

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ
С ТОНКИМ ДИСКООБРАЗНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ МАЛОЙ ЖЕСТКОСТИ
В УПРУГОМ ТЕЛЕ**

При помощи метода согласования асимптотических разложений (САР) и метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) исследовано напряженно-деформированное состояние упругого тела, содержащего в условиях полного контакта тонкое дискообразное включение малой жесткости и подвергаемого воздействию стационарной упругой волны. Изучены особенности решений задачи возле кромок включения, где возникает явление пограничного слоя. Ранее, с помощью метода САР, анализировались двумерные статические [1, 2] и динамические [3–5] задачи о взаимодействии тонкого упругого включения с матрицей, а также задачи для тел с тонкими вырезами [6, 7]. Методом ГИУ исследовалось трехмерное напряженно-деформированное состояние упругих тел, содержащих пространственные трещины [8–10].

1. Рассмотрим бесконечную однородную упругую среду с параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ , в которой в условиях полного контакта находится тонкое инородное включение с физико-механическими параметрами λ_0, μ_0, ρ_0 соответственно. Неоднородность занимает область

$$W_\varepsilon = \{x^* : x(x_1, x_2) \in S, 2|x_3| \leq \varepsilon f(x) = h(x)\} \quad (1.1)$$

где S – срединная поверхность включения (круг радиуса a); $x^*(x_1, x_2, x_3)$ – радиус-вектор точки пространства в декартовой системе координат с началом в центре области S ; $h(x)$ – толщина включения; $f(x)$ – достаточно гладкая положительно определенная функция; ε – малый безразмерный параметр. Исследуется случай податливого включения, когда отношения параметров Ламе неоднородности и матрицы имеют порядок $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и, кроме того, $k_\beta \max_{x \in S} h(x) \ll 1$, где k_β – волновое число продольных ($\beta = 1$)

или поперечных ($\beta = 2$) волн внешней среды.

В дальнейшем предполагаем, что на включение набегают стационарная упругая волна, определенная вектором смещений $u^{in}(x^*)$. Смещения в рассеянной включением волне $u^s(x^*)$ и во включении $u^0(x^*)$ удовлетворяют соответственно в областях $R^3 \setminus W_\varepsilon$ и W_ε уравнениям установившихся колебаний Ламе (зависимость во времени t полей вида $\exp(-i\omega t)$ подразумевается; ω – циклическая частота колебаний) и условиям неразрывности смещений и напряжений на границе ∂W_ε области W_ε :

$$u^s + u^{in} = u^0, \quad \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^{in} - \sigma_{ij}^0) n_j^0 = 0, \quad (l = \overline{1, 3}), \quad x^* \in \partial W_\varepsilon \quad (1.2)$$

где $\sigma_{ij}^s, \sigma_{ij}^{in}, \sigma_{ij}^0$ – компоненты тензоров напряжений, соответствующие смещениям u^s, u^{in} и $u^0, n^0(n_1^0, n_2^0, n_3^0)$ – внешняя нормаль к поверхности ∂W_ε . Кроме того, вектор $u^s(x^*)$ на бесконечности должен удовлетворять условиям изучения [11].

Согласно метода САР [12], решение поставленной задачи вдали от кромок включения достаточно точно описывается главным членом $\mathbf{u}^{s0}(\mathbf{x}^*)$ внешнего асимптотического разложения поля $\mathbf{u}^s(\mathbf{x}^*)$ по параметру ε . При этом условия сопряжения (1.2) сносятся на срединную поверхность неоднородности S и приобретают вид [4] (\mathbf{u}_j^{s0} – компоненты вектора \mathbf{u}^{s0} , σ_{ij}^{s0} – компоненты тензора напряжений, соответствующие смещению \mathbf{u}^{s0}):

