

УДК 539.3

© 2004 г. С.А. МЕЛКУМЯН, В.С. ТОНОЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Рассмотрен класс контактных задач теории электроупругости для пьезокерамической полуплоскости, когда полуплоскость ослаблена: или выходящим на границу конечным вертикальным разрезом (b), или находящимся на конечном расстоянии от границы полубесконечным вертикальным разрезом (a), или внутренним конечным вертикальным разрезом (c). На конечном участке границы полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенный относительно оси разреза. Предполагается, что пьезокерамическая полуплоскость граничит с вакуумом и предварительная поляризация имеет направление или параллельное, или перпендикулярное к границе полуплоскости. Граница полуплоскости имеет электродное покрытие с коротким замыканием или это покрытие отсутствует. Предполагается также, что на горизонтальной границе вне штампа и в разрезе действует нормальное давление. Все задачи рассматриваются для плоского деформированного состояния. В качестве основных неизвестных функций выбраны упругие перемещения и электрический потенциал.

Решения задач представлены в виде суммы двух интегралов Фурье. Определение произвольных функций интегрирования в конечном счете сводится сперва к решению парных или тройных интегральных уравнений или системы из таких уравнений, а затем к решению интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость последнего уравнения. Получены аналитические формулы для компонентов тензора механического напряжения и вектора электрического потенциала под штампом и на линии продолжения разреза с выделенной корневой особенностью. Получены также формулы для коэффициентов интенсивности этих компонентов на краях штампа и разреза. Проведен численный анализ и построены графики для этих компонентов.

Рассмотрен класс контактных задач теории электроупругости для пьезокерамической полуплоскости, когда полуплоскость ослаблена:

(a) находящимся на конечном расстоянии от границы полубесконечным вертикальным разрезом,

(b) выходящим на границу конечным вертикальным разрезом,

(c) внутренним конечным вертикальным разрезом.

На конечном участке границы полуплоскости приложен жесткий штамп с основанием произвольной гладкой формы, симметрично расположенный относительно оси разреза. Предполагается, что на горизонтальной границе вне штампа и в разрезе действует нормальное давление. Принимается также, что пьезокерамическая полуплоскость граничит с вакуумом и предварительная поляризация имеет направление или параллельное, или перпендикулярное к границе полуплоскости и совпадает с положитель-

ным направлением оси Oz . Граница полуплоскости имеет электродное покрытие с коротким замыканием, или это покрытие отсутствует.

Все задачи рассматриваются в плоском деформированном состоянии. Так как все задачи симметричны относительно оси разреза, то можно ограничиться рассмотрением только правого квадранта.

Решение поставленной статической задачи электроупругости, когда за независимые переменные принимаются упругие перемещения $U = iU_x + kU_z$ и электростатический потенциал $\Psi(x, z)$, сводится к интегрированию следующей системы из трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [1]:

$$\begin{aligned} C_{44}^E \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + C_{33}^E \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + (C_{13}^E + C_{44}^E) \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} &= -e_{15} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - e_{33} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ C_{11}^E \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + C_{44}^E \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} + (C_{13}^E + C_{44}^E) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial z} &= -(e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \\ \epsilon_{11}^s \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \epsilon_{33}^s \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} &= e_{15} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

при следующих граничных условиях [2] (предполагается, что направление предварительной поляризации перпендикулярно к оси разреза $z = 0$ и горизонтальная граница $x = 0$ полуплоскости не имеет электродного покрытия):

$$D_x(0, z) = 0, \quad \tau_{zx}(0, z) = 0 \quad (0 < z < \infty) \quad (2)$$

$$\Psi(x, 0) = 0, \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \infty) \quad (3)$$

$$U_x(0, z) = f_1(z) \quad (0 \leq z \leq a), \quad \sigma_x(0, z) = f_2(z) \quad (a < z < \infty) \quad (4)$$

$$(a) U_z(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq b), \quad \sigma_z(x, 0) = f_3(x) \quad (b < x < \infty) \quad (5)$$

$$(b) U_z(x, 0) = 0 \quad (b \leq x \leq \infty), \quad \sigma_z(x, 0) = f_4(x) \quad (0 < x < b) \quad (6)$$

$$(c) U_z(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq b, c \leq x < \infty), \quad \sigma_z(x, 0) = f_5(x) \quad (b < x < c) \quad (7)$$

где $\sigma_x, \sigma_z, \sigma_{xz}$ – компоненты тензора механических напряжений, U_x, U_z – проекции вектора упругих перемещений D_x, D_z – компоненты вектора электрической индукции, Ψ – электростатический потенциал. Решение ищем в виде суммы интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} C_{11}^E U_x(x, z) &= \int_0^\infty \alpha \bar{U}(\alpha, z) \cos \alpha x dx - \int_0^\infty \beta \bar{U}^*(\beta, x) \cos \beta z d\beta \\ C_{44}^E U_z(x, z) &= \int_0^\infty \alpha \bar{W}(\alpha, z) \cos \alpha x dx - \int_0^\infty \beta \bar{W}^*(\beta, x) \cos \beta z d\beta \\ e_{15} \Psi(x, z) &= - \int_0^\infty \alpha \bar{\Psi}(\alpha, z) \cos \alpha x dx - \int_0^\infty \beta \bar{\Psi}^*(\beta, x) \cos \beta z d\beta \quad (0 < x < \infty, 0 < z < \infty) \end{aligned} \quad (8)$$

