

УДК 539.3

© 2004 г. С.В. БОСАКОВ

МЕТОД РИТЦА В КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Одним из наиболее распространенных типов плитных фундаментов являются прямоугольные плиты. Однако до сих пор отсутствует точное решение для прямоугольной жесткой плиты на упругом однородном изотропном полупространстве [1]. Даже для гибкой прямоугольной плиты на основании Винклера тоже не существует точного решения [2]. Основную трудность в решении этой контактной задачи вносит невозможность точно выполнить статические граничные условия на свободных краях плиты. Ниже будет показано, как использование метода Ритца позволяет обойти эту проблему.

1. Рассмотрим прямоугольную плиту размерами $2a \cdot 2b$ на упругом основании с распределительными свойствами под действием внешней, нормальной к срединной плоскости плиты нагрузки. Ставится задача определения реактивных нормальных давлений в контактной зоне плиты, ее прогибов и усилий в ней. Задача решается в традиционной линейной постановке [1] при неучете касательных реактивных напряжений в контактной зоне плиты.

Зададимся функцией прогибов прямоугольной плиты в виде двойного ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$W(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} T_r\left(\frac{x}{a}\right) T_s\left(\frac{y}{b}\right) \quad (1.1)$$

где A_{rs} – неизвестные коэффициенты, зависящие от жесткости и размеров плиты, внешней нагрузки, свойств упругого основания.

Как известно [3], система полиномов Чебышева (1.1) полна и удовлетворяет характеру прогибов плиты в рассматриваемой задаче.

Энергия изгиба плиты U определится по формуле

$$U = \frac{D}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu_p) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (1.2)$$

где D , ν_p – цилиндрическая жесткость плиты и коэффициент Пуассона материала плиты.

Энергия деформаций упругого основания A численно равна работе реактивных нормальных давлений в контактной зоне плиты [4]. Поэтому

$$A = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b p(x, y) w(x, y) dx dy \quad (1.3)$$

где $p(x, y)$ – неизвестный закон распределения реактивных давлений в контактной зоне плиты.

В дальнейшем необходимо работу реактивных давлений A выразить через квадратичную функцию от коэффициентов A_{rs} разложения (1.1). Для этого решим вспомогательное интегральное уравнение контактной задачи теории упругости [5] для прямоугольной плиты

$$A_{rs} T_r \left(\frac{x}{a} \right) T_s \left(\frac{y}{b} \right) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \int_{-a}^a \int_{-b}^b p(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (1.4)$$

где $(1 - \nu_0^2)K(x - \xi, y - \eta)/\pi E_0$ – ядро упругого основания (функция Грина) [5].

Будем считать упругое основание линейно деформируемым, для которого справедливо представление

$$K(x - \xi, y - \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{mp}^{nq}(\alpha) T_m \left(\frac{x}{a} \right) T_n \left(\frac{y}{b} \right) T_p \left(\frac{\xi}{a} \right) T_q \left(\frac{\eta}{b} \right), \quad \alpha = \frac{a}{b}. \quad (1.5)$$

Отметим, что для большинства моделей линейно деформируемого основания ядро (1.5) является функцией расстояния между точкой приложения единичной силы на поверхности основания и точкой поверхности, где определяется перемещение. Т.е.

$$K(x - \xi, y - \eta) = f(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}) \quad (1.6)$$

Для таких моделей в разложении (1.5) останутся полиномы, номера индексов которых удовлетворяют равенствам

$$m + p = \text{четному числу}, \quad n + q = \text{четному числу} \quad (1.7)$$

Т.е. m и p , n и q должны быть одновременно четными либо нечетными числами. Тогда разложение (1.5) разбивается на четыре отдельных ряда, каждый из которых удовлетворяет условиям симметрии или антисимметрии относительно одной или двух осей симметрии прямоугольной плиты.

