

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СВЯЗНОЙ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ОБРАТНОМ МАРТЕНСИТНОМ ПРЕВРАЩЕНИИ

В рамках различных гипотез получены аналитические решения линеаризованной задачи о потере устойчивости прямоугольной пластины из сплава с памятью формы, вызванной обратным мартенситным превращением. Построены области устойчивости при использовании двух различных вариантов определяющих соотношений для характерных температур фазового перехода. Более логичные результаты получаются в случае, если эти температуры считаются линейными функциями компонент девиатора напряжений, а не интенсивности напряжений.

Проблеме анализа устойчивости тонкостенных элементов из сплавов с памятью формы (СПФ) посвящен ограниченный круг работ [1–6]. В [2] приведены результаты экспериментов, свидетельствующих о том, что сами по себе термоупругие мартенситные фазовые превращения могут вызвать потерю устойчивости. В [3–6] проанализированы различные гипотезы, в рамках которых данное явление может быть адекватно описано путем решения задачи устойчивости в линеаризованной постановке. Установлено, что качественно правильное описание получается в рамках концепции “продолжающегося фазового перехода”, утверждающей, что при переходе в смежную форму равновесия в материале происходит дополнительное фазовое превращение. Показано, что наименьшие критические нагрузки получаются в рамках концепции “продолжающегося нагружения”, свидетельствующей о том, что дополнительное фазовое превращение должно происходить во всем сечении рассматриваемого тела. В [3–4] в различных постановках решены задачи об устойчивости стойки Шенли с опорными стержнями, выполненными из СПФ при прямом мартенситном превращении в этих стержнях. В [5] проанализировано явление потери устойчивости стержня из СПФ, вызванное прямым или обратным мартенситным превращением. В [6] исследовано явление потери устойчивости прямоугольной пластины, вызванной прямым мартенситным превращением под действием двухосного сжатия.

В данной работе в различных постановках получены аналитические решения задач устойчивости прямоугольной пластины, претерпевающей обратное мартенситное превращение под действием двухосного сжатия после прямого превращения под действием двухосного же нагружения. Нагрузки, действующие при прямом и последующем обратном превращении, вообще говоря, различаются. Задачи решались при двух вариантах определяющих соотношений для характерных температур обратного превращения с целью выбора более адекватной формы этих соотношений.

1. Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная пластина постоянной толщины h , изготовленная из СПФ. Пластина отнесена к декартовой системе координат, ось x_1 , x_2 которой расположены в срединной плоскости пластины вдоль ее кромок, а

начало координат – в одном из углов пластины. Рассматриваемая пластина имеет размеры a, b вдоль осей x_1, x_2 соответственно.

Сначала находящаяся в аустенитном состоянии пластина, нагружается равномерно распределенными по ее противоположным кромкам постоянными внешними поверхностными силами p_{11}^1, p_{22}^1 , действующими в направлении осей x_1, x_2 соответственно. Поверхностные силы p_{11}^1, p_{22}^1 прикладываются при столь высокой температуре, что создаваемое напряженное состояние не вызывает прямое мартенситное превращение в изотермических условиях. Затем она переводится за счет охлаждения через интервал температур прямого мартенситного превращения в полностью мартенситное состояние. Предполагается, что в ходе процесса прямого превращения потери устойчивости пластины не происходит.

Далее, пластина, находящаяся уже в мартенситном состоянии, нагружается по своим противоположным кромкам, вообще говоря, другими равномерно распределенными постоянными внешними поверхностными силами p_{11}^2, p_{22}^2 . После этого пластина медленно нагревается через интервал температур обратного мартенситного превращения. В каждый момент времени все точки пластины имеют одинаковую температуру. Для различных комбинаций нагрузок p_{11}^2, p_{22}^2 , действовавших на этапе прямого превращения, разыскиваются минимальные нагрузки p_{11}^2, p_{22}^2 (считается, что они зависят от одного параметра), при которых в процессе обратного превращения наряду с тривиальной плоской формой пластины возможны также искривленные формы.