Затухающие на бесконечности неизвестные плотности интегралов Фурье, представляются в виде:

$$\begin{aligned} \bar{U}(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 t_j \Delta_1(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z}, & \bar{U}^*(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_1(t_k) B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} \\ \bar{W}(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 \Delta_2(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z}, & \bar{W}^*(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \Delta_2(t_k) B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} \\ \bar{\Psi}(\alpha, x) &= \sum_{j=1}^3 \Delta_3(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z}, & \bar{\Psi}^*(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $A_j(\alpha)$ и $B_k(\beta)$ – неизвестные функции интегрирования, которые необходимо определить из граничных условий (2)–(7), t_k^2 – корни кубического уравнения

$$\Delta_1(t_k) = x t_k^2 + x_1, \quad \Delta_2(t_k) = \eta t_k^4 + \eta_1 t_k^2 + 1, \quad \Delta_3(t_k) = v t_k^4 + v_1 t_k^2 + 1 \quad (10)$$

$$x = \left(\frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \frac{C_{33}^E}{C_{44}^E} - \left(\frac{C_{13}^E}{C_{44}^E} + 1 \right) \frac{e_{33}}{e_{15}}, \quad x_1 = \frac{C_{13}^E}{C_{44}^E} - \frac{e_{31}}{e_{15}}$$

$$\eta = \frac{C_{44}^E e_{33}}{C_{11}^E e_{15}}, \quad \eta_1 = \left(\frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \left(\frac{C_{13}^E}{C_{11}^E} + \frac{C_{44}^E}{C_{11}^E} \right) - \frac{C_{44}^E}{C_{11}^E} - \frac{e_{33}}{e_{15}} \quad (11)$$

$$v = \frac{C_{33}^E}{C_{11}^E}, \quad v_1 = \left(\frac{C_{31}^E}{C_{44}^E} + 1 \right) \left(\frac{C_{13}^E}{C_{11}^E} + \frac{C_{44}^E}{C_{11}^E} \right) - \frac{C_{44}^E}{C_{11}^E} - \frac{C_{33}^E}{C_{44}^E}$$

$$t^6 - P t^4 + Q t^2 - R = 0 \quad (12)$$

$$P = \left(\frac{e_{33}}{C_{44}^E} \eta + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\varepsilon_{31}}{C_{11}^E} + \frac{\varepsilon_{15}}{C_{11}^E} \right) x - \frac{e_{33}}{C_{44}^E} \eta_1 - \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} v_1 + \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \right]$$

$$Q = \left(\frac{e_{33}}{C_{44}^E} \eta + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \right)^{-1} \left[\frac{e_{33}}{C_{44}^E} + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} - \left(\frac{e_{31}}{C_{11}^E} + \frac{e_{15}}{C_{11}^E} \right) x_1 - \frac{e_{15}}{C_{11}^E} \eta_1 - \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} v_1 \right] \quad (13)$$

$$R = \left(\frac{e_{33}}{C_{44}^E} \eta + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \right)^{-1} \left(\frac{e_{15}}{C_{44}^E} + \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \right)$$

где $C_{11}^E, C_{13}^E, C_{33}^E, C_{44}^E$ – модули упругости материала при нулевом электрическом поле, e_{11}, e_{33}, e_{15} – пьезомодули, $\varepsilon_{11}^s, \varepsilon_{33}^s$ – диэлектрические проницаемости при нулевой деформации.

Отметим, что относительно t^2 кубическое уравнение (12) имеет в общем случае один действительный и два комплексно-сопряженных корня. Для пьезокерамики марки PZT-4 корни уравнения (12) с положительной действительной частью следующие: $t_1 = 1.204$, $t_{2,3} = 1.069 \pm 0.2i$ ($\text{Re}t_k > 0$). Используя основные соотношения теории электроупругости [1] и учитывая (8), (9), можно все компоненты электроупругого поля выразить через $A_j(\alpha)$ и $B_k(\beta)$:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, z) &= \int_0^\infty \alpha^2 \bar{\sigma}_x(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^\infty \beta^2 \bar{\sigma}_x^*(\beta, x) \sin \beta z d\beta \\ \sigma_z(x, z) &= \int_0^\infty \alpha^2 \bar{\sigma}_z(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^\infty \beta^2 \bar{\sigma}_z^*(\beta, x) \sin \beta z d\beta \\ \tau_{zx}(x, z) &= - \int_0^\infty \alpha^2 \bar{\tau}_{zx}(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha - \int_0^\infty \beta^2 \bar{\tau}_{zx}^*(\beta, x) \cos \beta z d\beta \\ \frac{C_{11}^E}{e_{15}} D_x(x, z) &= - \int_0^\infty \alpha^2 \bar{D}_x(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha - \int_0^\infty \beta^2 \bar{D}_x^*(\beta, x) \cos \beta z d\beta \\ \frac{C_{11}^E}{e_{15}} D_z(x, z) &= - \int_0^\infty \alpha^2 \bar{D}_z(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha + \int_0^\infty \beta^2 \bar{D}_z^*(\beta, x) \sin \beta z d\beta \\ e_{15} E_z(x, z) &= - \int_0^\infty \alpha^2 \bar{E}_z(\alpha, z) \cos \alpha x d\alpha - \int_0^\infty \beta^2 \bar{E}_z^*(\beta, x) \sin \beta z d\beta \\ e_{15} E_x(x, z) &= - \int_0^\infty \alpha^2 \bar{E}_x(\alpha, z) \sin \alpha x d\alpha - \int_0^\infty \beta^2 \bar{E}_x^*(\beta, x) \cos \beta z d\beta \\ \bar{\sigma}_x(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 t_j \left[\Delta_1(t_j) - \frac{C_{13}^E}{C_{44}^E} \Delta_2(t_j) + \frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z} \\ \bar{\sigma}_x^*(\beta, x) &= \sum_{k=1}^3 \left[\Delta_1(t_k) - \frac{C_{13}^E}{C_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} \\ \bar{\sigma}_z(\alpha, z) &= \sum_{j=1}^3 t_j \left[\frac{C_{13}^E}{C_{11}^E} \Delta_1(t_j) - \frac{C_{33}^E}{C_{44}^E} \Delta_2(t_j) + \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] B_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z} \\ \bar{\sigma}_z^*(\beta, z) &= \sum_{k=1}^3 \left[\frac{C_{13}^E}{C_{11}^E} \Delta_1(t_k) - \frac{C_{33}^E}{C_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{33}}{e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\bar{\tau}_{zx}(\alpha, z) = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{C_{44}^E}{C_{11}^E} \Delta_1(t_j) t_j^2 + \Delta_2(t_j) - \Delta_3(t_j) \right] A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z} \quad (15)$$

