МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2004

УДК 539.214;539.374

© 2004 г. Н.Б. КОСТЫРИН, Н.В. МИНАЕВА, Ю.М. МЯСНЯНКИН

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ, БЛИЗКИХ К ОДНОРОДНЫМ

Аналитический метод получения приближенного решения задач, описывающих напряженно-деформированное состояние упругопластических тел с учетом их геометрических несовершенств, разработан, например, в монографиях и статьях [1–4]. В [5] он распространен и на случай неоднородных тел.

На основе теоремы о неявных функциях, в данной работе для случая плоской деформации получен метод построения в пространстве параметров, характеризующих внешнее воздействие на упругопластическое тело, границы области непрерывной зависимости решения соответствующей задачи от характеристик, описывающих геометрические несовершенства упругопластического тела и неоднородность его материала. В качестве примера рассмотрено поведение упругопластической трубы, находящейся под воздействием внутреннего и внешнего давлений.

1. Для упругого изотропного несжимаемого тела в случае плоской задачи потенциал деформации запишем в следующем виде [5, 6]:

$$w = \frac{1}{8G}[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau^2] \tag{1.1}$$

где G – модуль сдвига, σ_r, σ_θ, τ – компоненты тензора напряжений. Будем полагать материал неоднородным

$$G = G_0 + G_1(r, \theta), \quad G_0 = \text{const} \tag{1.2}$$

В упругой области в случае плоской деформации напряженно-деформированное состояние тела будет описываться решением следующей задачи:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^e}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\rho^e - \sigma_\theta^e}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial\tau^e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^e}{\partial\theta} + \frac{2\tau^e}{\rho} = 0$$
$$\rho\frac{\partial u^e}{\partial\rho} + \frac{\partial v^e}{\partial\theta} + u^e = 0, \quad \sigma_\rho^e - \sigma_\theta^e = 4(1+\varphi)\frac{\partial u^e}{\partial\rho} \tag{1.3}$$

$$\tau^e = (1+\varphi)\left(\frac{\partial v^e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^e}{\partial\theta} - \frac{v^e}{\rho}\right)$$

$$\tau_n^e\big|_{\rho = g_1(\theta)} = q_1, \quad \sigma_n^e\big|_{\rho = g_1(\theta)} = -p_1 \tag{1.4}$$

$$\rho = r/r_0, \quad \varphi(\rho, \theta) = G_1(\rho, \theta)/G_0$$

где r_0 – некоторый характерный размер тела, все компоненты напряжений отнесены к G_0, а перемещений – к величине r_0.

Функция $g_1(\theta)$ в (1.4) характеризует границу тела в деформированном состоянии, т.е.

$$g_1(\theta) = \psi_1(f_1(\theta), u^e(\theta, f_1(\theta)), \upsilon^e(\theta, f_1(\theta))) \tag{1.5}$$

где функция $f_1(\theta)$ описывает границу тела в ненагруженном состоянии.

Будем полагать, что

$$f_1(\theta) = f_1^0(\theta) + f_1^{(1)}(\theta) \tag{1.6}$$

где функция $f_1^{(1)}(\theta)$ характеризует отклонение границы реального тела от некоторой идеализированной границы, описываемой функцией $f_1^0(\theta)$.

Индекс (e) в соотношении (1.3)–(1.5) указывает на принадлежность компоненты к упругой области.

В пластической области напряженно-деформированное состояние тела в случае плоской деформации описывается решением такой задачи [1–7]:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^p}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^p}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial\tau^p}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^p}{\partial\theta} + \frac{2\tau^p}{\rho} = 0$$

$$\rho\frac{\partial u^p}{\partial\rho} + \frac{\partial\upsilon^p}{\partial\theta} + u^p = 0, \quad (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p)^2 + 4(\tau^p)^2 = 8k^2(1+\varphi) \tag{1.7}$$

$$4\frac{\partial u^p}{\partial\rho}\tau^p - \left(\frac{\partial\upsilon^p}{\partial\rho} - \frac{\upsilon^p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^p}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) = 0$$

$$\sigma_n^p\big|_{\rho = g_2(\theta)} = -p_2, \quad \tau_n^p\big|_{\rho = g_2(\theta)} = q_2 \tag{1.8}$$

