

УДК 531.36

© 2004 г. Б.Н. СОКОЛОВ

## ГАРАНТИРОВАННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ СПУТНИКА РЕЛЕЙНЫМИ РЕАКТИВНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ ПРИ АКТИВНЫХ ПОМЕХАХ

Рассматривается задача стабилизации углового положения динамически несимметричного спутника относительно заданного направления при его движении по эллиптической орбите. Предполагается, что стабилизация осуществляется релейными реактивными двигателями с запаздыванием отключения тяги, а внешние возмущения, действующие на спутник, создают ограниченный по величине момент. С использованием игрового подхода [1–3] и метода декомпозиции [4, 5] получена оценка области в пространстве возможных кинематических состояний спутника и построено позиционное управление, гарантированно обеспечивающее в этой области заданную угловую ориентацию спутника с максимальной возможной точностью. В [6–8] были рассмотрены эффективные релейные законы управления, применимые для стабилизации углового положения спутника. Решения минимаксных задач стабилизации релейными регуляторами с запаздыванием в канале переключения управления приведены в [9–12].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача стабилизации с максимальной гарантированной точностью углового положения спутника относительно Земли при его движении по эллиптической орбите. Предполагается, что стабилизация осуществляется релейными реактивными двигателями с запаздыванием отключения тяги, а внешние возмущения создают ограниченный по величине момент и заранее не известны. Положение космического аппарата будем определять относительно орбитальной (базовой) системы координат  $Ox_0y_0z_0$  с началом в центре масс спутника. Ось  $x_0$  орбитальной системы лежит в плоскости орбиты и направлена по направлению движения спутника, ось  $y_0$  направлена на Землю, а ось  $z_0$  сориентирована так, чтобы система координат стала правосторонней. Ее абсолютную угловую скорость вращения обозначим через  $\omega^0$ . Со спутником свяжем жестко систему координат  $Oxyz$  с началом в центре масс спутника и осями, совпадающими с главными осями инерции спутника. Ориентацию осей  $Oxyz$ , а тем самым и спутника, относительно базовой системы координат зададим тремя углами  $p_x, p_y, p_z$ , определяющими последовательность трех поворотов: вокруг оси  $z_0$  на угол тангажа  $p_z$  (ось  $y_0$  при этом переходит в линию узлов), вокруг линии узлов на угол рысканья  $p_y$  и вокруг оси  $x$  на угол крена  $p_x$ . Эволюция углового положения спутника относительно базовой системы координат описывается системой кинематических уравнений и динамических уравнений Эйлера.

$$\dot{p}_x = \omega_x - \omega_x^0 + [(\omega_y - \omega_y^0) \sin p_x + (\omega_z - \omega_z^0) \cos p_x] \operatorname{tg} p_y$$

$$\dot{p}_y = (\omega_y - \omega_y^0) \cos p_x - (\omega_z - \omega_z^0) \sin p_x$$

$$\dot{p}_z = [(\omega_z - \omega_z^0) \cos p_x + (\omega_y - \omega_y^0) \sin p_x] (\cos p_y)^{-1} \quad (1.1)$$

$$\dot{\omega}_\xi = i_\xi \omega_x \omega_y \omega_z \omega_\xi^{-1} + M_\xi I_\xi^{-1} + N_\xi I_\xi^{-1} \quad (\xi = x, y, z)$$

$$i_x = (I_y - I_z) I_x^{-1}, \quad i_y = (I_z - I_x) I_y^{-1}, \quad i_z = (I_x - I_y) I_z^{-1}$$

где  $\omega_\xi$  – проекция абсолютной угловой скорости спутника на оси связанной со спутником системы координат,  $\omega_\xi^0$  – проекция абсолютной угловой скорости базовой системы координат на связанные со спутником оси,  $I_\xi$  – моменты инерции спутника относительно связанной системы координат,  $M_\xi$  – проекции управляющего момента на оси  $Ox, y, z$ ,  $N_\xi$  – проекции остальных возмущающих моментов на те же оси. Введем обозначения:  $\Delta\omega_\xi = \omega_\xi - \omega_\xi^0$ ,  $\varepsilon_\xi = i_\xi \omega_x \omega_y \omega_z \omega_\xi^{-1} + N_\xi I_\xi^{-1}$ ,  $F_\xi = -\dot{\omega}_\xi^0$ ,  $u_\xi = M_\xi I_\xi^{-1}$  ( $\xi = x, y, z$ ). Функция  $F_\xi(t)$  – мало меняющаяся функция времени на характерном периоде стабилизации, поэтому можно положить  $F_\xi(t) = F_\xi = \text{const}$ . С учетом введенных обозначений динамические уравнения Эйлера (1.1) запишутся в виде

$$\Delta\dot{\omega}_\xi = F_\xi + u_\xi(t) + \varepsilon_\xi(t) \quad (1.2)$$

Здесь  $u_\xi(t)$  – управляющее воздействие, которое по условию может принимать одно из двух значений

$$u_\xi(t) = \pm u_\xi^0, \quad u_\xi^0 = M_\xi^0 I_\xi^{-1} = \text{const} > 0 \quad (1.3)$$

а  $\varepsilon_\xi(t)$  – ограниченная по величине, заранее не известная внешняя помеха

$$|\varepsilon_\xi(t)| \leq \varepsilon_\xi^0 = \text{const} > 0 \quad (1.4)$$

Предполагается, что

$$|F_\xi| + \varepsilon_\xi^0 < u_\xi^0 \quad (1.5)$$

Конструкция реактивных двигателей системы ориентации в каждом из трех каналов управления такова, что продолжительность каждого интервала постоянства тяги не менее  $\Delta t$ . При этом можно считать, что время выхода тяги на стационарный режим мало по сравнению с  $\Delta t$ . Таким образом управление релейно и

$$t_\beta - t_\alpha \geq \Delta t = \text{const} > 0 \quad (1.6)$$

где  $t_\alpha, t_\beta$  – последовательные моменты переключения двигателя на каждом канале.