$$\bar{\tau}_{zx}^*(\beta, x) = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{C_{44}^E}{C_{11}^E} \Delta_1(t_k) t_k^2 + \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} - \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k} \right] B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}}$$

$$\bar{D}_x(\alpha, z) = \sum_{j=1}^3 \left[\Delta_1(t_j) t_j^2 + \frac{C_{11}^E}{C_{44}^E} \Delta_2(t_j) + \frac{C_{11}^E \epsilon_{11}^s}{e_{15} e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z}$$

$$\bar{D}_x^*(\beta, x) = \sum_{k=1}^3 \left[\Delta_1(t_k) t_k^2 + \frac{C_{11}^E}{C_{44}^E} \frac{\Delta_2(t_k)}{t_k} + \frac{C_{11}^E \epsilon_{11}^s}{e_{15} e_{15}} \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k} \right] B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}}$$

$$\bar{D}_z(\alpha, z) = \sum_{j=1}^3 t_j \left[\frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_1(t_j) - \frac{C_{11}^E e_{33}}{C_{44}^E e_{15}} \Delta_2(t_j) - \frac{C_{11}^E \epsilon_{33}^s}{e_{15} e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z}$$

$$\bar{D}_z^*(\beta, x) = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_1(t_k) - \frac{C_{11}^E e_{33}}{C_{44}^E e_{15}} \Delta_2(t_k) - \frac{C_{11}^E \epsilon_{33}^s}{e_{15} e_{15}} \Delta_3(t_k) \right] B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}}$$

$$\bar{E}_x(\alpha, z) = \sum_{j=1}^3 \Delta_3(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z}, \quad \bar{E}_x^*(\beta, x) = \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_3(t_k)}{t_k} B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}}$$

$$\bar{E}_z(\alpha, z) = \sum_{j=1}^3 t_j \Delta_3(t_j) A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z}, \quad \bar{E}_z^*(\beta, x) = \sum_{k=1}^3 \Delta_3(t_k) B_k(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}}$$

где $E_x(x, z)$, $E_z(x, z)$ – компоненты вектора напряженности электрического поля.

Удовлетворяя условиям (2) и (3), получаем

$$B_k(\beta) = c_k B_1(\beta) \quad (16)$$

$$A_j(\alpha) = d_j A_1(\alpha) + \frac{2}{\pi \alpha} \sum_{k=1}^3 P_j^{(k)} c_k \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^{-2}} d\beta \quad (17)$$

$$c_1 = 1, \quad (b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}) c_2 = b_{13} b_{21} - b_{11} b_{23}, \quad (b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}) c_3 = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}$$

$$b_{1k} = \Delta_1(t_k) t_k + \frac{C_{11}^E}{C_{44}^E} \Delta_2(t_k) t_k^{-1} + \frac{C_{11}^E \epsilon_{11}^s}{e_{15} e_{15}} \Delta_3(t_k) t_k^{-1}$$

$$b_{2k} = \frac{C_{44}^E}{C_{11}^E} \Delta_1(t_k) t_k + \Delta_2(t_k) t_k^{-1} - \Delta_3(t_k) t_k^{-1} \quad (18)$$

$$d_1 = 1, \quad \delta_0 d_2 = a_{11} \Delta_3(t_3) - a_{13} \Delta_3(t_1), \quad \delta_0 d_3 = a_{12} \Delta_3(t_1) - a_{11} \Delta_3(t_2), \quad P_1^{(k)} = 0$$

$$\delta_0 P_2^{(k)} = b_{4k}, \quad \delta_0 P_3^{(k)} = b_{5ki}, \quad \delta_0 = a_{13}\Delta_3(t_2) - a_{12}\Delta_3(t_3)$$

