

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ С ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Решена задача о взаимодействии волн кручения с включением в виде тонкой абсолютно жесткой цилиндрической оболочки, расположенной в неограниченной упругой среде. Включение предполагается подвижным и под действием волны может совершать поворот на некоторый угол, который определяется в ходе решения. Метод решения основан на использовании разрывного решения уравнения для угловых перемещений при кручении. В результате этого исходная задача свелась к решению сингулярного интегрального уравнения относительно неизвестного скачка касательных напряжений на поверхности включения. Решение этого уравнения находится приближенно методом механических квадратур. С помощью последнего проведено численное исследование концентрации напряжений в среде вблизи включения. За величину, характеризующую эту концентрацию в статье, принят коэффициент при особенности касательных напряжений. Показана зависимость этого коэффициента от волнового числа и отношения геометрических размеров включения.

1. Одной из главных задач возникающих при создании современных машин и орудий, является обеспечение их прочности, надежности и долговечности при наличии в них технологических дефектов в виде трещин и тонких жестких включений. Но проектирование конструкций с учетом наличия в них указанных дефектов требует решения соответствующих смешанных задач теории упругости, которые тем более сложны, если рассматриваются в динамической постановке. Целью настоящей работы является исследование концентрации напряжений в упругом теле, которое содержит дефект в виде тонкого абсолютно жесткого цилиндрического включения. Ранее такие задачи, в статической и динамической постановках, решались для дефектов в виде цилиндрического разреза [1, 2].

2. Рассмотрим неограниченную упругую среду, содержащую тонкую жесткую круговую цилиндрическую оболочку длины $2a$, радиуса срединной поверхности r_0 и толщины $h \ll a$. Эта среда в условиях осевой симметрии (ось симметрии совпадает с осью включения) совершает крутильные колебания. Колебания происходят в результате распространения в среде волны кручения, вызывающей в ней перемещения [3]:

$$u_{\theta}^0 = \frac{A_0}{\beta r_0} J_1(\beta r) e^{i\gamma z}, \quad \beta = \sqrt{\kappa_2^2 - \gamma^2}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho} \quad (2.1)$$

где ρ , G — плотность и модуль сдвига среды, ω — частота колебаний. Зависимость от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$, который в (2.1) и всюду ниже опущен.

В этих условиях от нуля отлично лишь угловое перемещение среды, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_{\theta}) + \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z^2} + \kappa_2^2 u_{\theta} = 0 \quad (2.2)$$

Будем предполагать, что внешняя и внутренняя поверхности включения сцеплены с упругой средой. Поэтому имеет место граничное условие

$$u_{\theta}(r_0 \pm 0, z) = \theta_0 r_0, \quad -a \leq z \leq a \quad (2.3)$$

которое в виду малой толщины включения, формулируется на его срединной поверхности. Так же, на поверхности включения терпят разрыв касательные напряжения с неизвестным скачком

$$\chi(z) = \tau_{\theta r}(r_0 + 0, z) - \tau_{\theta r}(r_0 - 0, z), \quad -a \leq z \leq a \quad (2.4)$$

В равенстве (2.3) через θ_0 обозначена неизвестная амплитуда угла поворота включения. Она определяется из уравнения движения включения, которое в случае гармонических колебаний записывается в виде

$$2\pi r_0^2 \int_{-a}^a \chi(\eta) d\eta = -\theta_0 \omega^2 J_0, \quad J_0 = \frac{a\pi\rho_0}{4} \left(\left(r_0 + \frac{h}{2} \right)^4 - \left(r_0 - \frac{h}{2} \right)^4 \right) \quad (2.5)$$

где J_0 – момент инерции включения, ρ_0 – плотность материала включения.

3. Для решения сформулированной задачи угловое перемещение среды представим в виде суммы

$$u_{\theta} = u_{\theta}^0 + u_{\theta}^1 \quad (3.1)$$

перемещения вызванного падающей волной (2.1) и перемещения, вызванного отраженными от включения волнами. Последние запишем в виде разрывного решения уравнения (2.2) со скачком (2.4) по формуле [2]:

$$u_{\theta}^1(r, z) = r_0 \int_{-a}^a \frac{\chi(\eta)}{G} F(\eta - z, r) d\eta, \quad F(\eta - z, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda, r) e^{i\lambda(\eta - z)} d\lambda \quad (3.2)$$

$$G(\lambda, r) = \begin{cases} I_1(r_0 \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}) K_1(r \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}), & r > r_0 \\ I_1(r \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}) K_1(r_0 \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}), & r < r_0 \end{cases}$$

где I_1, K_1 – модифицированные функции Бесселя.