Будем исследовать задачу гарантированной стабилизации при малых начальных значениях углов и угловых скоростей:  $|p_\xi(0)| \ll 1$ ,  $|\Delta\omega_\xi(0)| \ll 1$  ( $\xi = x, y, z$ ). Удерживая в правых частях кинематических уравнений слагаемые, содержащие при малых углах члены, пропорциональные этим углам, получаем систему кинематических уравнений

$$\dot{p}_x = \Delta\omega_x + \Delta\omega_z p_y, \quad \dot{p}_y = \Delta\omega_y + \Delta\omega_z p_x, \quad \dot{p}_z = \Delta\omega_z + \Delta\omega_y p_z \quad (1.7)$$

Перейдем в соотношениях (1.2)–(1.7) к безразмерным (штрихованным) переменным по формулам

$$t' = \Delta t^{-1} t, \quad p'_\xi = s_\xi (u_\xi^0 \Delta t^2)^{-1} p_\xi, \quad dp'_\xi/dt' = s_\xi (u_\xi^0 \Delta t)^{-1} \dot{p}_\xi$$

$$\omega'_\xi = s_\xi (u_\xi^0 \Delta t)^{-1} \Delta\omega_\xi, \quad d\omega'_\xi/dt' = s_\xi (u_\xi^0)^{-1} \Delta\dot{\omega}_\xi, \quad u'_\xi = s_\xi (u_\xi^0)^{-1} u_\xi$$

$$\varepsilon_\xi^{0'} = (u_\xi^0)^{-1} \varepsilon_\xi^0, \quad \varepsilon'_\xi(t) = (u_\xi^0)^{-1} \varepsilon_\xi(t), \quad F'_\xi = s_\xi (u_\xi^0)^{-1} F_\xi$$

где  $s_\xi \equiv 1$  при  $F_\xi \geq 0$ ,  $s_\xi = -1$  при  $F_\xi < 0$ . В безразмерных переменных (штрихи далее опускаем) кинематические и динамические уравнения имеют вид

$$\dot{p}_x = \omega_x + k_x \omega_z p_y, \quad \dot{p}_y = \omega_y - k_y \omega_z p_x, \quad \dot{p}_z = \omega_z + k_z \omega_y p_z \quad (1.8)$$

$$\dot{\omega}_\xi = F_\xi + u_\xi(t) + \varepsilon_\xi(t), \quad u_\xi(t) = \pm 1, \quad F_\xi \geq 0 \quad (1.9)$$

$$k_\xi = u_x^0 u_y^0 u_z^0 (u_\xi^0)^{-1} \Delta t^2 = \text{const} \ll 1$$

Неравенство (1.4) не изменится. Условие (1.6) запаздывания принимает вид

$$t_\beta - t_\alpha \geq 1 \quad (1.10)$$

В силу последнего условия состояние динамической системы (1.8), (1.9) характеризуется вектором  $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$ , где  $w_\xi = (p_\xi, \omega_\xi, \tau_\xi, n_\xi)^T$ ,  $\tau_\xi$  – время, прошедшее с момента последнего переключения управления на  $\xi$ -ом канале,  $n = u_\xi(t - \tau_\xi)$  – знак установившегося после последнего переключения управления,  $\tau$  – символ транспонирования.

Назовем допустимым любой алгоритм позиционного управления  $u(\mathbf{w}) = (u_x(\mathbf{w}), u_y(\mathbf{w}), u_z(\mathbf{w}))^T$ , если он удовлетворяет условиям (1.9), (1.10). Возмущение  $\varepsilon(t) = (\varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t), \varepsilon_z(t))^T$  будем рассматривать как противника, стремящегося сделать погрешность стабилизации как можно большей. Пусть начальное положение  $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0$  в момент  $t_0$  задано. Эффективность допустимого управления определим функционалом

$$K_1[\mathbf{w}_0, u(\cdot)] = \sup_\varepsilon \sum_\xi \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |p_\xi[t, \mathbf{w}_0, u(\cdot), \varepsilon(\cdot)]| \quad (1.11)$$

где предел берется верхний, точки в записи  $u(\cdot)$ ,  $\varepsilon(\cdot)$  означают, что рассматривается зависимость от управления как от алгоритма и от помехи как от реализации  $\varepsilon(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

**Задача 1.** Пусть начальное положение системы (1.8), (1.9) фиксировано. Требуется минимизировать функционал (1.11) на множестве допустимых управлений.

Ценой игры будет функция

$$J(\mathbf{w}_0) = \inf_u K_1[\mathbf{w}_0, u(\cdot)]$$

максимальная гарантированная точность.

Упростим условие задачи, трактуя влияние зависящих от углов слагаемых в правых частях кинематических уравнений (1.8) на движение системы как результат действия ограниченного кинематического возмущения, где величина возмущения зависит от области возможных состояний системы, а само действие направлено на увеличение погрешности стабилизации. Это позволит провести декомпозицию исходной системы уравнений и рассматривать движение по каждой координате в отдельности. Такой подход получит оправдание, если результатом стабилизации станет движение в окрестности начала координат, при котором величина второго слагаемого в каждой строке правой части кинематических уравнений (1.8) будет пренебрежимо мала по сравнению с величиной первого. Поставим в соответствие кинематическим уравнениям (1.8) уравнения

$$\dot{p}_\xi = \omega_\xi + q_\xi, \quad |q_\xi(t)| \leq Q_\xi \quad (\xi = x, y, z) \quad (1.12)$$

где  $q_\xi(t)$  – ограниченное по величине кинематическое возмущение, оценка  $Q_\xi$  которого должна зависеть от размеров области  $D$  возможных состояний системы (1.8), (1.9) в фазовом пространстве. Предположим, что в силу выбранного допустимого управления  $u(\cdot)$  динамическая система (1.9), (1.2), начав движение из произвольной точки

области  $D$ , не покидает эту область при всех допустимых реализациях динамических и кинематических возмущений, а величина  $Q_\xi$  согласована с размерами областей  $D = D_x \times D_y \times D_z$  следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_x &\geq k_x \omega_z^0 p_y, & Q_y &\geq k_y \omega_z^0 p_x, & Q_z &\geq k_z \omega_y^0 p_z \\ \omega_\xi^0 &= \max |\omega_\xi|, & p_\xi^0 &= \max |p_\xi|, & (p_\xi, \omega_\xi) &\in D_\xi \quad (\xi = x, y, z) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тогда все утверждения относительно гарантированных (т.е. выполненных при всех допустимых реализациях кинематических и динамических возмущений) свойств траекторий системы (1.9), (1.12) будут также выполнены для траекторий системы (1.8), (1.9). Это позволяет поставить в соответствие задаче 1 следующую задачу