Функция $g_2(\theta)$ в (1.8) характеризует границу тела в деформировании состоянии, т.е.

$$g_2(\theta) = \psi_2(f_2(\theta), u^p(\theta, f_2(\theta)), \upsilon^p(\theta, f_2(\theta))) \tag{1.9}$$

где функция $f_2(\theta)$ описывает границу тела в ненагруженном состоянии.

Будем полагать, что

$$f_2(\theta) = f_2^0(\theta) + f_2^{(1)}(\theta) \tag{1.10}$$

К (1.3)–(1.10) следует добавить условие сопряжения решений задач (1.3)–(1.6) и (1.7)–(1.10) при $\rho = \rho_s(\theta)$ [1–7].

Пусть задача (1.3)–(1.10) при $\varphi(\theta, \rho) \equiv f_1^{(1)}(\theta) \equiv f_2^{(1)}(\theta) \equiv 0$, т.е. для идеального по форме тела из однородного материала, допускает решение

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho^e = \sigma_\rho^{0e}, \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^{0e}, \quad \tau^e = \tau^{0e}, \quad u^e = u^{0e}, \quad \upsilon^e = \upsilon^{0e} \\ &\sigma_\rho^p = \sigma_\rho^{0p}, \quad \sigma_\theta^p = \sigma_\theta^{0p}, \quad \tau^p = \tau^{0p}, \quad u^p = u^{0p}, \quad \upsilon^p = \upsilon^{0p} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Для того чтобы при достаточно малых φ и f_i решение (1.11) можно было бы брать в качестве приближенного решения задачи (1.3)–(1.10) необходимо, чтобы решение задачи (1.3)–(1.10) непрерывно зависело от φ и f_i при $\varphi \equiv f_i \equiv 0$.

Для проведения исследования этой непрерывности, как следует из теоремы о неявных функциях [8–11], надо построить соответствующую вспомогательную задачу и провести ее линеаризацию.

Наиболее сложной и трудоемкой частью построения этой вспомогательной задачи является получение соответствующих линеаризованных граничных условий.

2. Итак, пусть граница тела, находящегося в недеформированном состоянии, описывается следующей функцией:

$$\rho = f(\theta) = f^0(\theta) + f^1(\theta); \quad \theta \in [0, 2\pi] \tag{2.1}$$

В деформированном состоянии эта граница будет описываться функцией, заданной в параметрической форме [3, 12]:

$$\begin{aligned} \theta &= t + \operatorname{arctg}\frac{v(t, f(t))}{f(t) + u(t, f(t))} \\ \rho &= \{[f(t) + u(t, f(t))]^2 + v^2(t, f(t))\}^{1/2}, \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Если из соотношений (2.2) исключить параметр t, то функция, описывающая границу тела в деформированном состоянии, будет записана в явном виде

$$\rho = g(\theta) \tag{2.3}$$

Согласно теореме о неявных функциях надо получить линеаризованные граничные условия относительно функций ζ_i, полагая в (2.2) $u = u^0 + \zeta_1$ и $v = v_0 + \zeta_2$. Итак, соотношения (2.2) примут такой вид

$$\begin{aligned} \theta &= t + \operatorname{arctg}\frac{v^0(t, f^0(t)) + \zeta_2(t, f^0(t))}{f^0(t) + u^0(t, f^0(t)) + \zeta_1(t, f^0(t))} \\ \rho &= \{[f^0(t) + u^0(t, f^0(t)) + \zeta_1(t, f^0(t))]^2 + [v^0(t, f^0(t)) + \zeta_2(t, f^0(t))]^2\}^{1/2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

