МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2004

© 2004 г. **М.Я. ИЗРАИЛОВИЧ**

НАКОПЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ УСТАНОВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕЖИМА В ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается задача о накоплении возмущений в процессе установления периодического режима в линейных системах с произвольным конечным числом степеней свободы, описываемых системой уравнений в нормальной форме Коши. Предполагается, что на систему действуют произвольная периодическая возмущающая сила с известным периодом и заданной предельной интенсивностью. Строится последовательность функций Грина, описывающих процесс установления, определяется норма соответствующего линейного оператора.

Обобщение классической задачи Б.В. Булгакова о накоплении возмущений на случай установившегося периодического режима (для системы с одной степенью свободы) впервые рассмотрено в [1]. Решение получено на основе метода модернизированного вариационного исчисления. Общие решения такой задачи как для одномерных, так и для многомерных линейных систем получены в [2, 3] на основе построения функций Грина для установившихся периодических режимов (в соответствии с используемой в [2, 3] терминологией эти функции Грина именуются импульсно-частотными характеристиками).

Однако при расчете и проектировании механических систем, подверженных действию периодических возмущений, не менее важной является задача о накоплении возмущений не только в установившемся режиме, но и в процессе его установления, поскольку именно в процессе установления значения координат, скоростей и ускорений принимают максимальные значения, превосходящие соответствующие значения для установившегося режима.

В публикуемой статье эта задача решается на основе построения последовательностей функций Грина, описывающих процессы установления при произвольной периодической возмущающей силе. Последовательности функций Грина определяются путем преобразования импульсной переходной функции системы. Далее определяется оценка нормы соответствующего линейного оператора.

Уравнение системы предполагается заданным в нормальной форме Коши

$$\dot{x} = Ax + \mathbf{b}u \tag{1}$$

где x – n-мерный вектор фазовых координат; A, $\mathbf{b}$ – постоянные матрица и вектор размерности соответственно $n \times n$ и n; $u(t) = u(t + T)$ – внешняя скалярная возмущающая сила.

Решение системы (1) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{b}u(\tau)d\tau = \int_0^t e^{A\tau}\mathbf{b}u(t-\tau)d\tau \tag{2}$$

Выражение (2) преобразуется к виду

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{l-1} \int_{iT}^{(i+1)T} e^{A\tau}\mathbf{b}u(t-\tau)d\tau + \int_{lT}^{t} e^{A\tau}\mathbf{b}u(t-\tau)d\tau \tag{3}$$

$$t \in (lT;\ (l+1)T] \quad (l = 1, 2, \ldots)$$

Далее, по аналогии с [4] в каждом из слагаемых в (3) с учетом Т-периодичности функции $u(t)$ пределы интегрирования преобразуются к отрезку (0; T]. С этой целью вводятся новые переменные интегрирования: $\theta_i = \tau - iT$ $(i = 0, 1\ldots l)$:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{l-1} \int_{0}^{T} e^{A(\theta_i + iT)}\mathbf{b}u(t-\theta_i)d\theta_i + \int_{0}^{t-lT} e^{A(\theta_l + lT)}\mathbf{b}u(t-\theta_l)d\theta_l \tag{4}$$

В результате введения в (4) снова одной переменной интегрирования определяется следующее выражение, описывающее процесс установления периодического режима

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \int_{0}^{t-lT} \sum_{i=0}^{l} e^{A(\tau+iT)}\mathbf{b}u(t-\tau)d\tau + \int_{t-lT}^{T} \sum_{i=0}^{l-1} e^{A(\tau+iT)}\mathbf{b}u(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_{0}^{t-lT} (I-e^{AT})^{-1}[1-e^{A(l+1)T}]e^{A\tau}\mathbf{b}u(t-\tau)d\tau + \int_{t-lT}^{T} (I-e^{AT})^{-1}(1-e^{AlT})e^{A\tau}\mathbf{b}u(t-\tau)d\tau\end{aligned} \tag{5}$$

где I – единичная матрица[1] $n \times n$.

В более компактной форме выражения (5) записывается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \int_{0}^{T} \mathbf{g}_l(t,\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\mathbf{g}_0(t,\tau) = \begin{cases} \mathbf{q}_0(\tau), & \tau \in [0;\ t] \\ 0, & \tau \in (t;\ T] \end{cases} \tag{6}$$

$$\mathbf{g}_l(t,\tau) = \begin{cases} \mathbf{q}_l(\tau), & \tau \in [0;\ t-lT) \\ \mathbf{q}_{l-1}(\tau), & \tau \in [t-lT;\ T) \quad (l = 1, 2, 3\ldots) \end{cases}$$

$$\mathbf{q}_l(\tau) = (I-e^{AT})^{-1}[1-e^{A(l+1)T}]e^{A\tau}\mathbf{b}$$

Предполагается, что нулевое решение системы (1) при $u = 0$ устойчиво, в силу чего

$$\lim_{l\to\infty} e^{AlT} = \|0\|$$

Вследствие этого из (5), (6) определяется следующее выражение для установившегося режима

$$\mathbf{x}(t) = \int_{0}^{T} (I-e^{AT})^{-1} e^{A\tau}\mathbf{b}u(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{T} \mathbf{q}(\tau)u(\tau)d\tau \tag{7}$$

[1] Предполагается, что рассматривается нерезонансный случай, в силу чего $I - e^{AT} \neq \|0\|$, где $\|0\|$ – нулевая матрица $n \times n$.