**Задача 2.** Пусть начальное положение системы (1.9), (1.12) фиксировано. Требуется на множестве допустимых управлений минимизировать функционал

$$\begin{aligned} K_2[w_0, u(\cdot)] &= \sup_{\varepsilon} \sup_{q} \sum_{\xi} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |p_\xi[t, w_0, u(\cdot), \varepsilon(\cdot), q(\cdot)]| \\ | \varepsilon_\xi(t) | &\leq \varepsilon_\xi^0, & | q_\xi(t) | &\leq Q_\xi \end{aligned} \quad (1.14)$$

где величина  $Q_\xi$  кинематического возмущения  $q_\xi(t)$  определена формулой (1.13). В результате решения задачи 2 будет построено семейство областей

$$D^k = \prod_{\xi = x, y, z} D_\xi^k(\alpha_\xi^k, b_\xi^k, Q_\xi^k) \quad (1.15)$$

где  $(\alpha_\xi^k, Q_\xi^k)$  и  $(b_\xi^k, -Q_\xi^k)$  – координаты крайней левой и крайней правой точки области  $D_\xi^k$  в пространстве  $(p_\xi, \omega_\xi)$ , и найдено допустимое управление  $u(\cdot)$ , гарантированно переводящее систему (1.9), (1.12) из произвольной точки области  $D_\xi^k$  в область  $D_\xi^{k+1}$ .

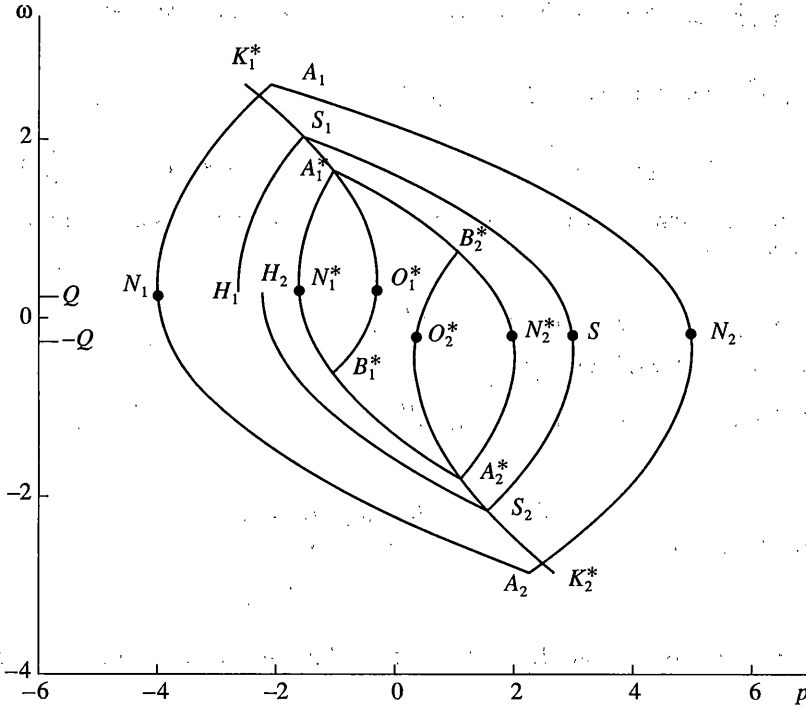
Граница области  $D_\xi^k$  и величина  $Q_\xi^k$  однозначно определены совокупностью величин  $a_\eta^k, b_\eta^k$  ( $\eta = x, y, z$ ) так, что условия (1.13) будут выполнены, а последовательность  $a_\xi^k, b_\xi^k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) будет удовлетворять условиям  $a_\xi^{k+1} > \alpha_\xi^k, b_\xi^{k+1} < b_\xi^k, b_\xi^k - \alpha_\xi^k \rightarrow \min_{u(\cdot)}$ . Последнее условие обеспечивает при выбранном стабилизационном управлении сходимость траектории системы (1.9), (1.12) к предельно допустимой неравенствами (1.4), (1.12), (1.13) области в фазовом пространстве состояний системы, что решает задачу 2.

**2. Построение областей возможных состояний системы и определение величин соответствующих кинематических возмущений.** Далее в соотношениях, справедливость которых не зависит от значений индекса  $\xi = x, y, z$ , этот индекс для сокращения записи будет опущен. Пусть  $D(a_1, a_2, Q)$  – область (фиг. 1) в пространстве  $(p, \omega)$  с границей  $\Gamma_D = \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2$ , где левая граница области задана контуром

$$\Gamma_D^1 = \begin{cases} (p = a_1 + 0.5(\omega - Q)^2 / (1 + F + \varepsilon^0), \omega), & \text{если } -Q \leq \omega \leq \omega_1 \\ (p = a_1 + 0.5(\omega - Q)^2 / (1 + F - \varepsilon^0), \omega), & \text{если } \omega_2 \leq \omega \leq Q \end{cases} \quad (2.1)$$

а правая граница – контуром

$$\Gamma_D^2 = \begin{cases} (p = a_2 - 0.5(\omega + Q)^2 / (1 - F - \varepsilon^0), \omega), & \text{если } -Q \leq \omega \leq \omega_1 \\ (p = a_2 - 0.5(\omega + Q)^2 / (1 - F + \varepsilon^0), \omega), & \text{если } \omega_2 \leq \omega \leq -Q \end{cases} \quad (2.2)$$



