \lambda d\lambda - A_l \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} a_{ijl}^k \frac{l_k^0}{a} \varepsilon_j d\lambda = [C_{ij}^0] \varepsilon_j - [Z_{ij}] \varepsilon_j \\ [Z_{ij}] &= \frac{1}{\pi} \left([N_{ij}] B_1 (e - e_0) + [M_{ij}] \frac{l_k^0}{a} \right) \end{aligned}$$



Фиг. 1

где e – интенсивность деформаций, e_0 – интенсивность деформаций при зарождении трещин; B_1 – константа, $1/\pi$ – нормировочный множитель. Матрицы

$$[N_{ij}] = A_l \int_{-\varphi}^{\varphi} a_{ijl}^k \cos \lambda d\lambda \quad \text{и} \quad [M_{ij}] = A_l \int_{-\varphi}^{\varphi} a_{ijl}^k d\lambda$$

вычисляются, учитывая выражения для A_l , a_{ijl}^k . Видно, что поврежденная среда является ортотропной и в частности

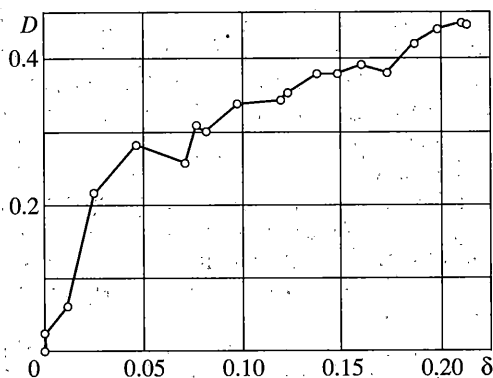
$$N_{11} = 2A_1 \sin \varphi + A_2 (\sin \varphi + 1/3 \sin 3\varphi) + A_3 (1/3 \sin 3\varphi + 1/5 \sin 5\varphi)$$

$$M_{11} = 2A_1 \varphi + A_2 \sin 2\varphi + 1/2 A_3 \sin 4\varphi$$

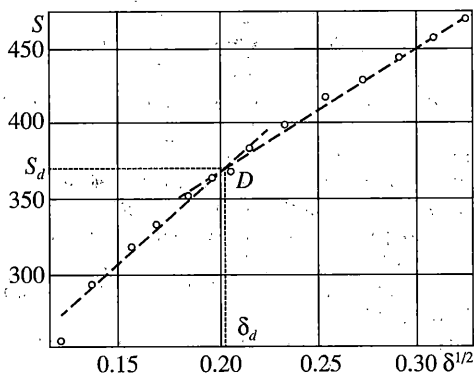
Аналогично вычисляются остальные N_{ij} и M_{ij} . Следует отметить, что $N_{16} = M_{16} = N_{26} = M_{26} = 0$.

При наличии неустойчивости пластического течения [9] сдвиг происходит в плоскости $\lambda = 0$, а в других плоскостях пластического течения происходить не будет. Это означает, что микротрещины будут расти только в плоскости $\lambda = 0$, а в других плоскостях их размеры не изменятся. Соответственно на макроуровне этот факт отразится в виде резкого изменения податливости, и линия диаграммы нагружения должна претерпевать излом. Опытные данные, полученные на стальных образцах, подтверждают выводы, вытекающие из рассмотренной модели.

Экспериментальное определение меры поврежденности и кинетики ее развития остается до настоящего времени наиболее интересной с практической точки зрения и наименее решенной задачей. Поскольку под дефектностью в механике в общем случае понимается изменение механических свойств, для экспериментального исследования накопления повреждений разработан ряд косвенных методов, основанных на изменении физических и механических характеристик твердого тела под влиянием образующихся дефектов [13]. Часто в этих целях используется скалярный параметр поврежденности D и гипотеза эквивалентности упругих деформаций поврежденного и неповрежденного материала, согласно которой $D = 1 - E/E_0$, где E_0 – первоначальный модуль Юнга материала, E – эффективный модуль упругости материала с дефектами. На фиг. 1 представлено изменение продольного модуля в зависимости от остаточной деформации при одноосном растяжении образца Ст. 3. На графике можно выделить три этапа: слабое изменение величины E в начале пластической деформации, затем рез-



