

УДК 539.374

© 2004 г. С.А. БЕРЕСТОВА, Е.А. МИТЮШОВ

О ФИЗИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МЕТАЛЛОВ

Предлагается метод построения физических уравнений теории пластического течения макроскопически ортотропных объемно-изотропных поликристаллических тел на основе энергетического критерия текучести, включающего в явном виде структурные параметры деформационной анизотропии и обобщающего условие Максвелла – Губера – Мизеса – Генки.

1. Введение. Предлагаемая ниже модель упругопластичного анизотропного поликристалла основывается на том экспериментально установленном факте, что упругая и пластическая анизотропия металлов обусловлена кристаллографической текстурой и допускает возможность использования количественной информации о пространственном распределении кристаллографических осей зерен, достаточно надежно получаемой современными методами физического исследования.

Одно из классических положений современной математической теории пластичности изотропного материала – энергетическое условие Максвелла – Губера – Мизеса – Генки, отражающее достижение удельной потенциальной энергией формоизменения предельного значения, имеет вид

$$s s = 2k^2 \quad (1.1)$$

где s – девиатор тензора напряжений, k – предельное напряжение чистого сдвига.

Использование удельной энергии изменения формы в качестве условия текучести изотропных материалов, как отмечается в [1], предлагалось еще Дж.К. Максвеллом в 1856 г. в его письме Дж.Дж. Томсону, где он пишет о возможности использования этого условия в качестве основы для создания математической теории пластичности. В дальнейшем авторы [2–4] независимо пришли к той же формулировке условия текучести.

Вопрос о критерии пластичности для анизотропного тела решался по-разному [5–9]. Формальное обобщение условия (1.1) на анизотропные металлические материалы произвольной симметрии было предложено в [5], а на ортотропные в [6], в виде квадратичного условия текучести, которое допускает тензорное представление

$$\sigma H \sigma = 1 \quad (1.2)$$

где H – тензор пластичности. В условии Хилла [6] тензор пластичности задается шестью экспериментально определяемыми из механических испытаний константами.

Обобщения Р. Мизеса, Р. Хилла чисто феноменологические, не затрагивающие физической сущности критерия Максвелла – Губера – Мизеса – Генки.

В отличие от изотропного в анизотропном материале гидростатическое сжатие приводит к изменению формы. Это обстоятельство весьма осложняет обобщение критерия (1.1). Первая попытка выполнить такое обобщение для произвольных ани-

зотропных материалов была предпринята в [10]. Там же были указаны необходимые ограничения, накладываемые на упругие постоянные материала. Как было установлено в [11], эти ограничения всегда выполняются для текстурированных поликристаллов с кубической объемно-центрированной (ОЦК) и гранецентрированной (ГЦК) кристаллической решеткой (большинство металлов и сплавов, применяемых в технике) в силу однородности объемного модуля. Такие среды называются объемно-изотропными, определением которых может служить условие пропорциональности шаровых частей тензора деформаций и тензора напряжений.

Итак, в основе предлагаемого подхода лежит возможность разложения для анизотропных поликристаллических материалов с кубической симметрией решетки удельной энергии упругой деформации на энергию изменения объема и энергию изменения формы и использование последней при выводе условия текучести.

2. Условие текучести макроскопически ортогруппных объемно-изотропных сред. Исчерпывающий, с формальной точки зрения, ответ на возможность прямого обобщения энергетического условия (1) для произвольных анизотропных линейно-упругих тел дается в [1]. Решение этой задачи проводится с использованием предложенных тем же автором [12] ортогональных разложений тензоров второго и четвертого ранга. Так, в шестимерном пространстве симметричных тензоров напряжений-деформаций существует такой ортонормированный базис $\omega^I, \omega^II, \dots, \omega^{VI}$

$$\omega^K \omega^L = \omega_{ij}^K \omega_{ij}^L = \delta_{KL} = \begin{cases} 0, & K \neq L \\ 1, & K = L \end{cases} \quad (2.1)$$