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{s0}(\mathbf{x}) + \sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}) &= -4\pi(\lambda_0 + 2\mu_0)h^{-1}(\mathbf{x})\Delta u_3(\mathbf{x}) \\ \sigma_{\beta 3}^{s0}(\mathbf{x}) + \sigma_{\beta 3}^{in}(\mathbf{x}) &= -4\pi\mu_0 h^{-1}(\mathbf{x})\Delta u_\beta(\mathbf{x}), \quad \beta = 1, 2 \\ \sigma_{j3}^{s0}(\mathbf{x}) &= \sigma_{j3}^{s0}(x_1, x_2, +0) = \sigma_{j3}^{s0}(x_1, x_2, -0), \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \mathbf{x} \in S \\ \Delta u_j(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi}[u_j^{s0}(x_1, x_2, -0) - u_j^{s0}(x_1, x_2, +0)] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пусть для толщины включения $h(\mathbf{x})$ в окрестности контура ∂S области S справедливо разложение

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \varepsilon f_0(\varphi)(1 - r/a)^{\delta(\varphi)} + \dots, \quad \delta(\varphi) \geq 0, \quad f_0(\varphi) \neq 0, \quad r \rightarrow a \\ x_1 &= r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тогда известно [4], что скачки смещений $\Delta u_j(\mathbf{x})$ обладают асимптотикой (ν – коэффициент Пуассона материала матрицы):

$$\begin{aligned} \Delta u_j(r, \varphi) &= a(1 - r^2/a^2)^{\kappa(\varphi)} \alpha_j(r, \varphi) \quad (j = \overline{1, 3}) \\ \alpha_1(r, \varphi) &= \beta_0[(\nu - 1)K_2(\varphi) \cos \varphi + K_3(\varphi) \sin \varphi] + o(1) \\ \alpha_2(r, \varphi) &= \beta_0[(\nu - 1)K_2(\varphi) \cos \varphi - K_3(\varphi) \sin \varphi] + o(1) \\ \alpha_3(r, \varphi) &= (\nu - 1)\beta_0 K_1(\varphi) + o(1), \quad r \rightarrow a, \quad \beta_0 = (2\mu\sqrt{\pi a})^{-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

причем $\kappa(\varphi) = 0.5$ при $0 \leq \delta(\varphi) < 1$, $\kappa(\varphi) = \delta(\varphi)$ при $\delta(\varphi) > 1$.

Величины $K_j(\varphi)$ ($j = \overline{1, 3}$) для случая, когда в матрице находится круговая трещина, принято называть коэффициентами интенсивности напряжений.

С целью определения решения \mathbf{u}^{s0} , в частности, коэффициентов $K_j(\varphi)$, воспользуемся методом ГИУ.

2. Представим компоненты вектора смещений \mathbf{u}^{s0} , удовлетворяющие уравнениям движения и последним двум граничным условиям (1.3), в интегральной форме как комбинацию потенциалов Гельмгольца [8, 13]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j^{s0}(\mathbf{x}^*) &= \frac{\partial H_{j2}}{\partial x_3} + \frac{\partial(H_{31} - 2H_{32})}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_3} \right) \delta_{j3} + \\ &+ \frac{2}{k_2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (H_{31} - H_{32}) - \frac{\partial^2(H_{11} - H_{12})}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2(H_{21} - H_{22})}{\partial x_2 \partial x_3} \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$H_{j\beta}(\mathbf{x}^*) = \iint_S \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\exp(ik_\beta |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)}{|\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\xi}|} dS_\xi, \quad (j = \overline{1, 3}, \quad \beta = 1, 2)$$

где $|\mathbf{x}^* - \xi|$ – расстояние между рассматриваемой точкой матрицы $\mathbf{x}^*(x_1, x_2, x_3)$ и точкой интегрирования $\xi(\xi_1, \xi_2)$; δ_{jk} – символ Кронекера.