Фиг. 2



Фиг. 3

кий спад и далее замедление и стабилизация процесса падения. Соответственно стадийность поведения характерна и для кинетики накопления повреждений [16] (фиг. 2). Так как понятие кинетики или эволюции поврежденности включает в себя зарождение новых и рост существующих микротрещин, то кинетику разрушения однородного твердого тела под действием механических напряжений можно представить в виде последовательной цепочки: (1) движение и накопление дефектов структуры на атомном уровне (вакансий, дислокаций), (2) образование рассеянных по объему зародышевых несплошностей, (3) объединение микропор и микротрещин до критической длины, (4) резкая локализация пластической деформации, рост макронесплошности или лавинное разрушение. Одним из методов идентификации стадийности механического поведения материалов является метод деструкционных диаграмм [17], представляющих собой зависимость истинного напряжения S от остаточной деформации $\delta^{1/2}$ в виде ломаной линии с точкой излома D в области деформационного упрочнения, определяющей смену механизма накопления повреждений

$$S = S_e + k_1 \delta^{1/2} \quad \text{при} \quad \delta \leq \delta_d$$

$$S = S_d + k_2 (\delta^{1/2} - \delta_d^{1/2}) \quad \text{при} \quad \delta \geq \delta_d$$

где S_e – предел упругости; S_d и δ_d – координаты точки деструкции D ; k_1 и k_2 – тангенсы углов наклона линейных участков, характеризующих разные стадии деформации. Обширные исследования диаграмм и анализ структуры различных металлических материалов [17] показал, что после точки D в материале наступает стадия локализации пластических деформаций и направленный рост дефектов. На фиг. 3 приведена деструкционная диаграмма для образца Ст. 3. Как видно, точка D соответствует резкому изменению падения модуля упругости при деформировании. Четкий излом и уменьшение наклона линий на графике свидетельствуют о смене механизма накопления повреждений (рассеянного на локализованный) в материале, что приводит к качественному изменению его свойств и соответственно, иному макроскопическому поведению.

Таким образом, построенная модель упругопластического тела позволяет учесть изменение упругих характеристик при образовании и росте микродефектов, которое происходит при пластическом деформировании. Экспериментальные исследования позволяют сделать вывод о качественном соответствии рассмотренного теоретического подхода полученным опытными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Из-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
2. *Работнов Ю.Н.* О разрушении вследствие ползучести // ПМТФ. 1963. № 2. С. 113–123.
3. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов и конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. *Новожилов В.В.* О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 681–689.
5. *Березин А.В.* Одноосное деформирование пластического тела с учетом образования и роста микротрещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 5. С. 69–75.
6. *Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В.* Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самарск. ун-та, 2001. 632 с.
7. Композиционные материалы. Т. 5. Разрушение и усталость / Под ред. Л. Браутман и Л. Крок. М.: Мир, 1977. 484 с.
8. *Lemaitre J.* A Course on Damage Mechanics. Berlin, New York: Springer, 1992. 210 p.
9. *Березин А.В.* Деформирование дефектных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 124–130.
10. *Батдорф С.Б., Будянский Б.* Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Период. сб. переводов иностр. статей. Механика. 1962. № 1. С. 135–155.
11. *Клюишиков В.Д.* Новые представления в пластичности и деформационная теория // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 722–731.
12. *Ержанов Ж.С., Кайдаров К.К., Матвеева В.П.* Математическое обоснование расчетной модели горного массива с упорядоченной системой трещин // Современные проблемы механики горных пород. Л.: Наука, 1972. С. 45–50.
13. *Березин А.В., Козинкина А.И.* Физические модели и методы оценки накопления повреждений в твердых телах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 3. С. 115–121.
14. *Talreja R.* Fatigue of composite materials. Lancaster, Basel: Technomic Publ. CO., 1987. 181 p.
15. *Работнов Ю.Н., Туполев А.А., Кутыинов В.Ф., Козаев В.П., Березин А.В., Сулименков В.В.* Применение углепластиков в конструкции летательных аппаратов // Механика композитных материалов. 1981. № 4. С. 657–667.
16. *Козинкина А.И.* Переходной эффект в кинетике накопления повреждений // Дефектоскопия. 1999. № 9. С. 95–99.
17. *Рыбакова Л.М.* Механические закономерности деструкции металла при объемном и поверхностном пластическом деформировании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 5. С. 113–123.