$$b_{4k} = \Delta_3(t_3)b_{2k} - a_{13}\Delta_3(t_3)t_k^{-1}, \quad b_{5k} = a_{12}\Delta_3(t_3)t_k^{-1} - \Delta_3(t_2)b_{2k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Учитывая (16) и удовлетворяя смешанным граничным условиям (4), получаем следующие парные интегральные уравнения:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) \sin \beta z d\beta = -\frac{C_{11}^E}{n_{11}} f_1(z) & (0 \leq z \leq a) \\ \int_0^{\infty} \beta^2 B_1(\beta) \sin \beta z d\beta = \frac{1}{n_{12}} f_2(z) - \frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^3 a_{1j} \int_0^{\infty} \alpha^2 A_j(\alpha) e^{-\alpha t_j z} d\alpha & (0 < z < \infty) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} n_{11} &= \sum_{k=1}^3 t_k \Delta_1(t_k) c_k, & n_{12} &= \sum_{k=1}^3 b_{3k} c_k \quad (k, j = 1, 2, 3) \\ b_{3k} &= \Delta_1(t_k) - \frac{C_{13}^E}{C_{44}^E} \Delta_2(t_k) + \frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_3(t_k), & a_{1j} &= t_j \left[\Delta_1(t_j) - \frac{C_{13}^E}{C_{44}^E} \Delta_2(t_j) + \frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_3(t_j) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Далее, имея в виду (16) и (17), удовлетворяя смешанным граничным условиям (5), (6), соответственно получаем следующие парные интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \alpha A_1(\alpha) \cos \alpha x d\alpha &= \sum_{k=1}^3 m_{21}^{(k)} c_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) e^{-\beta t_k^{-1} x} d\beta \quad (0 \leq x \leq b) \\ (a) \int_0^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha) \cos \alpha x d\alpha &= \frac{1}{m_{22}} f_3(x) - \frac{2}{\pi m_{22}} \sum_{k=1}^3 m_{13}^{(k)} c_k \int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^{-2}} d\beta \quad (b < x < \infty) \\ (e) \int_0^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha) \cos \alpha x d\alpha &= \frac{1}{m_{22}} f_4(x) - \frac{2}{\pi m_{22}} \sum_{k=1}^3 m_{13}^{(k)} c_k \int_0^{\infty} \alpha \cos \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^{-2}} d\beta \quad (0 < x < b) \\ \int_0^{\infty} \alpha A_1(\alpha) \cos \alpha x d\alpha &= \sum_{k=1}^3 m_{21}^{(k)} c_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) e^{-\beta t_k^{-1} x} d\beta \quad (b \leq x < \infty) \end{aligned} \quad (21)$$

Далее удовлетворяя условиям (7), получаем следующие тройные интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} (c) \int_0^{\infty} \alpha A_1(\alpha) \cos \alpha x d\alpha &= \sum_{k=1}^3 m_{21}^{(k)} c_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) e^{-\beta t_k^{-1} x} d\beta \quad (0 \leq x \leq b) \cup (c \leq x < \infty) \\ \int_0^{\infty} \alpha^2 A_1(\alpha) \cos \alpha x d\alpha &= f_5(x) \quad (b < x < c) \end{aligned} \quad (23)$$

Решая парные уравнения (19), (21) и (22) методом преобразующих операторов [4, 5], получаем

$$B_1(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^a r \varphi_1(r) J_0(\beta r) dr + \frac{2}{\pi\beta} \int_a^\infty r [\varphi_2(r) + F_1(r)] J_0(\beta r) dr \quad (24)$$

$$(a) A_1(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha} \int_0^b \Psi_1(t) J_1(\alpha t) dt + \frac{2}{\pi\alpha} \int_b^\infty [\varphi_3(t) + \Psi_2(t)] J_1(\alpha t) dt \quad (25)$$

$$(e) A_1(\alpha) = \frac{2}{\pi\alpha} \int_0^b t [\varphi_3^*(t) + \Psi_1^*(t)] J_0(\alpha t) dt + \frac{2}{\pi\alpha} \int_b^\infty t \Psi_2^*(t) J_0(\alpha t) dt \quad (26)$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{C_{11}^E}{rn_{11}} \int_0^r \frac{z f_1(z)}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz, \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{n_{12}} \int_r^\infty \frac{f_2(z)}{\sqrt{z^2 - r^2}} dz$$

$$\varphi_3(t) = -\frac{1}{m_{22}} \int_t^\infty \frac{x f_3(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx, \quad \varphi_3^*(t) = \frac{1}{m_{22}} \int_0^t \frac{f_4(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx$$

$$F_1(r) = -\frac{1}{n_{12}} \sum_{j=1}^3 a_{1j} \int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha) K_0(\alpha t_j r) d\alpha, \quad \Psi_1^*(t) = -\frac{1}{m_{22}} \sum_{k=1}^3 m_{13}^{(k)} c_k \int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta) K_0(\beta t_k^{-1} t) d\beta \quad (27)$$

$$\Psi_1(t) = -t \sum_{k=1}^3 m_{21}^{(k)} c_k t_k^{-1} \int_0^\infty \beta^2 \left[I_1(\beta t_k^{-1} t) - L_1(\beta t_k^{-1} t) - \frac{2}{\pi} \right] B_1(\beta) d\beta$$

$$\Psi_2(t) = \frac{\pi t}{2m_{22}} \sum_{k=1}^3 m_{13}^{(k)} c_k \int_0^\infty \beta^2 \left[I_1(\beta t_k^{-1} t) - L_1(\beta t_k^{-1} t) - \frac{2}{\pi} \right] B_1(\beta) d\beta$$

$$\Psi_2^*(t) = \sum_{k=1}^3 m_{21}^{(k)} c_k t_k^{-1} \int_0^\infty \beta^2 B_1(\beta) K_0(\beta t_k^{-1} t) d\beta$$

Здесь $J_\nu(j)$ – функция Бесселя первого рода с действительного аргумента, $K_0(j)$ – функция Макдональда, $I_\nu(j)$ – функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, $L_\nu(j)$ – функция Струве от мнимого аргумента.