Далее, удовлетворяя с помощью соотношений (2.1) первым двум условиям (1.3), приходим к граничному интегральному уравнению относительно скачка Δu_3 и системе двух граничных интегральных уравнений относительно скачков $\Delta u_1, \Delta u_2$:

$$4\pi(\lambda_0 + 2\mu_0)h^{-1}(\mathbf{x})\Delta u_3(\mathbf{x}) - \frac{4\mu}{k_2^2} \iint_S \Delta u_3(\xi) R_3(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi = -\sigma_{33}^{in}(\mathbf{x})$$

$$4\pi\mu_0 h^{-1}(\mathbf{x})\Delta u_\beta(\mathbf{x}) - \frac{4\mu}{k_2^2} \iint_S [\Delta u_\beta(\xi) R_\beta(\mathbf{x}, \xi) - \Delta u_{(3-\beta)}(\xi) R_4(\mathbf{x}, \xi)] dS_\xi = -\sigma_{3\beta}^{in}(\mathbf{x}), \quad (\beta = 1, 2) \quad \mathbf{x} \in S \quad (2.2)$$

В (2.2) ядра $R_j(\mathbf{x}, \xi)$ определяются соотношениями

$$R_j(\mathbf{x}, \xi) = R_{j1}(\mathbf{x}, \xi) \frac{\exp(ik_1|\mathbf{x} - \xi|)}{|\mathbf{x} - \xi|^5} - R_{j2}(\mathbf{x}, \xi) \frac{\exp(ik_2|\mathbf{x} - \xi|)}{|\mathbf{x} - \xi|^5} \quad (j = \overline{1, 4})$$

$$R_{\beta 1}(\mathbf{x}, \xi) = -12 + 12ik_1|\mathbf{x} - \xi| + 5k_1^2|\mathbf{x} - \xi|^2 - ik_1^3|\mathbf{x} - \xi|^3 + \frac{(x_{(3-\beta)} - \xi_{(3-\beta)})^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2} (15 - 15ik_1|\mathbf{x} - \xi| - 6k_1^2|\mathbf{x} - \xi|^2 + ik_1^3|\mathbf{x} - \xi|^3)$$

$$R_{\beta 2}(\mathbf{x}, \xi) = -12 + 12ik_2|\mathbf{x} - \xi| + \frac{21}{4}k_2^2|\mathbf{x} - \xi|^2 - \frac{5}{4}ik_2^3|\mathbf{x} - \xi|^3 - \frac{1}{4}ik_2^4|\mathbf{x} - \xi|^4 + \frac{(x_{(3-\beta)} - \xi_{(3-\beta)})^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2} \left(15 - 15ik_2|\mathbf{x} - \xi| - \frac{27}{4}k_2^2|\mathbf{x} - \xi|^2 + \frac{7}{4}ik_2^3|\mathbf{x} - \xi|^3 + \frac{1}{4}ik_2^4|\mathbf{x} - \xi|^4 \right) \quad (\beta = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$R_{31}(\mathbf{x}, \xi) = 9 - 9ik_1|\mathbf{x} - \xi| + (k_2^2 - 5k_1^2)|\mathbf{x} - \xi|^2 + ik_1(2k_1^2 - k_2^2)|\mathbf{x} - \xi|^3 + \frac{1}{4}(2k_1^2 - k_2^2)^2|\mathbf{x} - \xi|^4$$

$$R_{32}(\mathbf{x}, \xi) = 9 - 9ik_2|\mathbf{x} - \xi| - 4k_2^2|\mathbf{x} - \xi|^2 + ik_2^3|\mathbf{x} - \xi|^3$$

$$R_{41}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^2} (15 - 15ik_1|\mathbf{x} - \xi| - 6k_1^2|\mathbf{x} - \xi|^2 + ik_1^3|\mathbf{x} - \xi|^3)$$

$$R_{42}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^2} \left(15 - 15ik_2|\mathbf{x} - \xi| - \frac{27}{4}k_2^2|\mathbf{x} - \xi|^2 + \frac{7}{4}ik_2^3|\mathbf{x} - \xi|^3 + \frac{1}{4}k_2^4|\mathbf{x} - \xi|^4 \right)$$

Уравнения (2.2) имеют гиперсингулярную особенность в ядрах, поэтому последующий шаг к решению задачи состоит в их регуляризации (во избежание громоздкости вы-