что тензоры напряжений и деформаций в этом базисе представимы в виде:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \omega^I + \sigma_2 \omega^II + \dots + \sigma_6 \omega^{VI} \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 \omega^I + \varepsilon_2 \omega^II + \dots + \varepsilon_6 \omega^{VI} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для тензоров четвертого ранга модулей упругости и коэффициентов податливости справедливы следующие спектральные разложения:

$$\begin{aligned} c &= \lambda_1 \omega^I \otimes \omega^I + \lambda_2 \omega^II \otimes \omega^II + \dots + \lambda_6 \omega^{VI} \otimes \omega^{VI} \\ s &= (\lambda_1)^{-1} \omega^I \otimes \omega^I + (\lambda_2)^{-1} \omega^II \otimes \omega^II + \dots + (\lambda_6)^{-1} \omega^{VI} \otimes \omega^{VI} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(\omega^L \otimes \omega^L)_{ijmn} = \omega_{ij}^L \omega_{mn}^L$$

Элементы тензорного базиса ω^L ($L = 1, 2, \dots, 6$) соответствуют различным напряженно-деформированным состояниям (собственные упругие состояния), а параметры λ_L ($L = 1, 2, \dots, 6$) есть собственные значения линейного оператора c , соответствующего тензору модулей упругости и преобразующего шестимерное пространство симметричных тензоров второго ранга в себя.

Эти параметры определяются модулями упругости анизотропного тела и названы Я. Рыхлевским истинными модулями жесткости, а с учетом комментария, данного в [9], их уместно назвать модулями Кельвина – Рыхлевского.

С учетом равенства, выражающего обобщенный закон Гука, разложений (2.2), (2.3) и условия ортогональности (2.1), которому удовлетворяют элементы тензорного базиса, удельная потенциальная энергия деформации записывается выражением:

$$\Phi = 1/2 \sigma \varepsilon = 1/2 \sigma s \sigma = 1/2 (\lambda_1^{-1} \sigma_1^2 + \lambda_2^{-1} \sigma_2^2 + \dots + \lambda_6^{-1} \sigma_6^2) \quad (2.4)$$

Для изотропного тела и анизотропного тела кубической симметрии элементы тензорного базиса ω^L ($L = 1, 2, \dots, 6$) задаются в виде:

$$\omega^I = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \omega^{II} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad \omega^{III} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\omega^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \omega^V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \omega^{VI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Непосредственной проверкой с помощью соотношения (2.1) нетрудно убедиться, что они образуют ортонормированный базис в пространстве симметричных тензоров второго ранга. Элементы этого базиса соответствуют одному напряженному состоянию всестороннего сжатия (растяжения) и пяти напряженным состоянием чистых сдвигов. Т.е. любое напряженно-деформированное состояние анизотропного тела кубической симметрии и изотропного тела может быть получено как наложение всестороннего сжатия или растяжения и пяти сдвигов (собственные упругие состояния).

Скалярные множители σ_L ($L = 1, 2, \dots, 6$) в разложении (2.2) с учетом условия ортогональности (2.1) для элементов тензорного базиса определяются выражением

$$\sigma_L = \omega^L \sigma \quad (L = 1, 2, \dots, 6)$$

или

$$\sigma_1 = 1/\sqrt{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \sigma_2 = 1/\sqrt{6}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33})$$

$$\sigma_3 = 1/\sqrt{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad \sigma_4 = \sqrt{2}\sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sqrt{2}\sigma_{31}, \quad \sigma_6 = \sqrt{2}\sigma_{12} \quad (2.5)$$

Для изотропного тела модули Кельвина – Рыхлевского принимают значения $\lambda_1 = 3K$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2G$, где K – объемный модуль (модуль всестороннего сжатия), G – модуль сдвига.

Подстановка этих значений и соотношений (2.5) в выражение (2.4) для упругой энергии дает

$$\Phi = \frac{1}{(18K)}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 +$$

$$+ \frac{1}{(4G)} \left[\frac{1}{6}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33})^2 + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2 + 2\sigma_{12}^2 \right]$$

или в более привычном виде

$$\Phi = \frac{1}{(18K)}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 +$$

$$+ \frac{1}{(2G)} \left[\frac{1}{6}((\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2) + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2 + 2\sigma_{12}^2 \right]$$

Очевидно, что первое слагаемое представляет удельную энергию изменения объема, а второе удельную энергию изменения формы, достижения предельного значения которой и приводит к условию (1.1).