При получении (24), (25) и (26) использованы значения следующих интегралов [3]:

$$\int_0^r \frac{z \sin \beta z}{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = \frac{\pi}{2} r J_1(\beta r), \quad \int_r^\infty \frac{\sin \beta z}{\sqrt{z^2 - r^2}} dz = \frac{\pi}{2} J_0(\beta r)$$

$$\int_r^\infty \frac{e^{-\alpha t z}}{\sqrt{z^2 - r^2}} dz = K_0(\alpha t_j r), \quad \int_0^t \frac{e^{-\beta x t_k^{-1}}}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \left[I_0\left(\frac{\beta t}{t_k}\right) - L_0\left(\frac{\beta t}{t_k}\right) \right] \quad (28)$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha J_1(\alpha t)}{\alpha^2 t_k^2 + \beta^2} d\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{1}{t_k^2} \left[L_1\left(\frac{\beta t}{t_k}\right) + \frac{2}{\pi} - I_1\left(\frac{\beta t}{t_k}\right) \right]$$

Имея в виду (17), (27) и исключая $A_1(\alpha)$ из (24) и (25) (или (26)), для определения $G(\beta) = \beta B_1(\beta)$ получаем следующие интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода.

$$G(\beta) = \Omega(\beta) + \int_0^{\infty} K(\beta, \gamma) G(\gamma) d\gamma \quad (29)$$

$$(a) \quad \Omega(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^a r \varphi_1(r) J_0(\beta r) dr + \quad (30)$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_a^{\infty} r \left[\varphi_2(r) - \frac{2}{\pi n_{12}} \sum_{j=1}^3 a_{1j} d_j \int_0^{\infty} \alpha K_0(\alpha t, r) d\alpha \int_b^{\infty} \varphi_3(t) J_1(\alpha t) dt \right] J_0(\beta r) dr$$

$$K(\beta, \gamma) = \frac{\varphi \gamma}{\pi^2 n_{12}} \sum_{j=1}^3 a_{1j} \sum_{k=1}^3 c_k \int_a^{\infty} r J_0(\beta r) dr \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \alpha \left\{ d_j m_{21}^{(k)} t_k^{-1} \int_0^b t \left[I_1\left(\frac{\gamma t}{t_k}\right) - L_1\left(\frac{\gamma t}{t_k}\right) - \frac{2}{\pi} \right] J_1(\alpha t) dt - \frac{\pi d_j}{2 m_{22}} \times \quad (31)$$

$$\times m_{13}^{(k)} \int_b^{\infty} t \left[I_1\left(\frac{\gamma t}{t_k}\right) - L_1\left(\frac{\gamma t}{t_k}\right) - \frac{2}{\pi} \right] J_1(\alpha t) dt - \frac{P_j^{(k)}}{\alpha^2 + \gamma^2 t_k^{-1}} \right\} K_0(\alpha t, r) d\alpha$$

$$(e) \quad \Omega(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^a r \varphi_1(r) J_0(\beta r) dr + \frac{2}{\pi} \int_a^{\infty} r \left[\varphi_2(r) - \frac{2}{\pi n_{12}} \sum_{j=1}^3 a_{1j} d_j \int_0^b \frac{\varphi_3^*(t)}{t^2 + t_j^2 r^2} dt \right] J_0(\beta r) dr \quad (32)$$

$$K(\beta, \gamma) = \frac{\varphi \gamma}{\pi^2 n_{12}} \sum_{j=1}^3 a_{1j} \sum_{k=1}^3 c_k \int_a^{\infty} r \left\{ \frac{d_j m_{13}^{(k)} t}{m_{22}} \int_0^b \frac{t K_0(\gamma t t_k^{-1})}{t^2 + t_j^2 r^2} dt - \quad (33)$$

$$- d_j m_{21}^{(k)} \int_b^{\infty} \frac{t K_0(\gamma t t_k^{-1})}{t^2 + t_j^2 r^2} dt - P_j^{(k)} \int_0^{\infty} \frac{\alpha K_0(\alpha t, r)}{\alpha^2 + \gamma^2 t_k^{-1}} d\alpha \right\} J_0(\beta r) dr$$

Используя результаты [6], доказана разрешимость уравнения (29) для пьезокерамика PZT-4. Решая уравнения (29), определяем $G(\beta) = \beta B_1(\beta)$, далее по формулам (27), (26), (25), (17) и (16) определяем все искомые функции.

Используя формулы (15), (16), (9) и (8) можно определить все компоненты сопряженного электроупругого поля в любой точке полуплоскости.