Формула (3.2) позволит находить угловое перемещение в любой точке среды, если будет известен скачок напряжений $\chi(z)$. Он может быть найден в результате реализации условия (2.3). Так как более удобно использовать не само условие (2.3), а полученное из него дифференцированием, то скачок будем находить из условий

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}(r_0, z) = 0, \quad u_{\theta}(r_0, -a) = \theta_0 r_0 \quad (3.3)$$

Первое из равенств (3.3) есть результат дифференцирования (2.3), а второе – условие эквивалентности продифференцированного и исходного равенств. Подстановка (3.2) в (3.3) приводит к интегральному уравнению и дополнительному условию для определения неизвестного скачка напряжений

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(x) L_1(x - y) dx = f_1(x), \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(x) L_0(1 + x) dx = \frac{\theta_0}{\varepsilon} + f_0 \quad (3.4)$$

$$L_1(\zeta) = 2\varepsilon\kappa_0 \int_0^\infty u I_1(\kappa_0 q) K_1(\kappa_0 q) \sin(\kappa_0 \varepsilon \zeta u) du$$

$$L_0(p) = -2\kappa_0 \int_0^\infty I_1(\kappa_0 q) K_1(\kappa_0 q) \cos(\kappa_0 \varepsilon p u) du \quad (3.5)$$

$$q = \sqrt{u^2 - 1}, \quad \zeta = x - y, \quad p = 1 + x$$

$$f_1(x) = \frac{i\alpha_0 \delta_0}{\beta_0} J_1(\kappa_0 \beta_0) \exp(i\delta_0 \kappa_0 y), \quad f_0 = \frac{\alpha_0}{\varepsilon \beta_0 \kappa_0} J_1(\kappa_0 \beta_0) \exp(-i\delta_0 \varepsilon \kappa_0)$$

$$x = a^{-1} \eta, \quad y = a^{-1} z, \quad \lambda = \kappa_2 u, \quad \kappa_0 = a \kappa_2, \quad \varphi(x) = G^{-1} \chi(ax), \quad \gamma = a/r_0 \quad (3.6)$$

$$\delta_0 = g/\kappa_2, \quad \beta_0 = \sqrt{1 - \delta_0^2}, \quad \alpha_0 = A_0/r_0$$

Из известных асимптотических разложений для модифицированных цилиндрических функций [4] следует, что при $u \rightarrow \infty$:

$$I_1(\kappa_0 q) I_1(\kappa_0 q) = \frac{1}{2} ((\kappa_0 u)^{-1} + A_1(\kappa_0 u)^{-3} + A_2(\kappa_0 u)^{-5} + O((\kappa_0 u)^{-7})) \quad (3.7)$$

Представим в интегралах (3.5) промежуток интегрирования в виде $[0, 1] \cup [1, a] \cup [1, +\infty]$, где A достаточно велико, и при $u \in [A, +\infty]$ воспользуемся разложением (3.7). В результате из них будет выделена сингулярная составляющая

$$L_1(\zeta) = 1/\zeta + F(\zeta), \quad L_0(p) = \ln|p| + G(p)$$

$$F(\zeta) = \sum_{k=1}^3 F_k(\zeta), \quad G(p) = \sum_{k=1}^3 G_k(\zeta), \quad \zeta = x - y, \quad p = 1 + x$$

$$F_1(\zeta) = i\pi \varepsilon \kappa_0^2 \int_0^1 u R(u) \sin(\varepsilon \kappa_0 \zeta u) du, \quad F_2(\zeta) = 2\varepsilon \kappa_0^2 \int_1^A u R(u) \sin(\varepsilon \kappa_0 \zeta u) du$$

$$G_1(p) = -i\pi \varepsilon \kappa_0 \int_0^1 u R(u) \cos(\varepsilon \kappa_0 p u) du, \quad G_2(p) = -2\kappa_0 \int_1^A u R(u) \cos(\varepsilon \kappa_0 p u) du \quad (3.8)$$

$$R(u) = I_1(\kappa_0 q) K_1(\kappa_0 q)$$

$$F_3(\zeta) = \varepsilon(s_0(\zeta) + A_1 s_2(\zeta) + A_2 s_4(\zeta)), \quad G_3(p) = -c_1(p) - A_1 c_3(p) - A_2 c_5(p)$$

$$s_0(\zeta) = \frac{\cos(A\varepsilon\kappa_0\zeta) - 1}{\varepsilon\zeta}, \quad c_0(p) = -\ln|p| + \text{ci}(A\kappa_0\varepsilon|p|)$$

$$s_k(\zeta) = \int_A^\infty \frac{\sin(A\varepsilon\kappa_0\zeta u) du}{(A\kappa_0 u)^{2k}}, \quad c_k(p) = \kappa_0 \int_A^\infty \frac{\sin(A\varepsilon\kappa_0 p u) du}{(A\kappa_0 u)^{2k+1}} \quad (k = 1, 2)$$