Для объемно-изотропных тел, для которых всестороннее сжатие (растяжение) является собственным упругим состоянием, удельная энергия деформации всегда разложима на энергии изменения объема и формы

$$\Phi = \frac{1}{(18K)}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{2}(\lambda_2^{-1}\sigma_2^2 + \dots + \lambda_6^{-1}\sigma_6^2)$$

Удвоенная энергия изменения формы записывается равенством:

$$\lambda_2^{-1}\sigma_2^2 + \lambda_3^{-1}\sigma_3^2 + \dots + \lambda_6^{-1}\sigma_6^2 = 1 \quad (2.6)$$

которое можно рассматривать как эллипсоид в пятимерном векторном пространстве напряжений $\sigma = (\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_6)$ с полуосями $\lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}, \dots, \lambda_6^{-1}$.

Суть предлагаемого подхода заключается в построении условия текучести анизотропных металлов в форме соосного с (2.6) эллипсоида $h_2\sigma_2^2 + h_3\sigma_3^2 + \dots + h_6\sigma_6^2 = 1$ и использование этой функции в качестве пластического потенциала.

Это отражает отмеченную еще в [1] связь анизотропии упругих и предельных свойств, обусловленную симметрией строения деформируемых твердых тел. К таким телам, в частности, относятся однофазные поликристаллы с ОЦК и ГЦК-структурой, анизотропия которых вызвана кристаллографической текстурой (преимущественной ориентацией кристаллографических осей зерен). Кристаллографическая текстура возникает в металлах и сплавах при их термомеханической обработке (например, при листовой прокатке) и сохраняется после отжига, снимающего остаточные напряжения. Т.е. материал рассматривается изначально анизотропным в отношении упругих и пластических свойств, находящимся в натуральном состоянии (начальные напряжения отсутствуют), а его макроскопические (эффективные) упругие и пластические свойства определяются упругими и пластическими свойствами зерен и, в общем случае, функцией распределения их ориентаций.

3. Эффективные упругие свойства текстурированных поликристаллов с кубической симметрией структуры. В качестве модели однофазного поликристалла рассмотрим неоднородную на мезоуровне среду с ячейками полиэдрической формы. Каждой ячейке припишем одинаковые упругие характеристики кристалла кубической симметрии, при этом ориентацию кристаллографических осей в каждой ячейке будем считать случайной. В модели квазиизотропного поликристалла их распределение в пространстве равновероятно, для макроскопически ортотропного поликристалла существуют три взаимно перпендикулярные плоскости материальной симметрии, что является следствием соответствующей симметрии функции распределения ориентаций. Упругие свойства ортотропного тела характеризуются в общем случае девятью упругими постоянными, а соответствующие свойства зерен тремя константами кубического кристалла. Поставим задачу определения эффективных модулей упругости Кельвина – Рыхлевского текстурированного поликристалла по данным о соответствующих свойствах зерен и параметрам их пространственного распределения. Наиболее просто эта задача решается в рамках модели Фойгта [13], предполагающей однородность деформаций, и модели Ройсса [14], предполагающей однородность напряжений, путем осреднения тензоров модулей упругости и коэффициентов податливости по множеству ориентаций зерен в поликристалле $c^V = \langle c \rangle$, $s^R = \langle s \rangle$ или с учетом разложений (2.3):

$$c^V = \lambda_1 \langle Q \rangle * (\omega^I \otimes \omega^I) + \lambda_2 \langle Q \rangle * (\omega^{II} \otimes \omega^{II}) + \dots + \lambda_6 \langle Q \rangle * (\omega^{VI} \otimes \omega^{VI}) \quad (3.1)$$

$$s^R = (\lambda_1)^{-1} \langle Q \rangle * (\omega^I \otimes \omega^I) + (\lambda_2)^{-1} \langle Q \rangle * (\omega^{II} \otimes \omega^{II}) + \dots + (\lambda_6)^{-1} \langle Q \rangle * (\omega^{VI} \otimes \omega^{VI})$$

$$(\langle Q \rangle * (\omega^L \otimes \omega^L))_{ijmn} = \langle Q_{ip} Q_{jq} Q_{mr} Q_{ns} \rangle \omega_{pq}^L \omega_{rs}^L$$