кладок ниже регуляризационные процедуры применяются к первому уравнению (2.2); без математических усложнений они распространяются на систему остальных двух уравнений). Выделяя характеристическую часть уравнения при помощи интегралов типа ньютоновского (статического) потенциала [13], его можно тождественно преобразовать к виду

$$4\pi(\lambda_0 + 2\mu_0)(\nu - 1)\mu^{-1}h^{-1}(\mathbf{x})\Delta u_3(\mathbf{x}) + \iint_S \Delta u_3(\xi)R_0(\mathbf{x}, \xi)dS_\xi + \iint_S \Delta u_3(\xi)[4(1 - \nu)k_2^{-2}R_3(\mathbf{x}, \xi) - R_0(\mathbf{x}, \xi)]dS_\xi = (1 - \nu)\mu^{-1}\sigma_{33}^{in}, \mathbf{x} \in S \quad (2.4)$$

$$R_0(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|^3} + \frac{Ak_2^2}{|\mathbf{x} - \xi|}, \quad A = \frac{7 - 12\nu + 8\nu^2}{8(1 - \nu)}$$

Последний интеграл в левой части (2.4) является регулярным, в чем легко убедиться путем разложения экспоненциальных функций, содержащихся в ядре (2.3), в сходящиеся ряды относительно $|\mathbf{x} - \xi|$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\kappa(\varphi) = 0.5$. Тогда на основании (1.5) особые интегралы в (2.4) можно интерпретировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{\frac{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{|\mathbf{x} - \xi|^3}} \alpha_3(\xi) dS_\xi &= I_{00}(\mathbf{x})\alpha_3(\mathbf{x}) + I_{10}(\mathbf{x})\frac{\partial \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} + I_{01}(\mathbf{x})\frac{\partial \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \\ &+ \frac{1}{2}I_{20}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}I_{02}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} + I_{11}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + \iint_S \sqrt{\frac{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{|\mathbf{x} - \xi|^3}} \times \\ &\times \left[\alpha_3(\xi) - \alpha_3(\mathbf{x}) - (\xi_1 - x_1)\frac{\partial \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} - (\xi_2 - x_2)\frac{\partial \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \frac{1}{2}(\xi_1 - x_1)^2 \times \right. \\ &\left. \times \frac{\partial^2 \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}(\xi_2 - x_2)^2 \frac{\partial^2 \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} - (\xi_1 - x_1)(\xi_2 - x_2)\frac{\partial^2 \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dS_\xi \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\iint_S \sqrt{\frac{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{|\mathbf{x} - \xi|}} \alpha_3(\xi) dS_\xi = I(\mathbf{x})\alpha_3(\mathbf{x}) + \iint_S \sqrt{\frac{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{|\mathbf{x} - \xi|}} [\alpha_3(\xi) - \alpha_3(\mathbf{x})] dS_\xi$$

$$I_{ij}(\mathbf{x}) = \iint_S \sqrt{\frac{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{|\mathbf{x} - \xi|^3}} (\xi_1 - x_1)^i (\xi_2 - x_2)^j dS_\xi$$

$$I(\mathbf{x}) = \iint_S \sqrt{\frac{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{|\mathbf{x} - \xi|}} dS_\xi \quad (2.6)$$

Отметим, что подынтегральные выражения в правой части (2.5) ограничены, поэтому численное интегрирование в соответствующих интегралах можно производить вдоль области S_0 , образующейся из S удалением малой окрестности точки $\xi = \mathbf{x}$. Ин-

тегралы (2.6) существуют в смысле главного значения и берутся аналитически путем интегрирования по частям. Приведем их значения:

$$I_{00}(\mathbf{x}) = -\pi^2, \quad I_{10}(\mathbf{x}) = -\pi^2 x_1/2, \quad I_{01}(\mathbf{x}) = -\pi^2 x_2/2$$

$$I_{20}(\mathbf{x}) = \pi^2(4a^2 - x_1^2 - 3x_2^2)/16, \quad I_{02}(\mathbf{x}) = \pi^2(4a^2 - 3x_1^2 - x_2^2)/16$$

$$I_{11}(\mathbf{x}) = -\pi^2 x_1 x_2/8, \quad I(\mathbf{x}) = \pi^2(2a^2 - x_1^2 - x_2^2)/4$$