Фиг. 1

Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – максимальная и минимальная ординаты точек, составляющих область  $D(a_1, a_2, Q)$ :

$$\begin{aligned} \omega_1(a_2 - a_1, Q) &= -Q(F + \epsilon^0) + ((1 - (F + \epsilon^0)^2)(a_2 - a_1 - Q^2))^{1/2} \\ \omega_2(a_2 - a_1, Q) &= -Q(F - \epsilon^0) - ((1 - (F - \epsilon^0)^2)(a_2 - a_1 - Q^2))^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отвечающие этим ординатам точки области  $D(a_1, a_2, Q)$  обозначены как  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Контуры  $\Gamma_D^1$  и  $\Gamma_D^2$  образованы наиболее отклоняющимися влево траекториями системы (1.9), (1.12) в пространстве  $(p, \omega)$ , исходящими из точек  $A_2$  и  $A_1$  с абсциссами  $p_2 = a_2 - 0.5(\omega_2 + Q)^2 / (1 - F + \epsilon^0)$ ,  $p_1 = a_1 + 0.5(\omega_1 - Q)^2 / (1 + F + \epsilon^0)$  при всех допустимых реализациях динамических и кинематических возмущений в сочетании с управлением  $u(t) = 1$  и  $u(t) = -1$  соответственно. Вершины парабол, образующих контуры  $\Gamma_D^1$  и  $\Gamma_D^2$ , обозначены как  $N_1(a_1, Q)$  и  $N_2(a_2, -Q)$ , так что  $a_1(a_2)$  – абсцисса самой левой (правой) точки области  $D(a_1, a_2, Q)$  на фазовой плоскости. Предполагается, что  $Q \leq \omega_1$  (2.3), в противном случае дальнейшие построения лишены смысла. Заменяя  $\omega_1$  на его значение (2.3), получаем

$$Q \leq (0.5(a_2 - a_1)(1 - F - \epsilon^0))^{1/2} \quad (2.4)$$

Положим  $a_2 \geq |a_1|$ , поэтому в области  $D_\xi(a_{1\xi}, a_{2\xi}, Q_\xi)$  согласно условиям (1.13) можно принять

$$Q_x = a_{2y}\omega_z^*, \quad Q_y = a_{2x}\omega_z^*, \quad Q_z = a_{2x}\omega_y^*$$

$$\omega_\xi^* = L_\xi Q_\xi + M_\xi(a_{2\xi} - a_{1\xi})^{1/2}, \quad L_\xi = k_\xi(F_\xi - \varepsilon_\xi^0), \quad M_\xi = k_\xi(1 - (F_\xi - \varepsilon_\xi^0)^2)^{1/2}$$

Решение этой системы линейных относительно  $Q_\xi(a_1, a_2)$  уравнений, где  $\mathbf{a}_i = (a_{ix}, a_{iy}, a_{iz})^T$  ( $i = 1, 2$ ), имеет вид

$$\begin{pmatrix} Q_x(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \\ Q_y(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \\ Q_z(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \end{pmatrix} = A(\mathbf{a}_2) \begin{pmatrix} M_z a_{2y} (a_{2z} - a_{1z})^{1/2} \\ M_z a_{2x} (a_{2z} - a_{1z})^{1/2} \\ M_y a_{2x} (a_{2y} - a_{1y})^{1/2} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$A(\mathbf{a}_2) = (1 - L_z L_y a_{2x}^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 - L_z L_y a_{2x}^2 & L_z L_y a_{2x} a_{2y} & L_z a_{2y} \\ 0 & 1 & L_z a_{2x} \\ 0 & L_y a_{2x} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Пренебрегая согласно условию (1.8), (1.9) величиной  $a_{2\xi} L_\xi a_{2\eta} L_\eta$  по сравнению с 1, получим

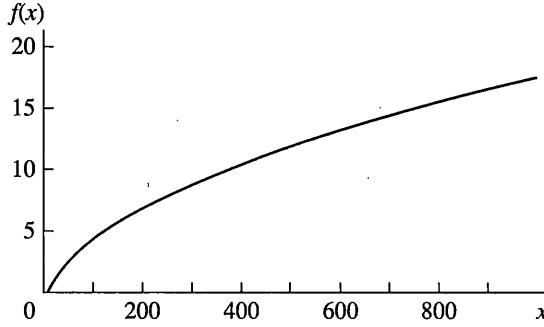
$$A_0(\mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_z a_{2y} \\ 0 & 1 & L_z a_{2x} \\ 0 & L_y a_{2x} & 1 \end{pmatrix}$$

В силу построения областей  $D_\xi$  верно утверждение

*Утверждение 1.* Пусть значения  $Q_\xi$  определены формулой (2.5). Тогда в любой точке области  $D_\xi$  величина кинематического возмущения удовлетворяет условию (1.13).

Выбор  $Q_\xi$  согласно (2.5) позволяет обособить декомпозицию системы (1.8), (1.9) и рассматривать эволюцию каждой пары фазовых координат системы (1.9), (1.12) в области  $D_\xi$  независимо от двух других. Индекс  $\xi$  в следующем пункте будем опускать.

**3. Исследование эволюции траектории в области  $D(a_1, a_2, Q)$ .** В этом пункте ограничение (1.10) на продолжительность интервалов постоянства управления предполагается всегда выполненным и во внимание не принимается. Рассмотрим в области  $D(a_1, a_2, Q)$  подобласть  $D(b_1, b_2, Q)$ , где  $b_1 > a_1$ ,  $b_2 < a_2$ , а величина  $Q$  согласована с размерами  $D(a_1, a_2, Q)$  условиями утверждения 1 (фиг. 1). Внешнюю границу области  $D(b_1, b_2, Q)$  зададим соотношениями (2.1)–(2.3), где  $a_1$  и  $a_2$  следует заменить на  $b_1$  и  $b_2$  соответственно, а буквенные обозначения узловых точек пометить знаком (\*). В области  $D(b_1, b_2, Q)$  дополнительно построим два контура, состоящие из параболических участков траекторий системы (1.9), (1.12) с началом в точках  $A_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) и управлением  $u(t) = (-1)^i$ . Кинематические и динамические возмущения в сочетании с выбранным управлением определим из условия максимального отклонения вправо по ходу движения соответствующей им траектории:  $q(t) = (-1)^i Q$ ,  $\varepsilon(t) = -\varepsilon^0 \text{sign } \omega$ . Участки этих траекторий от начала до пересечения с границей области  $D(b_1, b_2, Q)$  обозначим через  $A_i^* O_i^* B_i^*$ , где через  $O_i^*$  и  $B_i^*$  обозначены точки пересечения траекто-



Фиг. 2.