где Q_{ip} – элементы матрицы перехода при повороте кристаллографической системы координат $Ox'_1x'_2x'_3$ случайным образом ориентированного зерна до совмещения ее с осями лабораторной системы координат $Ox_1x_2x_3$, $\langle \dots \rangle$ – операция осреднения по множеству ориентаций зерен в поликристалле, λ_L – модули Кельвина – Рыхлевского зерен, которые выражаются через традиционные матричные обозначения соотношениями $\lambda_1 = c_{11} + 2c_{12} = 3K$, $\lambda_2 = \lambda_3 = c_{11} - c_{12}$, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2c_{44}$.

С другой стороны, тензоры c^V и s^R объемно-изотропного ортотропного тела могут быть представлены спектральными разложениями по элементам соответствующего тензорного базиса $\tilde{\omega}^K$:

$$\begin{aligned} c^V &= \lambda_1^V \tilde{\omega}^I \otimes \tilde{\omega}^I + \lambda_2^V \tilde{\omega}^{\text{II}} \otimes \tilde{\omega}^{\text{II}} + \dots + \lambda_6^V \tilde{\omega}^{\text{VI}} \otimes \tilde{\omega}^{\text{VI}} \\ s^R &= (\lambda_1^R)^{-1} \tilde{\omega}^I \otimes \tilde{\omega}^I + (\lambda_2^R)^{-1} \tilde{\omega}^{\text{II}} \otimes \tilde{\omega}^{\text{II}} + \dots + (\lambda_6^R)^{-1} \tilde{\omega}^{\text{VI}} \otimes \tilde{\omega}^{\text{VI}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

При этом с учетом симметрии материала, элементы тензорного базиса $\tilde{\omega}^K$ имеют следующий явный вид:

$$\tilde{\omega}^I = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\omega}^{\text{II,III}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + p_{2,3} + p_{2,3}^2)}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 - p_{2,3} \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

$$\tilde{\omega}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\omega}^{\text{V}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\omega}^{\text{VI}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$p_{2,3} = k \pm \sqrt{k^2 + k + 1}, \quad k = (c_{13}^V - c_{23}^V)/(c_{12}^V - c_{13}^V) = (s_{13}^R - s_{23}^R)/(s_{12}^R - s_{13}^R) \quad (3.4)$$

Сравнивая разложения (3.1) и (3.2) и используя условие ортогональности (2.1), находим модули Кельвина – Рыхлевского в приближении Фойгта

$$\begin{aligned} \lambda_L^V &= \lambda_1(\tilde{\omega}^L \otimes \tilde{\omega}^L) * \langle Q \rangle * (\omega^I \otimes \omega^I) + \lambda_2(\tilde{\omega}^L \otimes \tilde{\omega}^L) * \langle Q \rangle * (\omega^{\text{II}} \otimes \omega^{\text{II}}) + \\ &+ \dots + \lambda_6(\tilde{\omega}^L \otimes \tilde{\omega}^L) * \langle Q \rangle * (\omega^{\text{VI}} \otimes \omega^{\text{VI}}) \end{aligned}$$

Аналогично в приближении Ройсса

$$\begin{aligned} (\lambda_L^R)^{-1} &= (\lambda_1)^{-1}(\tilde{\omega}^L \otimes \tilde{\omega}^L) * \langle Q \rangle * (\omega^I \otimes \omega^I) + (\lambda_2)^{-1}(\tilde{\omega}^L \otimes \tilde{\omega}^L) * \langle Q \rangle * (\omega^{\text{II}} \otimes \omega^{\text{II}}) + \\ &+ \dots + (\lambda_6)^{-1}(\tilde{\omega}^L \otimes \tilde{\omega}^L) * \langle Q \rangle * (\omega^{\text{VI}} \otimes \omega^{\text{VI}}) \end{aligned}$$