Таким образом, учитывая соотношения (1.5), (2.4) (2.5), получим следующий регулярный аналог рассматриваемого граничного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} & 4\pi(\lambda_0 + 2\mu_0)(\nu - 1)\mu^{-1} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} h^{-1}(\mathbf{x}) \alpha_3(\mathbf{x}) + \\ & + [I_{00}^*(\mathbf{x}) - Ak_2^2 I^*(\mathbf{x})] \alpha_3(\mathbf{x}) + I_{10}^*(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} + I_{01}^*(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \\ & + \frac{1}{2} I_{20}^*(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} I_{02}^*(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} + I_{11}^*(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \alpha_3(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{4(1-\nu)}{k_2^2} \times \\ & \times \iint_{S_0} \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \alpha_3(\xi) R_3(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi = (1-\nu)\mu^{-1} \alpha_{33}^{in}, \quad \mathbf{x} \in S \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$I_{ij}^*(\mathbf{x}) = I_{ij}(\mathbf{x}) - \iint_{S_0} \sqrt{\frac{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{|\mathbf{x} - \xi|^3}} (\xi_1 - x_1)^i (\xi_2 - x_2)^j dS_\xi$$

$$I^*(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) - \iint_{S_0} \sqrt{\frac{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{|\mathbf{x} - \xi|}} dS_\xi$$

Дискретизация уравнения (2.7) базируется на введении в области S сетки радиально-угловых элементов и коллокационном удовлетворении уравнения в узловых точках внутри граничных элементов. При этом используется кусочно-постоянная аппроксимация искомой функции и разностные схемы представления производных [8]. Окончательно задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений функции $\alpha_3(\mathbf{x})$.

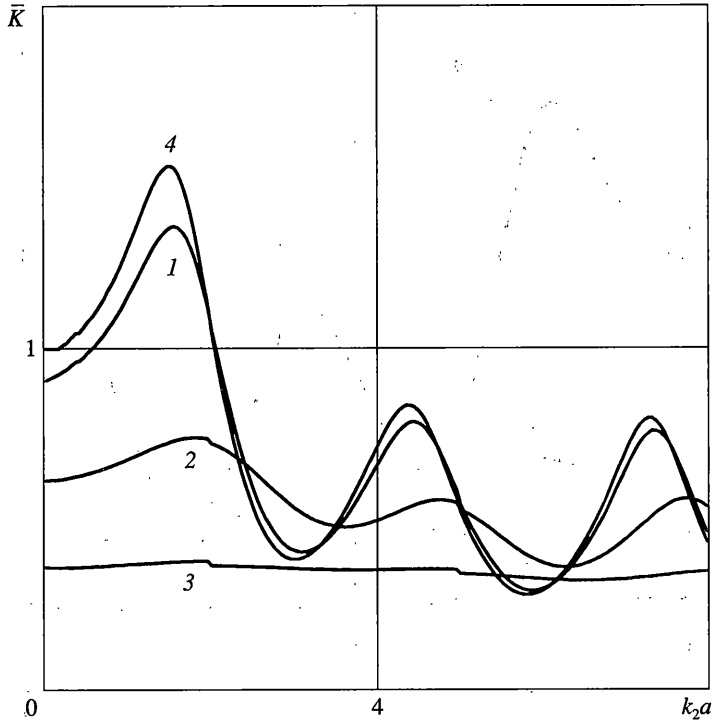
В случае, когда $\kappa(\varphi) > 1$ ($\delta(\varphi) > 1$), учитывая (1.5), представим скачек Δu_3 в виде

$$\Delta u_3(r, \varphi) = \sqrt{a^2 - r^2} \alpha_3^*(r, \varphi), \quad \alpha_3^*(r, \varphi) = (1 - r^2/a^2)^{\kappa(\varphi) - 0.5} \alpha_3(r, \varphi)$$

Поскольку функция $\alpha_3^*(r, \varphi)$ ограничена и обладает достаточной степенью гладкости, при решении задачи, то есть определении функции α_3 , можно также воспользоваться алгоритмом, предложенным выше для случая $\kappa(\varphi) = 0.5$.