По-видимому, впервые для упругого основания в виде изотропного однородного полупространства представление (1.5) получено в [6]. Запишем интегральное представление для симметричной части ядра (1.5) [6]

$$C_{2m, 2q}^{2n, 2q}(\alpha) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} J_{2m}(\alpha \xi \cos \varphi) J_{2n}(\xi \sin \varphi) J_{2p}(\alpha \xi \cos \varphi) J_{2q}(\xi \sin \varphi) d\varphi d\xi \quad (1.8)$$

Запишем парное произведение функций Бесселя (1.8) в таком виде

$$J_{2m}(\alpha \xi \cos \varphi) J_{2n}(\xi \sin \varphi) = J_{2m} \left(\xi \sqrt{1 + \alpha^2} \cos \varphi \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right) J_{2n} \left(\xi \sqrt{1 + \alpha^2} \sin \varphi \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right) \quad (1.9)$$

и используем представление [7] для произведения двух функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} J_{\mu}(z \cos \varphi \cos \phi) J_{\nu}(z \sin \varphi \sin \phi) &= (\cos \varphi \cos \phi)^{\mu} (\sin \varphi \sin \phi)^{\nu} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mu + \nu + 2n + 1) J_{\mu + \nu + 2n + 1}(z) \frac{\Gamma(\mu + \nu + n + 1) \Gamma(\nu + n + 1)}{n! \Gamma(\mu + n + 1) [\Gamma(\nu + 1)]^2} \times \\ &\times {}_2F_1(-n, \mu + \nu + n + 1; \nu + 1; \sin^2 \varphi) {}_2F_1(-n, \mu + \nu + n + 1; \nu + 1; \sin^2 \phi) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Если в (1.9) принять $z = \xi\sqrt{1 + \alpha^2}$, $\cos \phi = \alpha/\sqrt{1 + \alpha^2}$, $\sin \phi = 1/\sqrt{1 + \alpha^2}$ и использовать выражение (1.10), то, после аналогичной операции с другим произведением функций Бесселя в выражении (1.8), можно выполнить интегрирование по ξ и после упрощений получить более простую формулу для коэффициентов разложения (1.5). Автором настоящей статьи найдено, что представление (1.8) В.М. Сеймова [6] справедливо также для антисимметричной части ядра (1.5). Поэтому запишем окончательную формулу для коэффициентов разложения (1.5):

$$C_{m,p}^{n,q}(\alpha) = -\beta_{mp}^{nq} \frac{128}{\pi^2 \sqrt{1 + \alpha^2}} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right)^{m+p} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right)^{n+q} \times$$

$$\frac{P_k^{(q,p)} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right) P_i^{(n,m)} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right) \int_0^\pi \cos^{m+n} \varphi \sin^{n+q} \varphi P_k^{(q,p)}(\cos 2\varphi) P_i^{(n,m)}(\cos 2\varphi) d\varphi}{(2i-1-2k+m+n-p-q)(1+2i+2k+m+n-p-q)(1+2i+2k+m+n+p+q)(3+2i+2k+m+n+p+q)} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i!k!(m+n+2i+1)(m+n+i)!(q+p+2k+1)(q+p+k)!}{(m+1)!(n+1)!(q+k)!(p+k)!} \times$$

$$\times \frac{P_k^{(q,p)} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right) P_i^{(n,m)} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right) \int_0^\pi \cos^{m+n} \varphi \sin^{n+q} \varphi P_k^{(q,p)}(\cos 2\varphi) P_i^{(n,m)}(\cos 2\varphi) d\varphi}{(2i-1-2k+m+n-p-q)(1+2i+2k+m+n-p-q)(1+2i+2k+m+n+p+q)(3+2i+2k+m+n+p+q)} \quad (1.11)$$

$$\beta_{00}^{00} = 1, \quad \beta_{i0}^{00} = \beta_{00}^{i0} = \beta_{0i}^{00} = \beta_{00}^{0i} = 2, \quad \beta_{ik}^{00} = \beta_{i0}^{k0} = \beta_{00}^{ik} = \beta_{0i}^{k0} = \beta_{0i}^{0k} = \beta_{i0}^{0k} = 4$$

$$\beta_{mn}^{i0} = \beta_{0i}^{mn} = \beta_{i0}^{mn} = \beta_{mn}^{0i} = 8, \quad \beta_{ik}^{mn} = 16$$

где $P_k^{(q,p)}(\cos 2\varphi)$ – полиномы Якоби [7].