или, после выполнения необходимых преобразований, в явном виде

$$\begin{aligned} \lambda_1^V &= 3K \\ \lambda_{2,3}^V &= \lambda_2[1 - 3\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + 2p_{2,3}(\Delta_2 - \Delta_3)] + \lambda_4[3\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - 2p_{2,3}(\Delta_2 - \Delta_3)] \\ \lambda_4^V &= \lambda_2(2\Delta_2 + 2\Delta_3 - 2\Delta_1) + \lambda_4[1 - (2\Delta_2 + 2\Delta_3 - 2\Delta_1)] \\ \lambda_5^V &= \lambda_2(2\Delta_3 + 2\Delta_1 - 2\Delta_2) + \lambda_4[1 - (2\Delta_3 + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\lambda_6^V = \lambda_2(2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 2\Delta_3) + \lambda_4[1 - (2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 2\Delta_3)]$$

$$(\lambda_1^R)^{-1} = 1/(3K)$$

$$(\lambda_{2,3}^R)^{-1} = (\lambda_2)^{-1}[1 - 3\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + 2p_{2,3}(\Delta_2 - \Delta_3)] + (\lambda_4)^{-1}[3\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - 2p_{2,3}(\Delta_2 - \Delta_3)]$$

$$(\lambda_4^R)^{-1} = (\lambda_2)^{-1}(2\Delta_2 + 2\Delta_3 - 2\Delta_1) + (\lambda_4)^{-1}[1 - (2\Delta_2 + 2\Delta_3 - 2\Delta_1)] \quad (3.6)$$

$$(\lambda_5^R)^{-1} = (\lambda_2)^{-1}(2\Delta_3 + 2\Delta_1 - 2\Delta_2) + (\lambda_4)^{-1}[1 - (2\Delta_3 + 2\Delta_1 - 2\Delta_2)]$$

$$(\lambda_6^R)^{-1} = (\lambda_2)^{-1}(2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 2\Delta_3) + (\lambda_4)^{-1}[1 - (2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 2\Delta_3)]$$

$$\Delta_i = \langle Q_{i1}^2 Q_{i2}^2 + Q_{i2}^2 Q_{i3}^2 + Q_{i3}^2 Q_{i1}^2 \rangle \quad (i = 1, 2, 3), \quad 0 \leq \Delta_i \leq 1/3$$

где Δ_i – параметры деформационной анизотропии. Входящий в соотношение (3.4) дистрибутор жесткости k определяется равенством $k = (\Delta_1 - \Delta_2)/(\Delta_2 - \Delta_3)$.

Параметры деформационной анизотропии Δ_i могут быть найдены по закону распределения кристаллографических осей зерен поликристалла в ортогональном базисе, задающем положение осей симметрии ортотропного тела. При равновероятном распределении кристаллографических осей (квазиизотропный поликристалл) $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1/5$.

При осесимметричном вокруг оси Ox_3 распределении кристаллографических осей (трансверсально-изотропный поликристалл) выполняется условие $\Delta_1 = \Delta_2 = (1 + 3\Delta_3)/8$.

Из соотношений (3.5) и (3.6) видно, что модули Кельвина – Рыхлевского в приближениях Фойгта и Ройсса находятся путем вычисления средних арифметических прямых и обратных значений соответствующих модулей монокристалла с одними и теми же весовыми коэффициентами. Более точные результаты могут быть получены, если эффективные модули определять как средние геометрические значения модулей монокристалла с теми же весовыми коэффициентами. При этом результат, очевидно, не будет зависеть от того, усредняются ли сами модули Кельвина – Рыхлевского или их обратные значения. Т.е.

$$\lambda_1^* = 3K$$

$$\lambda_{2,3}^* = \lambda_2^{(1-3\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3+2p_{2,3}(\Delta_2-\Delta_3))} \lambda_4^{(3\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-2p_{2,3}(\Delta_2-\Delta_3))}$$

$$\lambda_4^* = \lambda_2^{(2\Delta_2+2\Delta_3-2\Delta_1)} \lambda_4^{(1-(2\Delta_2+2\Delta_3-2\Delta_1))}$$

$$\lambda_5^* = \lambda_2^{(2\Delta_3+2\Delta_1-2\Delta_2)} \lambda_4^{(1-(2\Delta_3+2\Delta_1-2\Delta_2))}$$

$$\lambda_6^* = \lambda_2^{(2\Delta_1+2\Delta_2-2\Delta_3)} \lambda_4^{(1-(2\Delta_1+2\Delta_2-2\Delta_3))}$$