Предполагается, что интенсивность возмущающего воздействия задана в виде

$$\left[\int_0^T |u(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \le U_p \tag{8}$$

При $p = 2$ из (8) получается интегральное квадратичное ограничение на интенсивность возмущения $u(t)$, при $p = 1$ – на его импульс, при $p \to \infty$ – на амплитудное значение.

Пусть $y = \mathbf{c}^+x$, где $\mathbf{c}$ – постоянный вектор размерности n, знак (+) означает транспонирование. Тогда y – скалярный выход системы (1). В частности, при $c_i = 0$ ($i = 1, 2 \ldots n$, $i \ne k$), $c_k = 1$ функция $y(t)$ представляет собой k-ую фазовую координату системы.

В силу (6) в процессе установления периодического режима

$$y(t) = \int_0^T \mathbf{c}^+\mathbf{g}_l(t, \tau)u(t-\tau)d\tau \tag{9}$$

В установившемся режиме, в силу (7):

$$y(t) = \int_0^T \mathbf{c}^+\mathbf{g}(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{10}$$

В случае ограничения на интенсивность возмущения общего вида (8) в результате применения к (9), (10) неравенства Гёльдера определяются следующие оценки для модуля максимально достижимой величины $y(t)$ в процессе установления и в установившемся режиме

$$\bar{y}(t) = \left[\int_0^T \left|\mathbf{c}^+\mathbf{g}_l(t, \tau)\right|^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}} U_p$$
$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \tag{11}$$

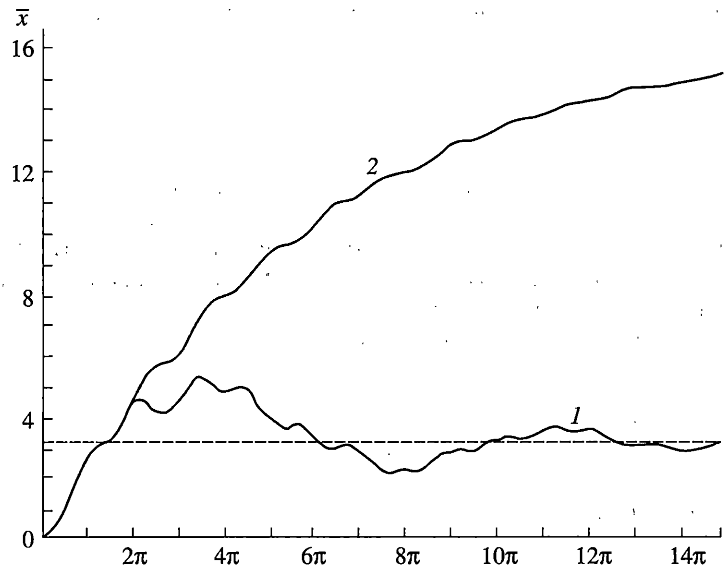
$$\bar{y} = \left[\int_0^T \left|\mathbf{c}^+\mathbf{g}(\tau)\right|^q d\tau\right]^{\frac{1}{q}} U_p \tag{12}$$

Поскольку из структуры матричной функции Грина $g_l(t, \tau)$ следует, что при $t \to \infty$ ($l \to \infty$) $\lim \mathbf{g}_l(t, \tau) = \mathbf{g}(\tau)$, то

$$\lim_{t \to \infty} \bar{y}(t) = \bar{y}$$

В качестве примера рассматривается задача о накоплении возмущений при установлении периодического режима в системе с одной степенью свободы $\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = u(t)$, уравнение которой в нормальной форме (1) имеет вид:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2kx_2 - \omega_0^2 x_1 + u$$



Фиг. 1

В данном случае

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2k \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Ограничение на u задается в виде $|u| < 1$.

Результаты численного решения задачи о накоплении возмущений по координате x_1 при $T = 2\pi$, $k = 0.05$, $\omega_0 = 0.75$ осуществленного в соответствии с (11), (12) представлены на фигуре (кривая *1*). Из анализа кривой $\bar{x}_1(t)$ следует, что значение максимальной амплитуды, достигаемое в процессе установления, существенно превышает соответствующее установившееся значение (горизонтальная прямая).

Кривая $\bar{x}_2(t)$ (кривая *2* на фигуре) – это кривая накопления, построенная без учета периодичности возмущения. Из сопоставления кривых $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$ следует, что неучет периодичности возмущения приводит к существенно завышенным оценкам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Троицкий В.А.* О накоплении периодических возмущений // Инж. ж. МТТ. 1966. № 5. С. 22–26.
2. *Розенвассер Е.Н.* Колебания нелинейных систем. Метод интегральных уравнений. М.: Наука, 1969. 576 с.
3. *Розенвассер Е.Н.* Периодически нестационарные системы управления. М.: Наука, 1973. 421 с.
4. *Израилович М.Я.* Установление периодических колебаний в линейных стационарных вибрационных системах // Машиноведение. 1976. № 1. С. 34–38.

Москва

Поступила в редакцию
8.03.2002