3. В качестве примера рассмотрим случай, когда на включение набегает плоская продольная волна, характеризующаяся вектором смещения

$$\mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}^*) = a \exp[-ik_1(\mathbf{l}, \mathbf{x}^*)] \quad (3.1)$$



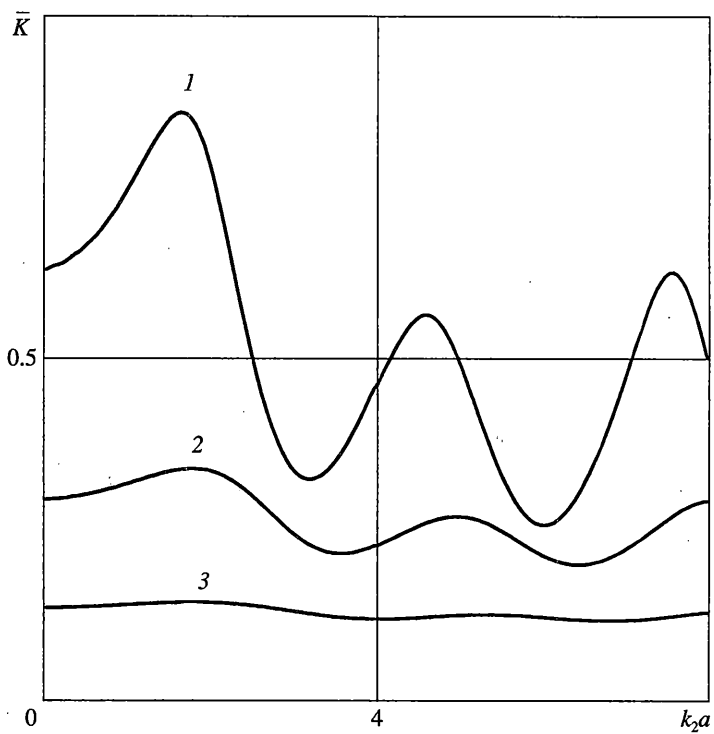
Фиг. 1

где $I(\sin\theta_m, 0, \cos\theta_m)$ – направление падения волны. Численные расчеты выполнены в предположении, что внешняя среда – сталь ($\mu = 8.1 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 1/3$) и $\epsilon = 0.04$. Толщина включения определялась соотношением (f_1 – заданная функция, описывающая форму неоднородности):

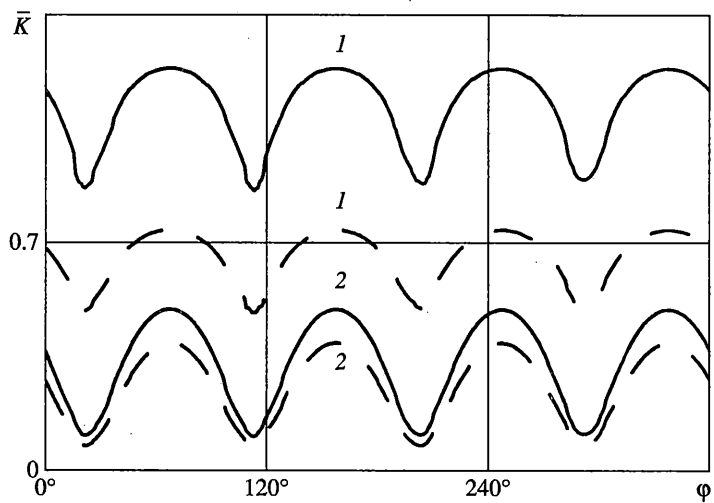
$$h(\mathbf{x}) = a\epsilon(1 - r/a)^{\delta(\varphi)} f_1(f, \varphi)$$