Особое значение имеют формулы для коэффициентов $C_{00}^{00}(\alpha)$ и $C_{11}^{00}(\alpha)$, которые в основном определяют перемещения прямоугольного штампа на упругом полупространстве под действием центрально приложенной силы и момента. Для них из (1.11) получено после упрощений

$$C_{00}^{00}(\alpha) = \frac{32}{\pi^2(1 + \alpha^2)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (1 + 2i)(1 + 2k) \times$$

$$\times \frac{P_i((\alpha^2 - 1)/(1 + \alpha^2)) P_k((\alpha^2 - 1)/(\alpha^2 + 1))}{(1 + 2k - 2i)(1 + 2i - 2k)(1 + 2i + 2k)(3 + 2i + 2k)} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} P_i(\cos 2\varphi) P_k(\cos 2\varphi) d\varphi \quad (1.12)$$

$$C_{11}^{00}(\alpha) = \frac{512\alpha^2}{\pi^2(1 + \alpha^2)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + i)(1 + k) P_i^{(0,1)} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right) P_k^{(0,1)} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right)}{(2k - 2i + 1)(2i - 2k + 1)(3 + 2i + 2k)(5 + 2i + 2k)} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi P_i^{(0,1)}(\cos 2\varphi) P_k^{(0,1)}(\cos 2\varphi) d\varphi$$

где $P_i(z)$ – полиномы Лежандра [7].

Для линейного u_0 и углового φ_{0y} перемещений прямоугольного штампа на упругом полупространстве можно на этом этапе получить приближенные формулы (смысл R, M_y будет раскрыт ниже):

$$u_0 = \frac{R(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0 a} C_{00}^{00}(\alpha), \quad \varphi_{0y} = \frac{M_y(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0 a^3} C_{11}^{00}(\alpha) \quad (1.13)$$

2. Будем искать распределение реактивных давлений в контактной зоне плиты в виде двойного ряда с неизвестными коэффициентами

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/a^2} \sqrt{1 - y^2/b^2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{ik} T_i\left(\frac{x}{a}\right) T_k\left(\frac{y}{b}\right) \quad (2.1)$$

Тогда, вследствие ортогональности принятых полиномов Чебышева, из уравнений равновесия прямоугольного штампа в целом можно найти

$$B_{00} = \frac{R}{\pi^2 ab}, \quad B_{10} = \frac{2M_y}{\pi^2 a^2 b}, \quad B_{10} = \frac{2M_x}{\pi^2 ab^2} \quad (2.2)$$

где R, M_y, M_x – равнодействующая внешних сил, приложенных к плите, и моменты этой равнодействующей относительно осей Ox и Oy .

Работа реактивных давлений (1.3) при представлениях (1.1) и (2.1) после интегрирования по x и y выразится формулой

$$A = \frac{ab}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{ik}^{00} B_{ik} A_{ik} \quad (2.3)$$

Далее необходимо выразить B_{ik} через A_{ik} . Для этого решим интегральное уравнение

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} T_r\left(\frac{x}{a}\right) T_s\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \int_{-a}^a \int_{-b}^b K(x - \xi, y - \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.4)$$

Подставляя в (2.4) представления (1.5) и (2.1), выполним интегрирование по ξ и η с учетом ортогональности полиномов Чебышева первого рода. В полученном выражении приравняем коэффициенты при полиномах Чебышева одинакового порядка [8]. В итоге получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений такого вида:

$$A_{00} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} b \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{ik}^{00} B_{ik} C_{0i}^{0k}(\alpha) \quad (2.5)$$

$$A_{rs} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} b \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{ik}^{00} B_{ik} C_{ri}^{sk}(\alpha)$$

Решение усеченной системы (2.5) позволяет выразить коэффициенты разложения (2.1):

$$B_{ik} = \frac{\pi E_0}{(1 - \nu_0^2) b} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_{tu} A_{t-1, u-1}, \quad \|\alpha\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \dots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \dots \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