В частности, нормальные напряжения под штампом и вертикальные перемещения вне штампа на горизонтальной границе определяются по формулам

$$\sigma_x(0, z) = \frac{\alpha n_{12}}{\pi} z \frac{\varphi_1(a) - \varphi_2(a) - F_1(a)}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{2}{\pi} n_{12} z \int_z^a \frac{\varphi_1'(r)}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr - \quad (34)$$

$$- \frac{2 n_{12} z}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{[\varphi_2'(r) - F_1'(r)]}{\sqrt{r^2 - z^2}} dr + \sum_{j=1}^3 a_{1j} \int_0^{\infty} \alpha^2 A_j(\alpha) e^{-\alpha_j z} d\alpha \quad (0 < z < a)$$

$$U_x(0, z) = -\frac{2n_{11}^a}{\pi C_{110}^E} \int_0^a r \Phi_1(r) dr - \frac{2n_{11}^z}{\pi C_{110}^E} \int_0^z r [\Phi_2(r) + F_1(r)] dr \quad (a < z < \infty) \quad (35)$$

а нормальные напряжения, нормальные составляющие электрических индукций и напряженности, а также горизонтальные перемещения вертикального разреза определяются так:

$$(a) \sigma_z(x, 0) = \frac{2m_{22}\Phi_3(b) - \Psi_1(b) + \Psi_2(b)}{\pi \sqrt{b^2 - x^2}} + \frac{2m_{22}}{\pi} \left[\int_x^b \frac{\Psi_1'(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt + \int_b^\infty \frac{\Phi_3'(t) + \Psi_2'(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt \right] + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 a_{2j} \sum_{k=1}^3 P_j^{(k)} c_k \int_0^\infty \alpha \cos \alpha x d\alpha \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^{-2}} d\beta \quad (0 < x < b) \quad (36)$$

$$D_z(x, 0) = \frac{2e_{15}m_{33}\Phi_3(b) - \Psi_1(b) + \Psi_2(b)}{\pi C_{11}^E \sqrt{b^2 - x^2}} + \frac{2e_{15}m_{33}}{\pi C_{11}^E} \left[\int_x^\infty \frac{\Psi_1'(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt + \int_b^\infty \frac{\Phi_3'(t) + \Psi_2'(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt \right] + \frac{2e_{15}}{\pi C_{11j=1}^E} \sum_{j=1}^3 a_{2j} \sum_{k=1}^3 P_j^{(k)} c_k \int_0^\infty \alpha \cos \alpha x d\alpha \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^{-2}} d\beta \quad (0 < x < b) \quad (37)$$

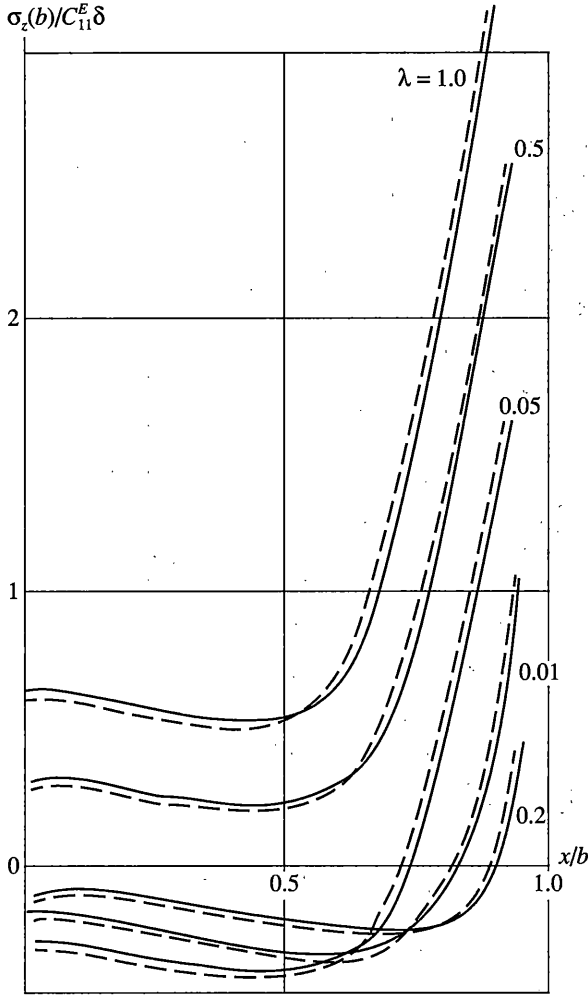
$$E_z(x, 0) = -\frac{2m_{44}\Phi_3(b) - \Psi_1(b) - \Psi_2(b)}{\pi e_{15} \sqrt{b^2 - x^2}} - \frac{2m_{44}}{\pi e_{15}} \left[\int_x^b \frac{\Psi_1'(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt + \int_b^\infty \frac{\Phi_3'(t) + \Psi_2'(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt \right] - \frac{2}{\pi e_{15}} \sum_{j=1}^3 t_j \Delta_3(t_j) \sum_{k=1}^3 P^k c_k \int_0^\infty \alpha \cos \alpha x d\alpha \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(s)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^{-2}} d\beta \quad (0 < x < b) \quad (38)$$