Если учесть (3.8) то уравнения (3.4) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(x) \left[\frac{1}{x-y} + R(x-y) \right] dx &= f_1(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(x) [-\ln(1+x) + G(1+x)] dx &= \frac{\theta_0}{\varepsilon} + f_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

К уравнениям (3.9) необходимо еще добавить условие для определения неизвестной амплитуды угла поворота включения θ_0 , которое получим из (2.5), после перехода к обозначениям (3.7):

$$\theta_0 = -\frac{1}{\kappa_0^2 q_{0-1}} \int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx, \quad q_0 = \frac{\varepsilon_0(4 + \varepsilon_0^2)}{2p_0}, \quad p_0 = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{h}{a} \quad (3.10)$$

Решение интегрального уравнения (3.9) будем разыскивать в виде [4]

$$\varphi(x) = \psi(x) / \sqrt{1-x^2} \quad (3.11)$$

где $\psi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на $[-1, 1]$.

Для приближенного определения функции $\psi(x)$ уравнения (3.9), (3.10) по методу [5] заменим системой линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \left[\frac{1}{x_m - y_k} + F(x_m - y_k) \right] \psi_m &= f_1(y_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m [B_m + G(1+x_m)] \psi_m &= \frac{\theta_0}{\varepsilon} - f_0, \quad \theta_0 = -\frac{1}{2\kappa_0^2 q_{0m}} \sum_{m=1}^n a_m \psi_m \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\psi_m = \psi(x_m), \quad a_m = \frac{\pi}{n}, \quad B_m = \ln 2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{T_j(x_m)}{j}$$

$$x_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}, \quad y_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

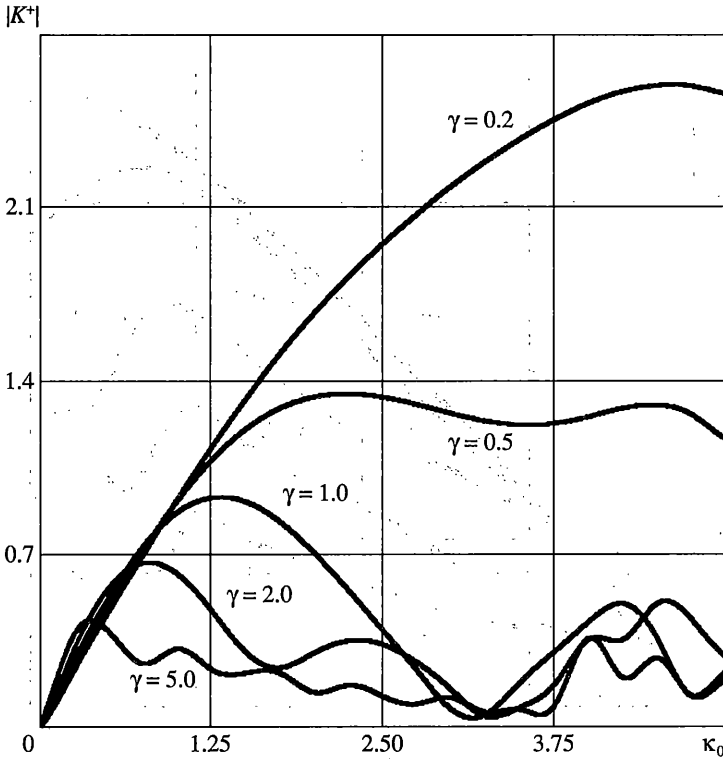
где $m = 1, 2, \dots, n$ – корни многочлена Чебышева $T_n(x)$. При получении системы (3.12) была использована формула для интеграла с логарифмической особенностью из [6].

После решения системы (3.12) приближенное значение функции $\psi(x)$ может быть найдено при помощи интерполяционного многочлена наилучшего приближения

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^n \frac{T_n(x)}{T_n'(x_m)(x-x_m)} \quad (3.13)$$

В качестве величины, характеризующей концентрацию напряжений в среде вблизи включения, так же как и при решении аналогичных задач в статической постановке [1], примем коэффициент при особенности напряжения

$$N^\pm = \sqrt{aGK^\pm}, \quad K^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm 1 \mp 0} \sqrt{1 \mp x} \varphi(x) \quad (3.14)$$