рии с линией  $\omega = (-1)^i Q$  и границей области соответственно. Поэтому по построению траектория с началом на дуге  $A_i^* B_j^*$  при управлении  $u(t) = (-1)^i$  должна закончиться на дуге  $A_j^* B_i^*$  ( $i, j = 1, 2; i \neq j$ ) при любых допустимых кинематических и динамических возмущениях.

**Утверждение 2.** Пусть  $(p, \omega) \in A_i^* B_j^*$  ( $i, j = 1, 2; i \neq j$ ),  $t_m(b_2 - b_1, Q) = \min_{\varepsilon, q, (p, \omega), i} T_i[p, \omega, \varepsilon(\cdot), q(\cdot)]$ , где  $T_i[p, \omega, \varepsilon(\cdot), q(\cdot)]$  – время движения от точки  $(p, \omega) \in A_i^* B_j^*$  до дуги  $A_j^* B_i^*$  с управлением  $u(t) = (-1)^i$  и допустимыми помехами  $\varepsilon(\cdot), q(\cdot)$ . Тогда  $t_m(b_2 - b_1, Q) = T_2[B_1^*, \varepsilon(t) = \varepsilon^0, q(t) = Q]$ .

Доказательство аналогично приведенному в [9] для случая  $Q = 0$ . Вычисления показывают, что минимальная продолжительность движения  $t_m = t_m(b_2 - b_1, Q)$  – минимальный положительный корень квадратного уравнения

$$t_m^2 + 2 \left( \frac{l(1 + F - \varepsilon^0)}{(1 - F - \varepsilon^0)(1 - \varepsilon^0)} \right)^{1/2} (Q + t_m) - 2 \frac{(Q + t_m)^2}{(1 - F - \varepsilon^0)} = l + b_1 - b_2$$

$$l = (1 + \varepsilon^0) \left[ -Q(1 + F + \varepsilon^0) + ((1 - (F + \varepsilon^0)^2)(b_2 - b_1 - Q^2))^{\frac{1}{2}} \right]^2 / ((1 + \varepsilon^0)^2 - F^2)$$

Корень этого уравнения можно представить в виде

$$t_m(b_2 - b_1, Q) = Qf((b_2 - b_1)/Q^2) \tag{3.1}$$

где  $f$  – функция одного переменного. Условия (2.4) эквивалентны неравенству  $(b_2 - b_1)/Q^2 \geq 2/(1 - F - \varepsilon^0)$  и  $f(2/(1 - F - \varepsilon^0)) = 0$ . График  $f(x)$  при  $F = 0.5; \varepsilon^0 = 0.25$  приведен на фиг. 2.

**Замечание.** Анализ показывает, что  $t_m$  монотонно растет с ростом  $b_2 - b_1$  и убывает с ростом  $Q$ .

Построим управление, гарантированно при всех реализациях возмущений переводящее систему (1.9), (1.12) из произвольной точки  $(p, \omega) \in D(a_1, a_2, Q)$  в сколь угодно малую окрестность области  $D(b_1, b_2, Q)$ , а затем и внутрь этой области, и определим значения параметров, при которых это возможно. В качестве линий переключения

выберем кривые  $K_i^* A_i^* B_j^* N_j^* A_j^*$  ( $i, j = 1, 2; i \neq j$ ) (фиг. 1). Здесь  $A_i^* K_i^*$  – часть ветви параболы

$$O_1^* A_1^* K_1^* : \{(p = O_1^* - 0.5(\omega - Q)^2 / (1 - F + \varepsilon^0), \omega), \omega \geq Q\}$$

$$O_2^* A_2^* K_2^* : \{(p = O_2^* + 0.5(\omega + Q)^2 / (1 + F + \varepsilon^0), \omega), \omega \leq -Q\}$$

которые образованы наиболее отклоняющимися вправо по всем реализациям возмущений траекториями системы (1.8), (1.12), проходящими через точки  $A_i^*$  в сочетании с управлением  $u(t) = (-1)^i$  соответственно

$$O_1^* = b_1 + s \left( Q(1 + F + \varepsilon^0) - \sqrt{(1 - (F + \varepsilon^0)^2)(b_2 - b_1 - Q^2)} \right)^2$$

$$O_2^* = b_2 - s \left( Q(1 - F + \varepsilon^0) - \sqrt{(1 - (F - \varepsilon^0)^2)(b_2 - b_1 - Q^2)} \right)^2$$

$$s = (1 + \varepsilon^0) / ((1 + \varepsilon^0)^2 - F^2)$$

Обозначим через  $L^+(L^-)$  линии  $K_2^* A_2^* B_1^* N_1^* A_1^*$  ( $K_1^* A_1^* B_2^* N_2^* A_2^*$ ) соответственно. В области  $D(a_1, a_2, Q)$  рассмотрим управление

$$u(w) = \begin{cases} 1, & (p, \omega) \in L^+ \cup (p, \omega) \text{ левее линии } L^+; \\ -1, & (p, \omega) \in L^- \cup (p, \omega) \text{ правее линии } L^- \\ n, & (p, \omega) \in \text{int}D(b_1, b_2, Q) \end{cases} \quad (3.2)$$

Зафиксируем точку  $H_1$  на линии  $\omega = Q$  слева от  $N_1^*(b_1, Q)$  и выпустим из нее траекторию системы (1.9), (1.12) с управлением (3.2). На линиях  $K_1^* A_1^*$  и  $K_2^* A_2^*$  управление  $u(t)$  поменяет знак с +1 на -1 и обратно, в результате фазовая точка, сделав один оборот вокруг области  $D(b_1, b_2, Q)$ , вернется на линию  $\omega = Q$  в точке  $H_2$ . Обозначим через  $S_i$  точки пересечения этой траектории с линиями  $K_i^* A_i^*$  и через  $S$  – с линией  $\omega = -Q$ . Через  $\omega(R)$  будем обозначать ординату точки  $R$  ( $R$  – произвольная точка).