Если тело трансверсально-изотропно, то

$$\lambda_2^* = \lambda_2^{(1-3\Delta_3)} \lambda_4^{3\Delta_3}, \quad \lambda_4^* = \lambda_5^* = \lambda_2^{2\Delta_3} \lambda_4^{1-2\Delta_3}, \quad \lambda_3^* = \lambda_6^* = \lambda_2^{(1-\Delta_3)/2} \lambda_4^{(1+\Delta_3)/2} \quad (3.7)$$

Для квазиизотропного поликристалла из этих соотношений вытекает известный результат [15] $\lambda_2^* = \lambda_3^* = \lambda_4^* = \lambda_5^* = \lambda_6^* = \lambda_2^{2/5} \lambda_4^{3/5}$ или $c_{44}^* = c_{44} A^{-2/5}$, где $A = 2c_{44}(c_{11} - c_{12})^{-1} = \lambda_4/\lambda_2$ – параметр упругой анизотропии монокристалла.

В пользу предложенного метода определения эффективных упругих свойств поликристалла говорит и тот факт, что для частного случая распределения кристаллографических осей, когда $\Delta_1 = \Delta_2 = 1/4$, $\Delta_3 = 0$, получаемый результат совпадает с известным, в рамках рассматриваемой модели поликристалла, точным решением [11].

4. Физические уравнения теории пластического течения. Пластическая анизотропия. Обобщение уравнений Прандтля – Ройсса теории пластического течения изотропного тела, устанавливающих связь между напряжениями и бесконечно малыми приращениями пластических деформаций, легко могут быть получены с помощью ассоциированного закона течения, если в качестве пластического потенциала взять функцию текучести в виде левой части уравнения (1.2). Использование энергетического условия текучести предполагает соосность тензора модулей упругости c и тензора пластичности H , что позволяет записать их в виде разложения по одним и тем же собственным состояниям. Т.е. $H = h_1^* \tilde{\omega}^I \otimes \tilde{\omega}^I + h_2^* \tilde{\omega}^{II} \otimes \tilde{\omega}^{II} + \dots + h_6^* \tilde{\omega}^{VI} \otimes \tilde{\omega}^{VI}$, $h_1^* \sigma_1^2 + h_2^* \sigma_2^2 + \dots + h_6^* \sigma_6^2 = 1$, где h_L^* – собственные значения тензора пластичности анизотропного поликристалла. С учетом независимости условия текучести от первого инварианта тензора напряжений $h_1^* = 0$.

Применение ассоциированного закона течения дает

$$d\varepsilon^P = H \cdot \sigma d\lambda \text{ или } d\varepsilon_L^P = h_L^* \sigma_L d\lambda \quad (L = 2, \dots, 6) \quad (4.1)$$

где $d\lambda$ – параметр, пропорциональный работе пластической деформации.

Величины σ_L и $d\varepsilon_L^P$ определяются как коэффициенты разложения тензоров напряжений и приращений пластических деформаций по элементам одного тензорного базиса $\tilde{\omega}^L$, а с учетом его представления (3.3) равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_{2,3} &= \frac{1}{\sqrt{2(p_{2,3}^2 + p_{2,3} + 1)}} (\sigma_{11} + p_{2,3} \sigma_{22} - (1 + p_{2,3}) \sigma_{33}) \\ \sigma_4 &= \sqrt{2} \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sqrt{2} \sigma_{31}, \quad \sigma_6 = \sqrt{2} \sigma_{12} \\ d\varepsilon_{2,3}^P &= \frac{1}{\sqrt{2(p_{2,3}^2 + p_{2,3} + 1)}} (d\varepsilon_{11}^P + p_{2,3} d\varepsilon_{22}^P - (1 + p_{2,3}) d\varepsilon_{33}^P) \\ d\varepsilon_4^P &= \sqrt{2} d\varepsilon_{23}^P, \quad d\varepsilon_5^P = \sqrt{2} d\varepsilon_{31}^P, \quad d\varepsilon_6^P = \sqrt{2} d\varepsilon_{23}^P \end{aligned} \quad (4.2)$$