$$U_z(x, 0) = \frac{2m_{44}}{\pi c_{44}^E} \left\{ \int_0^b \frac{t \Psi_1(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}(x + \sqrt{t^2 - t^2})} dt + \int_0^x \frac{t [\Phi_3(t) + \Psi_2(t)]}{\sqrt{x^2 - t^2}(x + \sqrt{x^2 - t^2})} dt + \int_x^\infty \frac{[\Phi_3(t) + \Psi_2(t)] \cos(\arcsin x(t))}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt \right\} + \frac{1}{c_{44j=1}^E} \sum_{j=1}^3 \Delta_2(t_j) \sum_{k=1}^3 P_j^{(k)} c_k t_k^2 \int_0^\infty B_1(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} d\beta \quad (b < x < \infty) \quad (39)$$

$$m_{33} = \sum_{j=1}^3 a_{3j} d_j, \quad m_{44} = \sum_{j=1}^3 t_j \Delta_3(t_j) d_j \quad (40)$$

$$a_{3j} = t_j \left[\frac{e_{31}}{e_{15}} \Delta_1(t_j) - \frac{c_{11}^E e_{33}}{c_{44}^E e_{15}} \Delta_2(t_j) - \frac{c_{11}^E e_{33}^S}{e_{15} e_{15}} \Delta_3(t_j) \right]$$

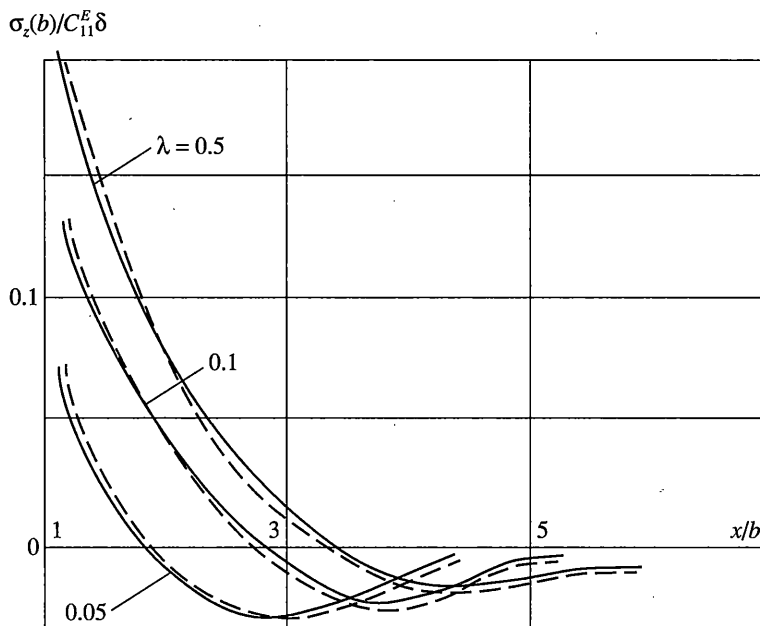
$$(б) \sigma_z(x, 0) = -\frac{2m_{22}x[\Phi_3^*(b) + \Psi_1^*(b) - \Psi_2^*(b)]}{\sqrt{x^2 - b^2}} + \frac{2m_{22}x}{\pi} \left\{ \int_0^b \frac{[\Phi_3^*(t)]' + [\Phi_1^*(t)]'}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt + \int_b^x \frac{[\Psi_2^*(t)]'}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt \right\} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^3 a_{2j} \sum_{k=1}^3 P_j^{(k)} c_k \int_0^\infty \alpha \cos \alpha x d\alpha \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^{-2}} d\beta \quad (b < x < \infty) \quad (41)$$



Фиг. 1

$$D_z(x, 0) = -\frac{2e_{15}m_{22}\varphi_3^*(b) + \Psi_1^*(b) - \Psi_2^*(b)}{\pi C_{11}^E \sqrt{x^2 - b^2}} + \frac{2e_{15}m_{33}x}{\pi C_{11}^E} \left\{ \int_0^b \frac{[\varphi_3^*(t)]' + [\Psi_1^*(t)]'}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt + \int_b^x \frac{[\Psi_2^*(t)]'}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt \right\} + \frac{2e_{15}}{\pi C_{11}^E} \sum_{j=1}^3 a_{3j} \sum_{k=1}^3 P_j^{(k)} c_k \int_0^\infty \alpha \cos \alpha x d\alpha \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^2} d\beta \quad (b < x < \infty) \quad (42)$$

$$E_z(x, 0) = \frac{2m_{44}x\varphi_3^*(b) + \Psi_1^*(b) - \Psi_2^*(b)}{\pi e_{15} \sqrt{x^2 - b^2}} - \frac{2m_{44}x}{\pi e_{15}} \left\{ \int_0^b \frac{[\varphi_3^*(t)]' + [\Psi_1^*(t)]'}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt + \int_b^x \frac{[\Psi_2^*(t)]'}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt \right\} - \frac{2}{\pi e_{15}} \sum_{j=1}^3 t_j \Delta_3(t_j) \sum_{k=1}^3 P_j^{(k)} c_k \int_0^\infty \alpha \cos \alpha x d\alpha \int_0^\infty \frac{\beta^2 B_1(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 t_k^2} d\beta \quad (b < x < \infty) \quad (43)$$