Задача устойчивости решается в линеаризованной постановке в рамках теории малых деформаций и гипотезы прямых нормалей, с использованием линейных выражений кривизн через прогиб. Поскольку до перехода в смежную форму равновесия происходит равномерное сжатие пластины, то докритические полные, упругие и фазовые деформации, а также напряжения не зависят от координат точек пластины. Докритические кривизны и прогиб равны нулю.

2. Система определяющих соотношений. Для решения рассматриваемой задачи устойчивости применяется упрощенный вариант предложенной в [7–10] системы определяющих соотношений для СПФ. Для обратного мартенситного превращения при плоском напряженном состоянии эти соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\sigma_{11} - \mu(q)\sigma_{22}}{E(q)}, \quad \varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{\sigma_{22} - \mu(q)\sigma_{11}}{E(q)}, \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = \frac{\sigma_{12}}{2G(q)} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_1} + \frac{1-q}{E_2}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_1} + \frac{1-q}{G_2}, \quad \mu(q) = \frac{E(q)}{2G(q)} - 1 \quad (2.3)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{(2)} = \left(\lambda \frac{\sigma_{ij}^{(1)}(q)}{\sigma_{(1)}} + (1-\lambda) \frac{a_0 \varepsilon_{ij}^{(2)*}}{\exp(a_0 q^*) - 1} + a_0 \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) dq \quad (2.4)$$

$$q = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\pi \frac{T - A_1^\sigma}{A_2 - A_1} \right) \right] \quad (2.5)$$

$$A_1^\sigma < T < A_2^\sigma, \quad dq < 0 \quad (2.6)$$

Здесь ε_{ij} , $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$, σ_{ij} – полные, упругие, фазовые деформации и напряжения; $\mu(q)$, $E(q)$, $G(q)$ – коэффициент Пуассона, модуль Юнга и модуль сдвига, зависящие от объемной доли мартенситной фазы q ; индексами 1 и 2 обозначены значения модулей для мартенситного и аустенитного состояний; $\sigma_{ij}^{1*}(q)$ – для рассматриваемого процесса обратного превращения значение девиатора напряжений, который действовал на этапе предшествующего прямого превращения при том же значении величины q ; q^* , $\varepsilon_{ij}^{(2)*}$ – объемная доля мартенситной фазы и фазовые деформации, которые были достигнуты в конечной точке предшествующего этапа прямого мартенситного перехода; T , A_1^σ , A_2^σ , A_1 , A_2 – текущая температура, а также температуры начала и окончания обратного мартенситного превращения в нагруженном (верхний индекс σ) и ненагруженном (без верхнего индекса) материале; $\sigma_{(1)}$, a_0 , λ – параметры материала. Следуя приведенным уравнениям, фазовые деформации считаются девиатором, т.е. объемным эффектом реакции мартенситного превращения пренебрегается. Не учитываются также чисто температурные деформации. Уравнение (2.5) для описания диаграммы фазового перехода предложено в [11]. Неравенства (2.6) являются условиями осуществления обратного превращения.

Известно, что характерные температуры термоупругих мартенситных превращений меняются при изменении действующих напряжений. В случае, когда прямое и обратное превращения происходят при действии одного и того же напряжения, температуры начала прямого и окончания обратного превращения возрастают с ростом интенсивности σ_i этого напряжения. Эта тенденция в первом приближении для плоского напряженного состояния может быть описана с помощью зависимостей (k – параметр материала)

$$A_1^\sigma = A_1 + k\sigma_i, \quad A_2^\sigma = A_2 + k\sigma_i, \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \quad (2.7)$$

Ситуация значительно осложняется в случае, если напряжения, действующие на этапах прямого σ_{ij}^1 и обратного σ_{ij}^2 превращений различны. Следуя экспериментальным данным, [12, 13] температуры начала и окончания обратного мартенситного превращения при фиксированных значениях σ_{ij}^1 являются линейными функциями компонент σ_{ij}^2 . Коэффициенты этой линейной функции зависят от фазовых деформаций $\varepsilon_{ij}^{(2)*}$, созданных в материале на предшествующем этапе прямого превращения. Если при фиксированном напряжении σ_{ij}^2 фазовая деформация $\varepsilon_{ij}^{(2)*}$ меняется на величину $\Delta\varepsilon_{ij}^{(2)*}$, удовлетворяющую соотношению $\sigma_{ij}^2 \Delta\varepsilon_{ij}^{(2)*} = 0$, то величины A_1^σ , A_2^σ не меняются.