**Утверждение 3.** При управлении (3.2) и наихудшей реализации возмущений  $q(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , соответствующих самому левому положению точки  $H_2$  на оси  $\omega = Q$ , верны соотношения

$$|H_1 - b_1| = k_1 \left[ 1 - \frac{2Q(1 - F + \varepsilon^0)}{\varepsilon^0(\omega(S_1) + \omega(A_1^*)) + 2(1 - F)Q} \right] (S - b_2) \quad (3.3)$$

$$|H_2 - b_1| = k_2 \left[ 1 - \frac{2Q(1 + F + \varepsilon^0)}{\varepsilon^0(\omega(S_2) + \omega(A_2^*)) + 2\varepsilon^0 Q} \right] (S - b_2)$$

$$k_1 = \frac{(1 + \varepsilon^0)(1 - F - \varepsilon^0)}{\varepsilon^0(1 + F + \varepsilon^0)}, \quad k_2 = \frac{\varepsilon^0(1 - F + \varepsilon^0)}{(1 + \varepsilon^0)(1 + F - \varepsilon^0)} \quad (3.4)$$



Здесь  $H_i$  и  $S$  – абсциссы одноименных точек. Доказательство соотношений (3.3), (3.4) элементарно и здесь не приводится. Таким образом коэффициент  $|H_2 - b_1|/|H_1 - b_1|$  стягивания траектории к области  $D(b_1, b_2, Q)$  зависит от начального положения точки  $H_1$ . Но  $\omega(S_1) > \omega(A_1^*)$  и  $\omega(S_2) < \omega(A_2^*)$ , поэтому коэффициент стягивания допускает оценку сверху

$$\frac{|H_2 - b_1|}{|H_1 - b_1|} \leq k(Q) = k^* \left[ 1 - \frac{Q(1 + F + \varepsilon^0)}{\varepsilon^0(\omega(A_2^*) + Q)} \right] \left[ 1 - \frac{Q(1 - F + \varepsilon^0)}{\varepsilon^0\omega(A_1^*) + (1 - F)Q} \right]^{-1} \quad (3.5)$$

$$k^* = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\varepsilon^{0^2}((1 + \varepsilon^0)^2 - F^2)}{(1 + \varepsilon^0)^2((1 - \varepsilon^0)^2 - F^2)} < 1$$

Невыполнение неравенства  $k^* < 1$  делает управление (3.2) неэффективным. Поэтому всюду далее будем считать его выполненным, что всегда имеет место при достаточно малой величине динамических возмущений. Из соотношений (3.5) следует, что с увеличением  $\varepsilon^0$  и  $Q$  скорость стягивания траектории к области  $D(b_1, b_2, Q)$  уменьшается.

*Замечание.* При

$$k(Q) < 1 \quad (3.6)$$

траектория при наихудшей реализации возмущений бесконечно близко приближается к области  $D(b_1, b_2, Q)$ , навиваясь на эту область. Однако вследствие ошибок в выборе наихудших возмущений при управлении (3.2) обязательно наступит момент, при котором фазовая точка попадет внутрь области  $D(b_1, b_2, Q)$ , с последующим движением от линии  $A_1^*B_2^*$  к линии  $A_2^*B_1^*$  и обратно, оставаясь сколь угодно долго в пределах этой области.

Установим условия, при которых траектория, навиваясь на область  $D(b_1, b_2, Q)$ , остается в пределах области  $D(a_1, a_2, Q)$ .

*Утверждение 4.* Пусть  $(p(t_0), \omega(t_0)) \in D(a_1, a_2, Q)$  и выполнены неравенства

$$k_1 \left[ 1 - \frac{Q(1 - F + \varepsilon^0)}{\varepsilon^0\omega(A_1^*) + (1 - F)Q} \right] > \kappa = \sqrt{k_1 k_2} = \sqrt{\frac{(1 - F)^2 - \varepsilon^{0^2}}{(1 + F)^2 - \varepsilon^{0^2}}} > k_2 \left[ 1 - \frac{Q(1 + F + \varepsilon^0)}{\varepsilon^0\omega(A_2^*) + \varepsilon^0 Q} \right] \quad (3.7)$$

Тогда при условии

$$b_1 = a_1 + \kappa d, \quad b_2 = a_2 - d, \quad d = \text{const} > 0 \quad (3.8)$$

управление (3.2) обеспечивает стягивание фазовой траектории к области  $D(b_1, b_2, Q)$ , не выводя изображающую точку за пределы области  $D(a_1, a_2, Q)$ .

Для доказательства рассмотрим участок фазовой траектории между двумя последовательными моментами пересечения фазовой точкой луча  $\omega = Q$ ,  $p \leq b_1$ . Эта траектория при управлении (3.2) может выйти за границу области  $D(a_1, a_2, Q)$  либо на участке  $A_1N_2$ , либо на участке  $A_2N_1$ . Но в первом случае должно быть выполнено

$$k_1 \left[ 1 - \frac{Q(1 - F + \varepsilon^0)}{\varepsilon^0\omega(A_1^*) + (1 - F)Q} \right] = \frac{|H_1 - b_1|}{|S - b_2|} < \kappa = \sqrt{k_1 k_2}$$

что противоречит левому неравенству (3.7). Аналогично рассматривается второй случай. Стягивание траектории обеспечивается условием (3.6), вытекающим из неравенств (3.7). Условие (3.8) будет всегда выполнено, если в качестве множеств возможных состояний системы (1.9), (1.12) рассматривать только области  $D(p_1, p_2, Q)$ , где абсциссы  $p_1, p_2$  левой и правой граничных точек связаны соотношением

$$p_1 = -\kappa p_2 \quad (3.9)$$

Условие (3.7) эквивалентно одновременному выполнению двух неравенств

$$\frac{\omega(A_1^*)}{Q} > \frac{1 + \varepsilon^0 + (1 - F)v}{1 + \varepsilon^0 - \varepsilon^0 v}, \quad \frac{-\omega(A_2^*)}{Q} > \frac{1 + \varepsilon^0 + (1 + F)v}{1 + \varepsilon^0 - \varepsilon^0 v}$$

$$v = \sqrt{((1 + \varepsilon^0)^2 - F^2) / ((1 - \varepsilon^0)^2 - F^2)}$$

Но  $-\omega(A_2^*) > \omega(A_1^*)$ , поэтому оба неравенства будут выполнены, если

$$\frac{\omega(A_1^*)}{Q} > \frac{1 + \varepsilon^0 + (1 + F)v}{1 + \varepsilon^0 - \varepsilon^0 v}$$