а вместо (2.3) получим, что

$$\rho = g^0(\theta) + \zeta_3(\theta) \tag{2.5}$$

Подставив (2.4) в (2.5) и проведя линеаризацию по ζ_1 и ζ_2, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} g^0(\chi^0) &= \{[f^0(t) + u^0(t, f^0(t))]^2 + [v^0(t, f^0(t))]^2\}^{1/2} \\ \zeta_3(\chi^0) &= \frac{1}{g^0(\chi^0)}\left[f^0(t) + u^0(t, f^0(t)) + \frac{\dot g^0(\chi^0)}{g^0(\chi^0)} v^0(t, f^0(t))\right]\zeta_1 + \\ &+ \frac{1}{g^0(\chi^0)}\left[v^0(t, f^0(t)) - \frac{\dot g^0(\chi^0)}{g^0(\chi^0)}(f^0(t) + u^0(t, f^0(t)))\right]\zeta_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\chi^0(t) = t + \operatorname{arctg}\frac{v^0(t, f^0(t))}{f^0(t) + u^0(t, f^0(t))} \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.6) следует, что

$$g^0(\theta) = \{[f^0(\bar\chi^0) + u^0(\bar\chi^0, f^0(\bar\chi^0))]^2 + [v^0(\bar\chi^0, f^0(\bar\chi^0))]^2\}^{1/2}$$

$$\zeta_3(\theta) = \frac{1}{g^0(\theta)}\zeta_2(\bar{\chi}^0, f^0(\bar{\chi}^0))\left[f^0(\bar{\chi}^0) + u^0(\bar{\chi}^0, f^0(\bar{\chi}^0)) + \frac{\dot{g}^0(\theta)}{g^0(\theta)}\upsilon^0(\bar{\chi}^0, f^0(\bar{\chi}^0))\right] + \tag{2.8}$$

$$+\frac{1}{g^0(\theta)}\zeta_2(\bar{\chi}^0, f^0(\bar{\chi}^0))\left[\upsilon^0(\bar{\chi}^0, f^0(\bar{\chi}^0)) - \frac{\dot{g}^0(\theta)}{g^0(\theta)}(f^0(\bar{\chi}^0) + u^0(\bar{\chi}^0, f^0(\bar{\chi}^0)))\right]$$

где $\bar{\chi}^0(\theta)$ – функция, обратная функции $\chi^0(t)$.

Например, для частного случая, когда

$$f^0(\theta) \equiv \rho^0 \equiv \text{const}, \quad u^0 = a/\rho, \quad \upsilon^0 \equiv 0 \tag{2.9}$$

соотношения (2.8) примут следующий вид:

$$g^0(\theta) = \rho^0 + a/\rho^0, \quad \zeta_3(\theta) = \zeta_1(\theta, \rho^0) \tag{2.10}$$

3. Как отмечено выше, для проведения исследования непрерывности зависимости решения задачи (1.3)–(1.10) от функций φ и f_i следует построить, вспомогательную задачу, которая для упругой области, как следует из (1.3), будет такой

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\zeta_4^e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_6^e}{\partial\theta} + \frac{\zeta_4^e - \zeta_5^e}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial\zeta_6^e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_5^e}{\partial\theta} + \frac{2\zeta_6^e}{\rho} = 0 \\
\rho\frac{\partial\zeta_1^e}{\partial\rho} + \frac{\partial\zeta_2^e}{\partial\theta} + \zeta_1^e = 0, \quad \zeta_4^e - \zeta_5^e = 4\frac{\partial\zeta_1^e}{\partial\rho} \\
\zeta_6^e = \frac{\partial\zeta_2^e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_1^e}{\partial\theta} - \frac{\zeta_2^e}{\rho}
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Из граничных условий согласно соотношениям, например (2.10), как следует из [3], получаем линеаризованные граничные условия в виде требования выполнения следующих соотношений:

$$\begin{gathered}
\zeta_4^e(\rho, \theta) + \frac{d\sigma_\rho^{0e}}{d\rho}\zeta_1^e(\theta, \rho_1^0) = -\frac{\partial p_1}{\partial\rho}\zeta_1^e(\theta, \rho_1^0) \\
\zeta_6^e(\rho, \theta) + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho}\frac{\partial\zeta_1^e(\theta, \rho_1^0)}{\partial\theta} = \frac{\partial q_1}{\partial\rho}\zeta_1^e(\theta, \rho_1^0)
\end{gathered} \tag{3.2}$$

при $\rho = g_1^e = \rho_1^0 + a_1/\rho_1^0$.