Полные приращения коэффициентов разложения тензора деформаций $d\varepsilon_K$ по ортогональному базису $\tilde{\omega}^L$ складываются из соответствующих приращений коэффициентов разложения упругой $d\varepsilon_L^e$ и пластической деформации $d\varepsilon_L^P$:

$$d\varepsilon_L = d\varepsilon_L^e + d\varepsilon_L^P \quad (L = 1, 2, \dots, 6) \quad (4.3)$$

Приращения коэффициентов разложения тензора упругой деформации по ортонормированному тензорному базису $\tilde{\omega}^L$ связаны с соответствующими коэффициентами разложения тензора напряжений законом Гука $d\varepsilon_L^e = (\lambda_L^*)^{-1} d\sigma_L$ ($L = 1, 2, \dots, 6$).

Подстановка этих значений, с учетом соотношений (4.1) и (4.2), в равенство (4.3) позволяет получить физические уравнения теории пластического течения текстурированного поликристалла $d\epsilon_1 = (\lambda_1^*)^{-1} d\sigma_1$, $d\epsilon_1 = d\sigma_1/3K$, $d\epsilon_L = (\lambda_L^*)^{-1} d\sigma_L + h_L^* \sigma_L d\lambda$ ($L = 2, 3, \dots, 6$).

Мерой пластической анизотропии материала может служить отношение приращений пластических деформаций по ширине и по толщине растягиваемых плоских образцов, изготовленных из этого материала. Рассмотрим в трехмерном евклидовом векторном пространстве ортонормированную тройку векторов \mathbf{p} , \mathbf{q} и \mathbf{r} . Тогда коэффициент пластической анизотропии $R(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ – отношение приращения пластических деформаций в направлении вектора \mathbf{q} к приращению пластических деформаций в направлении вектора \mathbf{r} при растяжении в направлении вектора \mathbf{p} , определится равенством

$$R(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{q} \otimes \mathbf{q})H(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})}{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})H(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) + (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q})H(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})}$$

или

$$R(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{q} \otimes \mathbf{q})(h_2^* \tilde{\omega}^{\text{II}} \otimes \tilde{\omega}^{\text{II}} + \dots + h_6^* \tilde{\omega}^{\text{VI}} \otimes \tilde{\omega}^{\text{VI}})(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})}{((\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) + (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}))(h_2^* (\tilde{\omega}^{\text{II}} \otimes \tilde{\omega}^{\text{II}}) + \dots + h_6^* (\tilde{\omega}^{\text{VI}} \otimes \tilde{\omega}^{\text{VI}}))(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})}$$

Рассмотрим частный, но важный в практическом отношении случай, когда кристаллографические оси в поликристалле имеют осесимметричное распределение, т.е. тело трансверсально-изотропно. Аналогично равенствам (3.7):

$$h_2^* = h_2^{(1-3\Delta_3)} h_4^{3\Delta_3}, \quad h_4^* = h_5^* = h_2^{2\Delta_3} h_4^{1-2\Delta_3}, \quad h_3^* = h_6^* = h_2^{(1-\Delta_3)/2} h_4^{(1+\Delta_3)/2}$$

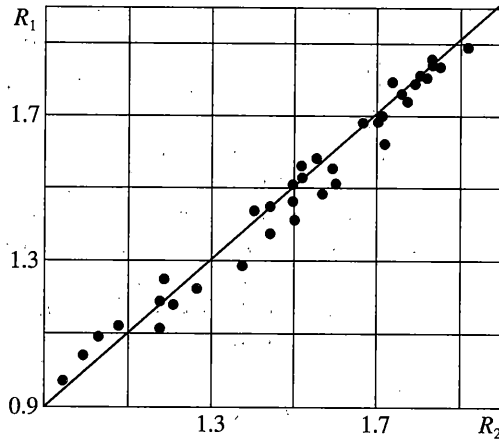
где $h_2 = h_3$, $h_4 = h_5 = h_6$ – отличные от нуля собственные значения тензора пластичности кубического кристалла.