Фиг. 2

$$\begin{aligned}
 U_z(x, 0) = & \frac{2m_{11}}{\pi C_{44}^E} \left\{ \int_0^d \frac{t[\Phi_3^* + \Psi_1^*(t)]}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt + \int_d^\infty \frac{t\Psi_2^*(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt \right\} + \\
 & + \frac{1}{C_{44j=1}^E} \sum_{j=1}^3 \Delta_2(t_j) \sum_{k=1}^3 P_j^{(k)} c_k t_r^2 \int_0^\alpha B_1(\beta) e^{-\beta x t_k^{-1}} d\beta \quad (0 \leq x \leq b)
 \end{aligned} \tag{44}$$

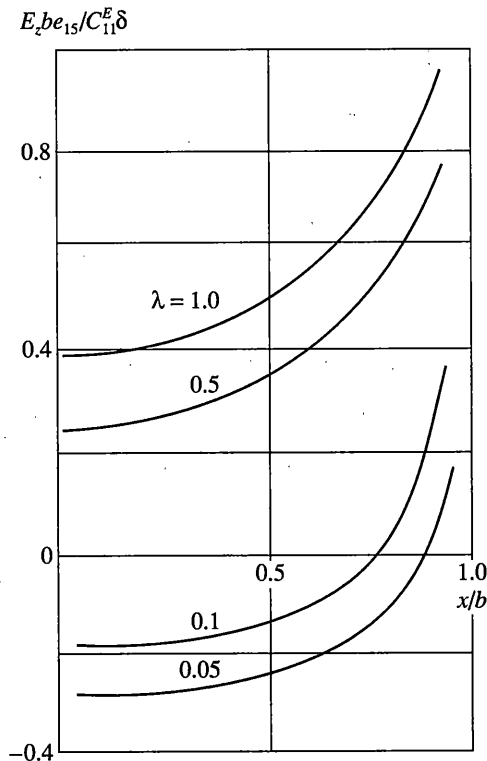
В качестве примера рассмотрим

$$f_1(z) = \delta = \text{const}, \quad f_2(z) \equiv 0, \quad f_3(x) \equiv 0 \tag{45}$$

Некоторые значения нормальных напряжений и электрической напряженности вычислены по формулам (34)–(43) в различных точках вертикальной оси полуплоскости в зависимости от $\lambda = a/b$ и эпюры этих величин для пьезокерамики PZT-4 приведены на фиг. 1–3. Следует отметить, что эти эпюры составлены приблизительно на основании расчетов, произведенных только для нескольких точек оси. На этих фигурах сплошные линии соответствуют значениям этих величин с учетом пьезоэффекта, а штриховые линии – без учета пьезоэффекта.

Для решения тройных интегральных уравнений (23) преобразуем его к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \alpha A_1(\alpha) c_u d\alpha &= \sum_{k=1}^3 m_{21}^{(k)} c_k \int_0^\infty \beta B_1(\beta) e^{\beta t_k^{-1} x} d\beta \quad (0 \leq x \leq b) \\
 \int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha) c_u d\alpha &= f_5(x) \quad (b < x < c)
 \end{aligned} \tag{46}$$



Фиг. 3

$$\int_0^{\infty} \alpha (A_1(\alpha) + \varphi_6(\alpha)) c_n d\alpha = 0 \quad (c \leq x < \infty)$$

$$\varphi_6(\alpha) = \frac{2}{\pi \alpha} \int_c^{\infty} f_6(x) c_n dx \quad (47)$$

$$f_6(x) = \sum_{k=1}^3 m_{21}^{(k)} c_k \int_0^{\infty} \beta B_1(\beta) e^{\beta r_k^{-1} x} d\beta \quad (48)$$

Используя результат [7], решение (46) ищем в виде

$$A_1(\alpha) + \varphi_6(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n Y_{2n+1}(c\alpha) \quad (49)$$

В этом случае третье уравнение [46] удовлетворяется тождественно, а для определения A_1 используем парные ряды уравнения, которые решаются точно [8].

Далее, аналогичным образом, решение поставленной задачи приведено к решению интегрального уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость этого уравнения.

Аналогичным образом решаются все поставленные задачи, когда направление предварительной поляризации перпендикулярно к границе полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость, Киев: Наук. думка, 1989. 230 с.
2. Улитко А.Ф. О некоторых особенностях постановки граничных задач электроупругости // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 290–300.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М.: Наука, 1971. 1100 с.
4. Тоноян В.С. О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением // Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т. 21. № 3. С. 3–18.
5. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Контактная задача для полуплоскости с внутренним вертикальным конечным разрезом. Докл. АН АрмССР. 1977. Т. 65. № 2. С. 122–127.
6. Тоноян В.С., Мелкумян С.А. Симметричная контактная задача для ортотропной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом // Докл. АН АрмССР. 1991. Т. 92. № 3. С. 133–137.
7. Мелкумян С.А. Симметричная контактная задача электроупругости для пьезокерамической полуплоскости с внутренним вертикальным конечным разрезом, при наличии заряженного электрода под штампом // Сборник научных трудов конференции, посвященной 90-летию со дня рождения профессоров Т.Т. Хачатряна и О.М. Сапонджяна. Ереван, 1999. С. 107–112.
8. Баблоян А.А. Решение некоторых парных рядов // ДАН АрмССР. 1964. Т. 39. № 3. С. 149–157.

Ереван

Поступила в редакцию
26.03.2002