Для пластической области вспомогательная задача будет

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\zeta_4^p}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_6^p}{\partial\theta} + \frac{\zeta_4^p - \zeta_5^p}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial\zeta_6^p}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_5^p}{\partial\theta} + \frac{2\tau_6^p}{\rho} = 0 \\
\rho\frac{\partial\zeta_1^p}{\partial\rho} + \frac{\partial\zeta_2^p}{\partial\theta} + \zeta_1^p = 0, \quad (\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\zeta_4^p - \zeta_5^p) + 4\tau^{0p}\zeta_6^p = 0 \\
4\left(\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\zeta_6^p + \tau^{0p}\frac{\partial\zeta_1^p}{\partial\rho}\right) - \left(\frac{\partial\upsilon^{0p}}{\partial\rho} - \frac{\upsilon^{0p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{0p}}{\partial\theta}\right)(\zeta_4^0 - \zeta_5^p) - (\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})\left(\frac{\partial\zeta_2^p}{\partial\rho} - \frac{\zeta_2^p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_1^p}{\partial\theta}\right) = 0
\end{gathered} \tag{3.3}$$

с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&\zeta_4^p(\rho, \theta) + \frac{d\sigma_\rho^{0p}}{d\rho}\zeta_1^p(\theta, \rho_2^0) = -\frac{\partial p_2}{\partial \rho}\zeta_1^p(\theta, \rho_2^0) \\
&\zeta_6^p(\rho, \theta) + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho}\frac{\partial \zeta_1^p(\theta, \rho_1^0)}{\partial \theta} = \frac{\partial q_2}{\partial \rho}\zeta_1^p(\theta, \rho_2^0)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

при $\rho = \rho_2^0 + a_2/\rho_2^0$.

К (3.1)–(3.4) следует добавить также линеаризованные условия сопряжения при $\rho = \rho_s^0$.

Для толстостенной трубы, например, находящейся под воздействием внутреннего и внешнего давлений $p_1 G_0$ и $p_2 G_0$ соответственно

$$
\begin{aligned}
&\partial p_1/\partial \rho = \partial p_2/\partial \rho = q_1 = q_2 = 0 \\
&\rho_1^0 = 1, \quad \rho_2^0 = \alpha = r_1/r_0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Внутренний и внешний контуры поперечного сечения трубы описываются функциями

$$
r = r_1 + \varphi_1(\theta), \quad r = r_0 + \varphi_2(\theta) \tag{3.6}
$$

При $f_1^{(1)}(\theta) \equiv \varphi_1(\theta)/r_0 \equiv f_2^{(1)}(\theta) \equiv \varphi_2(\theta)/r_0 \equiv 0$ и $f_1^0(\theta) = 1$, $f_2^0(\theta) = \alpha$ задача (1.3)–(1.10) имеет решение [3, 6]:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_\rho^{0e} = -\lambda(\rho_s^0)^2\rho^{-2} + c_1, \quad \sigma_\theta^{0e} = \lambda(\rho_s^0)^2\rho^{-2} + c_1 \\
&\sigma_\rho^{0e} = 2\lambda\ln\rho + c_2, \quad \sigma_\theta^{0p} = 2\lambda + 2\lambda\ln\rho + c_2 \\
&\tau_0^e = \tau^{0p} = 0, \quad u^{0e} = u^{0p} = \lambda(\rho_s^0)^2\rho^{-1}, \quad \upsilon^{0e} = \upsilon^{0p} = 0
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \pm\sqrt{2}k, \quad c_2 = -p_1 - 2\lambda\ln\left[a + \frac{\lambda}{2\alpha}(\rho_s^0)^2\right] \\
&c_1 = \lambda - p_1 + 2\lambda\ln\rho_s^0 - 2\ln\left[\alpha(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\lambda}{2\alpha}\rho_s^0\right] \\
&\operatorname{sign}\lambda = \operatorname{sign}(p_1 - p_2)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Величина ρ_s^0 находится из уравнения