Заменив  $\omega(A_1^*)$  на его значение (2.3), получим в итоге

$$Q < (b_2 - b_1) \left[ 1 + \frac{1 + F + \varepsilon^0}{1 - F - \varepsilon^0} \left( 1 + \frac{v}{1 + \varepsilon^0 - \varepsilon^0 v} \right)^2 \right]^{-1}$$

Последнее неравенство будет выполнено, если

$$Q \leq \Lambda (b_2 - b_1), \quad \Lambda = \frac{1 - F - \varepsilon^0}{2(1 + v(1 + \varepsilon^0 - \varepsilon^0 v)^{-1})^2} \quad (3.10)$$

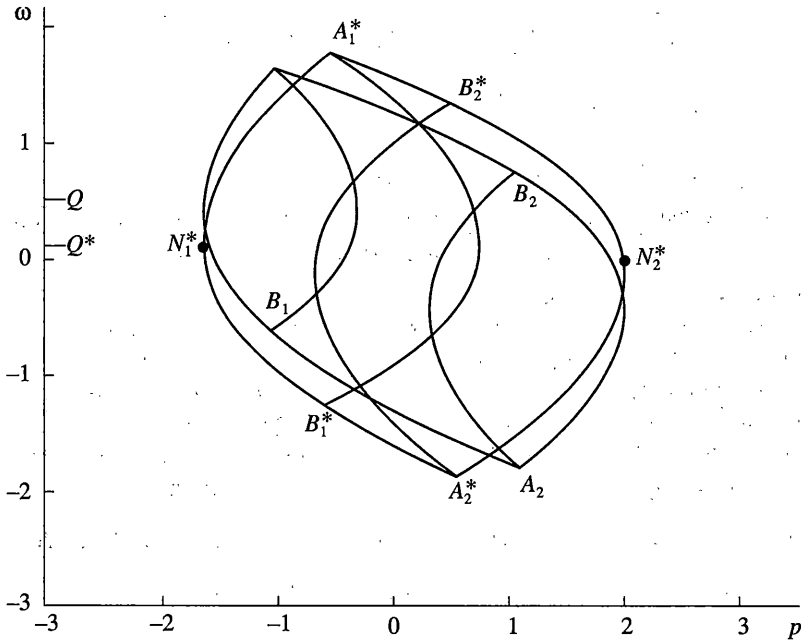
Отсюда следствие утверждения 4. Пусть величина  $Q$  кинематического возмущения удовлетворяет оценке (3.10). Тогда управление (3.2) обеспечивает стягивание фазовой траектории к области  $D(b_1, b_2, Q)$  из любого начального состояния.

Стягивание траектории к области в окрестности начала координат приводит к уменьшению величины кинематических возмущений. Это позволяет скорректировать размеры предельной области. Рассмотрим две области:  $D(a_1, a_2, Q^*)$  и  $D(a_1, a_2, Q)$ , причем  $Q^* < Q$  (фиг. 3). Точки пересечения параболических участков, составляющих границу области  $D(a_1, a_2, Q^*)$ , будем помечать верхним индексом (\*). Вследствие неравенства  $Q^* < Q$  линия  $A_1^* B_2^* (A_2^* B_1^*)$  на фазовой плоскости расположена выше и правее (ниже и левее) линии  $A_1 B_2 (A_2 B_1)$ . Это приводит к утверждению.

**Утверждение 5.** Пусть  $(p(t_0), \omega(t_0)) \in A_i B_j (i \neq j)$ ,  $u(t_0) = (-1)^i (i, j = 1, 2)$ . Тогда управление

$$u(w) = \begin{cases} 1, & (p, \omega) \in A_2^* B_1^* N_1^*; \\ -1, & (p, \omega) \in A_1^* B_2^* N_2^*; \\ n, & (p, \omega) \notin A_2^* B_1^* N_1^* \cup A_1^* B_2^* N_2^* \end{cases} \quad (3.11)$$

обеспечивает гарантированный перевод системы (1.9), (1.12) в область  $D(a_1, a_2, Q^*)$  с последующим ее там удержанием.



Фиг. 3

Фазовая траектория системы (1.9), (1.12) с началом на дугах  $A_i B_j$  ( $i \neq j$ ) при управлении  $u(t) = (-1)^i$ ,  $t \geq t_0$ , обязательно упрется в линию  $A_j^* B_i^* N_i^*$  после пересечения линии  $A_j B_i$ . Поэтому выбор линий  $A_j^* B_i^* N_i^*$  ( $i, j = 1, 2, i \neq j$ ) в качестве линий переключения обеспечивает перевод и последующее удержание системы (1.9), (1.12) в области  $D(a_1, a_2, Q^*)$  в течение неограниченного времени.

*Замечание.* Уменьшение величины кинематических возмущений приводит к увеличению минимального интервала между смежными моментами переключения управления. Это позволяет при условии (3.10) перевести систему из области  $D(a_1, a_2, Q^*)$  в область  $D(b_1, b_2, Q^*)$  при  $a_1 < b_1$ ,  $b_2 < a_2$ ,  $t_m(b_2 - b_1, Q^*) = 1$ .

Далее в качестве областей возможных состояний системы будем рассматривать только множества  $D(p_1, p_2, Q)$ , где абсциссы  $p_1, p_2$  левой и правой граничных точек связаны соотношением (3.7). Система уравнений (2.4) совместно с уравнением (3.1) и условием (3.7) позволяют определить предельно допустимые неравенства (1.4), (1.10), (1.13) параметры минимальных областей  $D_\xi(-\kappa_\xi p_\xi^0, p_\xi^0, Q_\xi^0)$  возможных состояний системы (1.9), (1.12).

*Утверждение 6.* Пусть абсциссы  $p_1, p_2$  левой и правой граничных точек области  $D(p_1, p_2, Q)$  связаны соотношением (3.7). Тогда максимальная гарантированная точность  $p_\xi^0$  стабилизации динамической системы (1.9), (1.12), (1.13) допустимым управлением  $u(w)$  удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} Q^0 = A(p^0)b(p^0), \\ t_{m\xi}((\kappa_\xi + 1)p_\xi^0, Q_\xi^0) = 1 \quad (\xi = x, y, z) \end{cases}$$

$$b(p^0) = (M_z p_y^0 \sqrt{(\kappa_z + 1) p_z^0}, M_x p_x^0 \sqrt{(\kappa_x + 1) p_z^0}, M_y p_x^0 \sqrt{(\kappa_y + 1) p_y^0})^T \quad (3.12)$$

$$p^0 = (p_x^0, p_y^0, p_z^0)^T, \quad Q^0 = (Q_x^0, Q_y^0, Q_z^0)^T$$

где  $A(p^0)$  и  $t_{m\xi}((\kappa_\xi + 1) p_\xi^0, Q_\xi^0)$  определены формулами (2.5), (3.1).