На фиг. 1, 2 представлены частотные зависимости нормированной амплитуды коэффициента интенсивности напряжений $\bar{K} = \sqrt{\pi/a} [2k_1a(\lambda + 2\mu)]^{-1} |K_1|$ для включения постоянной толщины ($\delta(\varphi) = 0$, $\kappa(\varphi) = 0.5$, $f_1 \equiv 1$, фиг. 1) и включения с острыми краями ($\delta(\varphi) = 2$, $\kappa(\varphi) = 2$, $f_1 \equiv 1$, фиг. 2) при нормальном падении волны на включение ($\theta_{in} = 0^\circ$). Здесь и далее линия 1 соответствует значению $\lambda_0 + 2\mu_0 = 680$ МПа (каучук), линия 2 – значению $\lambda_0 + 2\mu_0 = 0.66 \cdot 10^4$ МПа (плексиглас), линия 3 – значению $\lambda_0 + 2\mu_0 = 3.18 \cdot 10^4$ МПа (свинец), а линия 4 – значению $\lambda_0 + 2\mu_0 = 0$ (тонкий вырез). Видно, что уменьшение жесткости материала включения приводит к увеличению уровня напряжений возле края включения. Из фиг. 1 следует также, что при $\delta = 0$ влияние жесткости материала включения на величину коэффициента \bar{K} в высокочастотной области нивелируется.

На фиг. 3 представлено распределение величины \bar{K} вдоль контура ∂S при нормальном падении волны (3.1) на включение переменной толщины, форма которого задается функциями $f_1(r, \varphi) = (6a - 5r\sin 4\varphi)/5a$, $\delta(\varphi) = 0.5$. Расчеты выполнены для



Фиг. 2



Фиг. 3

волновых размеров включения $k_2 a = 1.6$ (сплошная линия) и $k_2 a = 4.4$ (штриховая линия), отвечающих первому и второму максимумам в соответствующем частотном спектре. Видно, что при нормальном падении волны на заданный дефект максимумы и минимумы модуля напряжений и функции $f_1(a, \varphi)$ практически совпадают для различных волновых размеров неоднородности.

В заключение отметим, что когда $0 \leq \delta(\varphi) < 1$, при снесении граничных условий (1.2) на срединную линию включения возникает явление пограничного слоя [4]. Полученные результаты, определяющие уровень напряжений возле края неоднородности, можно уточнить в этом случае согласно методике, подробно описанной в работах [4–7]. Когда $\delta(\varphi) > 1$, явления пограничного слоя не возникает и предложенный выше алгоритм описывает решение задачи во всем композите.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 01.07.00133).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мовчан А.Б., Назаров С.А. Напряженно-деформированное состояние плоской области с тонким упругим включением конечных размеров // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 75–83.
2. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Петрозаводский гос. ун-т., 1993. 600 с.
3. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
4. Kit H.S., Kunets Ya.I., Yemets V.F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Int. J. of Eng. Science. 1999. V. 37. P. 331–345.
5. Yemets V.F., Kit H.S., Kunets Ya.I. Interaction of time-harmonic SH-waves with a crack like inclusion: edge region analysis // Int. J. of Fracture. 1998. V. 94. P. 52–62.
6. Зорин И.С., Мовчан А.Б. О напряженном состоянии упругого пространства, содержащего тонкую полость // Вестник ЛГУ. 1986. Сер. 1. № 3. С. 63–68.
7. Мовчан А.Б. Хрупкое разрушение упругой плоскости, содержащей тонкий прямоугольный вырез // Вестник ЛГУ. 1998. Сер. 1. № 1. С. 63–67.
8. Kit H.S., Khaj M.V., Mykhas'kiv V.V. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM // Eng. fracture mech. 1996. V. 55. № 2. P. 191–207.
9. Гольдштейн Р.В., Капцов А.В. О трещине нормального отрыва в упругой среде под действием гармонических волн // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 93–100.
10. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // ПММ. 1996. Т. 60. № 2. С. 282–289.
11. Купрадзе В.А. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
12. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Тбил. гос. ун-т, 1980. 206 с.
13. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциала в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1989. 288 с.

Львов

Поступила в редакцию
10.09.2002