С учетом явного вида (3.3) элементов тензорного базиса $\tilde{\omega}^L$, можно найти выражение для коэффициента пластической анизотропии при любой ориентации образца. При условии, что векторы \mathbf{p} и \mathbf{q} лежат в плоскости изотропии трансверсально-изотропного тела, это выражение (коэффициент нормальной пластической анизотропии) имеет достаточно простой вид

$$R = 3/2((h_4/h_2)^{1/2(5\Delta_3-1)} - 1/3) \tag{4.4}$$

Как следует из равенства (4.4) коэффициент нормальной пластической анизотропии R равен единице в двух случаях: либо $h_4/h_2 = 1$, либо параметр деформационной анизотропии $\Delta_3 = 1/5$, что соответствует квазиизотропному поликристаллу. Естественно назвать отношение h_4/h_2 структурным показателем пластической анизотропии материала.

5. Численный пример. Для листовых материалов коэффициент нормальной пластической анизотропии или коэффициент Ланкфорда [16] определяется как отношение логарифмических деформаций по ширине и по толщине плоского образца при его растяжении в области однородной деформации. Среднее его значение в плоскости листа характеризует способность материала к глубокой вытяжке, в связи с чем в литературе имеется достаточно большое количество экспериментальных данных по установлению корреляции коэффициента Ланкфорда с текстурой материала. Для иллюстрации предлагаемой теории рассмотрим вычисление коэффициента Ланкфорда для прокатанного листа.



Система координат выбирается так, что направление \mathbf{r} совпадает с направлением нормали к плоскости листа, а направления \mathbf{p} и \mathbf{q} лежат в его плоскости. Экспериментальные данные о текстуре материала и об измеренных значениях коэффициента Ланкфорда для партии листов малоуглеродистой стали были взяты из работы [17]. В ней путем задания различных режимов обработки были получены 36 вариантов различных текстур, для которых по обратным полюсным фигурам были найдены объемные доли девяти преимущественных ориентировок. Значение параметра деформационной анизотропии было найдено по методу удельных объемов, значение структурного показателя анизотропии – по методу наименьших квадратов.

На фигуре приведена корреляционная зависимость между полученными в эксперименте R_1 [17] и рассчитанными R_2 по формуле (4.4) коэффициентами R . Высокий коэффициент корреляции 0.98 свидетельствует об адекватности предлагаемой теории пластической деформации анизотропных металлов с ОЦК и ГЦК структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыхлевский Я. Разложение упругой энергии и критерии предельности // Успехи механики. 1984. Т. 7. № 3. С. 51–80.
2. Huber M.T. Die spezifische Formänderungsarbeit als Maß der Anstrengung eines Materials. Lemberg, 1904.
3. Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 114–135.
4. Генки Г. О медленных стационарных течениях в пластических телах с приложениями к прокатке, штамповке и волочению // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 136–156.
5. Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen // ZAMM. 1928. Bd. 8. H. 3. S. 161–185.
6. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
7. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
8. Саркисян М.С. Об экстремальных принципах для анизотропного пластического тела // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. Сб. 3. С. 232–236.
9. Победря Б.Е. О теории пластичности трансверсально-изотропных материалов // Изв. АН СССР. МТГ. 1990. № 3. С. 91–101.
10. Olszak W., Urbanowski W. The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic – plastic bodies // Arch. Mech. Stos., 1956. V. 8. № 4. P. 671–694.

11. Берестова С.А., Митюшов Е.А. Об одном точном решении проблемы определения эффективных модулей упругости микронеоднородных сред // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 524–527.
12. Рыхлевский Я. О законе Гука // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
13. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig etc.: Teubner, 1928. 978 p.
14. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // ZAMM. 1929. Bd. 9. H. 1. S. 49–58.
15. Александров К.С. Средние значения тензорных величин // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. № 4. С. 800–803.
16. Lankford W.T., Snyder S.C., Bauscher J.A. New criteria for predicting the press performance of deep drawing sheets // Trans. Amer. Soc. Metals. 1950. V. 42. P. 1197–1232.
17. Vlad С.М. Verfahren zur Ermittlung der Texturanisotropie in Kohlenstoffarmen Feinblechen mittels inverser Polfiguren // Materialprüf. 1977. V. 19. № 3. P. 99–103.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
25.04.2002