Доказательство следует из утверждений 1 и 2 и замечания к утверждению 2.

Область  $D_\xi(-\kappa_\xi p_\xi^0, p_\xi^0, Q_\xi^0)$  назовем минимальным множеством допустимых состояний системы (1.9), (1.12), (1.13).

**4. Построение области притяжения минимального множества допустимых состояний системы.** В этом пункте будет построено семейство вложенных друг в друга областей  $D^{k+1} \in D^k (k = 1, 2, 3 \dots)$ , сходящихся к минимальному множеству, и указано управление, последовательно переводящее систему при любых допустимых реализациях помехи из большего множества в меньшее. Рассмотрим однопараметрическое семейство областей  $D_\xi(-\kappa_\xi p_\xi^0 d, p_\xi^0 d, Q_\xi^0(d))$ , где  $d$  – скалярный параметр семейства, определяющий при заданном  $p_\xi^0$  размеры области  $D_\xi$ , компоненты  $Q_\xi(d)$  вектора  $Q(d)$  заданы равенством (2.5) при  $a_{1\xi} = -\kappa_\xi p_\xi^0 d, a_{2\xi} = p_\xi^0 d$ , так что

$$Q(d) = d^{3/2} A(p^0 d) b(p^0) \quad (4.1)$$

Определим  $d_m$  как максимальное значение  $d$ , удовлетворяющее системе неравенств

$$t_{m\xi}((\kappa_\xi + 1) p_\xi^0 \mu_1 d, Q_\xi(d)) \geq 1 \quad (4.2)$$

$$Q_\xi(d) \leq \mu_1 \Lambda_\xi p_\xi^0 d, \quad 0 < \mu_1 < 1 \quad (4.3)$$

где  $\mu_1$  – первый из коэффициентов последовательного уменьшения размеров исходной области  $D_\xi^1(-\kappa_\xi p_\xi^0 d_m, p_\xi^0 d_m, Q_\xi^0(d_m))$  возможных состояний системы – параметр стабилизирующего управления,  $\Lambda$  определено формулой (3.10). Преобразуем последнее неравенство, подставив вместо  $Q_\xi(d_m)$  его значение (4.1):

$$(A(p^0 d_m) b(p^0))_\xi \leq \mu_1 \Lambda_\xi p_\xi^0 d_m^{-1/2}, \quad 0 < \mu_1 < 1 \quad (4.4)$$

Предположим, система неравенств (4.2), (4.3) имеет решение  $d_m > 1$  при некотором  $\mu_1 < 1$ , что естественно в силу малости  $k_\xi$  (1.8), а начальному состоянию системы соответствует условие  $\tau_\xi \geq 1$  ( $\xi = x, y, z$ ), означающее возможность мгновенно переключиться. Допустимое управление, переводящее динамическую систему (1.9), (1.12), (1.13) из произвольной точки области  $D_\xi^1(-\kappa_\xi p_\xi^0 d_m, p_\xi^0 d_m, Q_\xi^0(d_m))$  в область  $D_\xi^2(-\kappa_\xi p_\xi^0 \mu_1 d_m, p_\xi^0 \mu_1 d_m, Q_\xi^0(\mu_1 d_m))$ , построим следующим образом. Согласно утверждениям 3, 4 управление (3.2) переводит систему из произвольной точки области  $D_\xi^1(-\kappa_\xi p_\xi^0 d_m, p_\xi^0 d_m, Q_\xi^0(d_m))$  в область  $D_\xi(-\kappa_\xi p_\xi^0 \mu_1 d_m, p_\xi^0 \mu_1 d_m, Q_\xi^0(d_m))$  в силу условий (4.2), (4.3), гарантирующих выполнение неравенств (1.10), (3.10). Управление (3.11) обеспечит последующий перевод системы в область  $D_\xi^2(-\kappa_\xi p_\xi^0 \mu_1 d_m, p_\xi^0 \mu_1 d_m, Q_\xi^0(\mu_1 d_m))$ . Повторяя этот

процесс из области  $D_{\xi}^2(-\kappa_{\xi} p_{\xi}^0 \mu_1 d_m, p_{\xi}^0 \mu_1 d_m, Q_{\xi}^0(\mu_1 d_m))$  как из исходной, можно обеспечить сколь угодно близкое стягивание траектории к минимальному множеству  $D_{\xi}(-\kappa_{\xi} p_{\xi}^0, p_{\xi}^0, Q_{\xi}^0)$  допустимых состояний системы. Коэффициент  $\mu_k$  последовательного уменьшения размеров областей  $D^k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) (1.15) на каждом шаге следует выбирать с учетом неравенства (4.2). Условие (4.3) достаточно проверить только один раз, так как при дальнейшем уменьшении параметра  $d$  оно согласно (4.4) выполняется автоматически.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении динамическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
5. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 6. С. 64–82.
6. Алексеев К.Б., Бебин Г.Г. Управление космическим летательным аппаратом. М.: Машиностроение, 1964. 402 с.
7. Гаушус Э.В., Смольянинов Н.Д. Исследование релейной системы стабилизации летательного аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 5–13.
8. Гаушус Э.В. Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976. 368 с.
9. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. Механика больших космических конструкций. М.: Факториал, 1997. 302 с.
10. Иванова В.Ф., Соколов Б.Н. Максимальная гарантированная точность релейного регулятора в одномерной задаче стабилизации // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 26–36.
11. Соколов Б.Н. О структуре максимально экономичного одноканального релейного регулятора гарантированной точности. // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 17–33.
12. Соколов Б.Н. Одноканальный релейный регулятор в задаче гарантированной стабилизации поступательных движений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 1. С. 10–16.

Москва

Поступила в редакцию  
24.12.2002