$$
p_2 - p_1 + \lambda - 2\lambda\ln\left[\alpha(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\lambda}{2}\rho_s^0\alpha^{-1}\right] - \lambda(\rho_s^0)^2\left[1 + \frac{\lambda}{2}(\rho_s^0)^2\right]^{-2} = 0 \tag{3.9}
$$

Итак, для рассматриваемой задачи о поведении толстостенной трубы в (3.1)–(3.4):

$$
a_1 = a_2 = \lambda(\rho_s^0)^2 \tag{3.10}
$$

Задача (3.1)–(3.4) при соответствующих линеаризованных условиях сопряжения имеет нетривиальное решение, если выполняются следующие условия:

$$\lambda(\rho_s^0)^2\alpha^{-2} - 1 - \frac{\lambda}{2}(\rho_s^0)^2 - \frac{\lambda}{2}(\rho_s^0)^{-2} + 2\lambda\ln\frac{\alpha}{\rho_s^0} + \left[(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\lambda}{2}\rho_s^0\right]^4 = 0 \qquad (3.11)$$

Обозначим через p_* наибольший отрицательный корень системы уравнений (3.9), (3.11) при $p_2 = 0$, $\lambda = -\sqrt{2}k$, а через p_{**} – наименьший положительный корень этой системы уравнений при $p_2 = 0$, $\lambda = \sqrt{2}k$. Тогда условия существования нетривиального решения задачи (3.1)–(3.4) запишутся так

$$p_1 - p_2 = p_*, \quad p_1 - p_2 = p_{**} \qquad (3.12)$$

Итак, если величины параметров, характеризующих внешнее воздействие, таковы, что точка, определяемая координатами p_1, p_2, не выходит за область, ограниченную графиками функций (3.12), то характеристики напряженно-деформированного состояния трубы, т.е. решение задач (1.3)–(1.10), непрерывно зависят от $f_i(\theta)$ и $\varphi(\theta, \rho)$ при $f_i(\theta) \equiv 0$ и $\varphi(\theta, \rho) \equiv 0$. Следовательно, при достаточно малом отличии поперечного сечения трубы от кругового кольца и малой неоднородности материала выражения (3.7) можно брать в качестве приближенного решения задачи (1.3)–(1.10), т.е. несовершенствами можно пренебречь. А если функции $f_i(\theta)$ и $\varphi(\theta, \rho)$ заданы с точностью до малых параметров, т.е. $f_i = \varepsilon_i\gamma_i(\theta)$, $\varphi = \varepsilon_3\gamma_3(\theta, \rho)$, то характеристики напряженно-деформированного состояния трубы, как следует из аналитичности выражений в (1.3)–(1.10), будут аналитическими функциями параметров ε_i в окрестности точки $\varepsilon_i = 0$. Поэтому для получения более точного решения задачи (1.3)–(1.10) в этом случае его можно искать в виде степенных рядов по малым параметрам, являющихся рядами Тейлора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д.* Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 2. С. 294–296.
2. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т. 2. М.: Физматлит, 2002. 448 с.
3. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
4. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
5. *Захарова Т.Л., Ивлев Д.Д.* Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 5. С. 165–172.
6. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. М.: Гостехиздат, 1947. 300 с.
7. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
9. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
10. *Минаева Н.В.* Метод возмущений в механике деформируемых тел. М.: Научная книга, 2002. 155 с.
11. *Минаева Н.В.* О напряженно-деформированном состоянии толстостенной трубы, близком к осесимметричному // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 72–77.
12. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.

Воронеж

Поступила в редакцию
3.06.2003