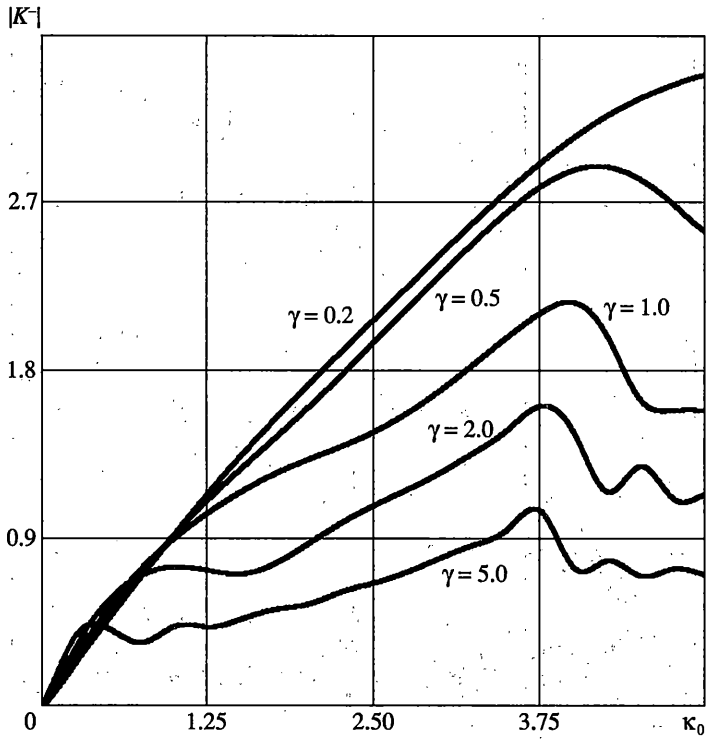
Фиг. 1

После подстановки (3.11), (3.13) в (3.14) получим приближенную формулу для его вычисления

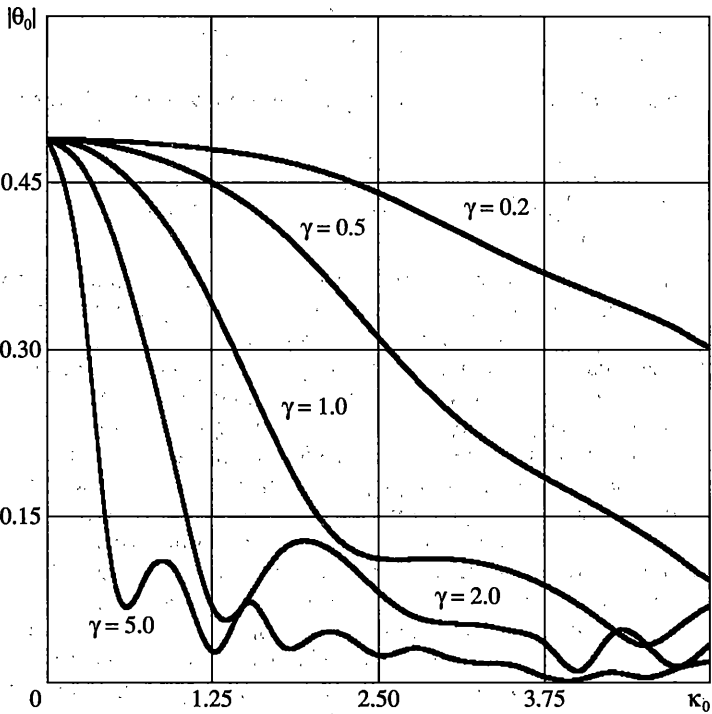
$$K^{\pm} = \psi(\pm 1) = \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_m(\operatorname{ctg} \gamma_m)^{\pm 1}, \quad \gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{4n} \quad (3.15)$$

4. Найденное приближенное решение системы (3.12) было использовано для численного исследования зависимости коэффициентов K^{\pm} и угла поворота θ_0 от соотношения размеров включения γ и волновых постоянных κ_0 и δ_0 . При этом в системе (3.12) удерживалось до двадцати уравнений, что обеспечило получение всех результатов с погрешностью менее 0.1%. Было установлено, что наибольшее абсолютное значение θ_0 и K^{\pm} достигаются при δ_0 близких к 1. Поэтому, подробный численный анализ, результаты которого приводятся ниже в виде графиков, проводился при $\delta_0 = 0.95$.

На фиг. 1, 2 показаны зависимости $|K^{\pm}|$ от безразмерного волнового числа κ_0 при различных соотношениях между размерами оболочки γ . Из графиков этих зависимостей видно наличие значений волнового числа, при которых коэффициент $|K^{\pm}|$ имеет максимум. Так же можно сделать вывод, что коэффициент напряжений вблизи включения сильно зависит от отношения его размеров, причём наиболее сильную концентрацию напряжений вызывают включения у которых $\gamma < 1$ (диаметр больше длины). На фиг. 3 приведены графики зависимостей амплитуды угла поворота включения от безразмерного волнового числа, из которых видно, что последняя убывает с ростом κ_0 при $\gamma < 1$.



Фиг. 2



Фиг. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
2. Попов Г.Я., Морозов Ю.А., Вайсфельд Н.Д. К решению динамических задач о концентрации упругих напряжений возле дефектов на цилиндрических поверхностях // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 1. С. 28–36.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко Н.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 308 с.
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
5. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы с сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.
6. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наук. думка, 1989. 256 с.

Одесса

Поступила в редакцию
16.08.2002