где α_{iu} являются элементами обратной матрицы

$$\|\alpha\| = \frac{1}{\pi^2} \begin{vmatrix} C_{00}^{00} \frac{1}{2} C_{01}^{00} \frac{1}{2} C_{02}^{00} \dots \frac{1}{2} C_{00}^{01} \frac{1}{4} C_{01}^{01} \frac{1}{4} C_{02}^{10} \dots \\ C_{10}^{00} \frac{1}{2} C_{11}^{00} \frac{1}{2} C_{12}^{00} \dots \frac{1}{2} C_{10}^{01} \frac{1}{4} C_{11}^{01} \frac{1}{4} C_{12}^{01} \dots \\ C_{20}^{00} \frac{1}{2} C_{21}^{00} \frac{1}{2} C_{22}^{00} \dots \frac{1}{2} C_{20}^{01} \frac{1}{4} C_{11}^{01} \frac{1}{4} C_{12}^{01} \dots \\ \dots \\ C_{00}^{10} \frac{1}{2} C_{01}^{10} \frac{1}{2} C_{02}^{10} \dots \frac{1}{2} C_{00}^{11} \frac{1}{4} C_{01}^{11} \frac{1}{4} C_{02}^{11} \dots \\ C_{10}^{10} \frac{1}{2} C_{11}^{10} \frac{1}{2} C_{12}^{10} \dots \frac{1}{2} C_{11}^{11} \frac{1}{4} C_{12}^{11} \frac{1}{4} C_{12}^{11} \dots \\ C_{20}^{10} \frac{1}{2} C_{21}^{10} \frac{1}{2} C_{22}^{10} \dots \frac{1}{2} C_{02}^{11} \frac{1}{4} C_{21}^{11} \frac{1}{4} C_{22}^{11} \dots \\ \dots \\ C_{10}^{20} \frac{1}{2} C_{11}^{20} \frac{1}{2} C_{12}^{20} \dots \end{vmatrix}^{-1}$$

Подставим (2.6) в (2.3). Получим для работы A квадратичную функцию от $A_{r,s}$. Функционал полной энергии плиты, основания и действующей на них нагрузки определится по формуле

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi, \quad \Pi = - \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b q(x, y) w(x, y) dx dy \quad (2.7)$$

где $q(x, y)$ – действующая на плиту внешняя нагрузка.

Дифференцируем \mathcal{E} по каждому из коэффициентов $A_{r,s}$. Приравнявая нулю полученные соотношения, придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \|\delta\| = \mathbf{P} \quad (2.8)$$

$$\|\delta\| = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \dots \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \dots \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \dots \\ \dots \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \dots & A_{10} & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{20} & A_{21} & A_{22} & \dots \end{vmatrix}$$

Вектор свободных членов \mathbf{P} в (2.8) определяется видом внешней нагрузки.

3. Реализацию предлагаемого подхода проведем для квадратной плиты ($b = a$), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Итак, принимаем

$$\mathbf{A}^T = \left\| A_{00} A_{20} A_{02} A_{22} A_{40} A_{42} A_{44} A_{04} A_{24} \right\| \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B}^T = \left\| B_{00} B_{20} B_{02} B_{22} B_{40} B_{42} B_{44} B_{04} B_{24} \right\| \quad (3.2)$$

В результате получено

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \beta \alpha_{11}, \quad \delta_{12} = \beta \frac{2\alpha_{12} + \alpha_{21}}{2}, \quad \delta_{13} = \beta \frac{2\alpha_{13} + \alpha_{31}}{2}, \quad \delta_{14} = \beta \frac{2\alpha_{14} + \alpha_{41}}{2}, \quad \dots \\ \delta_{21} &= \delta_{21}, \quad \delta_{22} = \beta \alpha_{22}/2 + 64/\pi^2, \quad \delta_{23} = \beta(\alpha_{23} + \alpha_{32})/4 + 32(2 - \gamma)/\pi^2 \\ \delta_{23} &= \beta(2\alpha_{24} + \alpha_{42})/8 - 32(4 - \gamma)/(3\pi^2), \quad \dots \\ \delta_{31} &= \delta_{13}, \quad \delta_{32} = \delta_{23}, \quad \delta_{33} = \beta \alpha_{33}/2 + 64/\pi^2, \\ \delta_{34} &= \beta(2\alpha_{33} + \alpha_{43})/8 - 32(4 - \gamma)/(3\pi^2), \dots \\ \delta_{41} &= \delta_{14}, \quad \delta_{42} = \delta_{24}, \quad \delta_{43} = \delta_{34}, \quad \delta_{44} = \beta \alpha_{44}/4 + 64[42 + 5(2 + 15\gamma)]/(45\pi^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\gamma = 2 - \nu_p$$

$$\mathbf{P}^T = \frac{4qa^4}{\pi^2 D} \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} + \frac{1}{225} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} \right] \quad (3.4)$$

где $\beta = \frac{\pi E_0 a^3}{(1 - \nu_0^2) D}$ – показатель гибкости по М.И. Горбунову-Посадову [1].

После решения имеем при $\beta = 10$ для коэффициентов рядов (1.1) и (2.1)

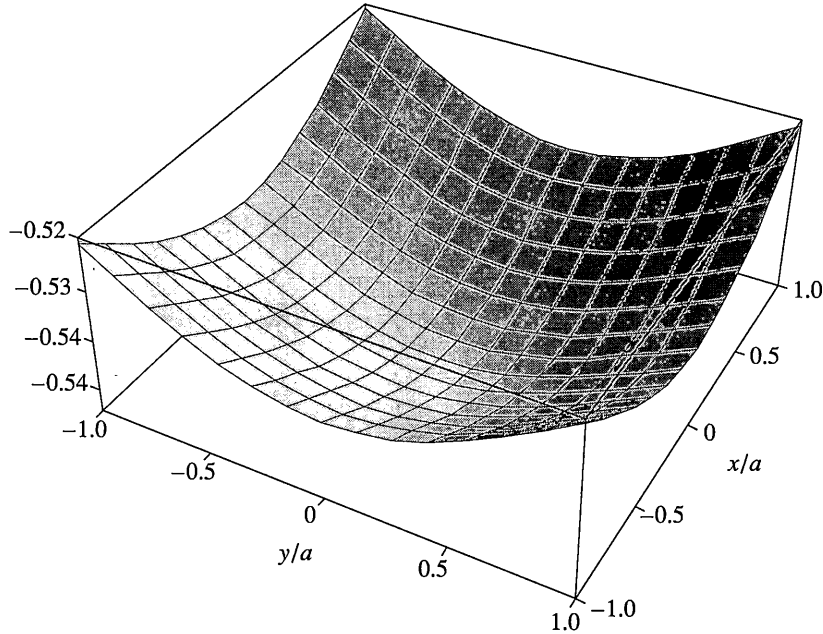
$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \\ &= \frac{qa^4}{D} \| 5.54787 - 0.023808 - 0.023808 \ 0.045441 - 0.036083 \ 0.0054167 - 0.0042283 - 0.036083 \ 0.005416 \| \\ \mathbf{B}^T &= q \| 0.405285 - 0.13509 - 0.13509 \ 0.04503 - 0.02702 \ 0.0090060 \ 0.01801 - 0.02702 \ 0.00900 \| \end{aligned}$$

На фигуре приведена поверхность прогибов квадратной плиты при действии равномерно распределенной нагрузки.

Рассмотрим подробнее случай симметрично нагруженного равномерно распределенной нагрузкой q прямоугольного штампа ($D = \infty, \beta = 0$). Из (2.8) при $\beta = 0$ сразу получаем при $R = 4qab$:

$$\frac{\pi E_0 a^3}{(1 - \nu_0^2) D} \frac{1}{\alpha_{11}} A_{00} = \frac{Ra^2}{\pi^2 D} \quad (4.1)$$

$$A_{00} = \frac{R(1 - \nu_0^2)}{\pi^3 E_{0a}} \frac{1}{\alpha_{11}} \quad (4.2)$$



Фиг. 1

где α_{11} – первый член обратной матрицы (2.6). Остальные A_{ik} равны нулю. Тогда из (2.5) имеем систему для определения коэффициентов разложения (2.1):

$$\begin{aligned}
 A_{00} &= \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} a \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2i, 2k}^{00} B_{2i, 2k} C_{0, 2i}^{0, 2k}(\alpha) \\
 0 &= \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} a \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2i, 2k}^{00} B_{2i, 2k} C_{2r, 2i}^{2s, 2k}(\alpha)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из решения этой системы следует, что распределение реактивных давлений под подошвой прямоугольного штампа определяется рядом (2.1) при $\beta = 0$. Однако, если следовать результатам [9], то

$$V_{00} = R/\pi^2 ab \tag{4.4}$$

остальные $B_{2i, 2k} = 0$. Из (4.3) результат В.М. Файнбурда [9] не следует. Поэтому результаты В.М. Файнбурда являются приближенными, так как основываются на решении усеченной системы наименьшего порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 680 с.
2. Палатников Е.А. Прямоугольная плита на упругом основании. М.: Стройиздат, 1964. 236 с.

3. Паишковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
4. *Salvadurai A.P.S.* The interaction between a uniformly loaded circular plate on an isotropic elastic halfspace: a variational approach // *J. Struc. Mech.* 1979. V. 7. № 3. P. 231–246.
5. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
6. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 283 с.
7. Бейтмен Г., Эрдрейи Ф. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 296 с.
8. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
9. Файнбурд В.М. Контактные задачи теории упругости. М.: Наука, 1975. 57 с.

Минск

Поступила в редакцию
14.05.2002