Всем этим условиям можно удовлетворить, приняв, что

$$A_1^\sigma = A_1 + k_1 \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^{(2)*}, \quad A_2^\sigma = A_2 + k_2 \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^{(2)*} \quad (2.8)$$

где k_1 , k_2 – некоторые скаляры, значения которых могут зависеть от инвариантов тензора фазовых деформаций и от параметра фазового состава в момент начала обратного превращения. Пусть предварительное прямое превращение происходило под действием того же постоянного напряжения σ_{ij} , что и последующий обратный пере-

ход. В этом случае, следуя экспериментальным данным и предложенным в [7–10] определяющим соотношениям для прямого превращения, компоненты тензора $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ будут пропорциональны компонентам девиатора напряжений σ'_{ij} с положительным коэффициентом. Тогда $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_i\varepsilon_i^{(2)}$ и формулы (2.8) переходят в (2.7), если

$$k_1 = k_2 = k/\varepsilon_i^{(2)*} \quad (2.9)$$

Здесь $\varepsilon_i^{(2)}$, $\varepsilon_i^{(2)*}$ – интенсивности соответствующих тензоров.

Для того чтобы было возможно сравнение решений задачи устойчивости при использовании соотношений (2.7) и (2.8), в данной работе скаляры k_1 и k_2 , входящие в (2.8), будут определяться по формуле (2.9), хотя и очевидно, что комбинация (2.8), (2.9) неприменима для равных нулю или для близких к нулю начальных фазовых деформациях.

Если же на этапе прямого превращения действовало напряжение, равное по величине напряжению, приложенному при обратном превращении, но направленное противоположно, то из (2.8), (2.9) вместо (2.7) получается $A_1^\sigma = A_1 - k\sigma_i$, $A_2^\sigma = A_2 - k\sigma_i$, т.е. с ростом действующих напряжений температуры обратного перехода будут не увеличиваться, а уменьшаться, как это и наблюдается в экспериментах [12, 13].

Следуя данным [4–6], при анализе устойчивости элементов из СПФ существенное значение имеет возможность изменения параметра фазового состава, связанная с изменением действующих напряжений при постоянной температуре. В рамках соотношений (2.7) в изотермических условиях, следуя второму неравенству (2.6), обратное превращение может происходить лишь при уменьшении интенсивности напряжений (эффект “псевдоупругости” при разгрузке). Изотермическая догрузка (рост интенсивности напряжений) приводит к прекращению обратного превращения. В то же время, для соотношений (2.8) обратное превращение при фиксированной температуре возможно как при разгрузке, так и при догрузке, если только $\sigma_{ij}^{2, (2)*} < 0$.

3. Анализ докритического состояния. Решение задачи о прямом превращении в пластине под действием неизменных нагрузок p_{11}^1 , p_{22}^1 , в случае отсутствия потери устойчивости на этапе прямого превращения может быть записано в виде [6]:

$$\sigma_{11}^1 = -p_{11}^1, \quad \sigma_{22}^1 = -p_{22}^1, \quad \sigma_{33}^1 = \sigma_{13}^1 = \sigma_{23}^1 = \sigma_{12}^1 = 0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{ii}^{(2)} = \frac{2p_{ii}^1 - p_{jj}^1}{3\sigma_{(1)}a_0} f(q), \quad \varepsilon_{12}^{(2)} = 0, \quad \varepsilon_{33}^{(2)} = \frac{p_{11}^1 + p_{22}^1}{3\sigma_{(1)}a_0} f(q), \quad f(q) = \exp(a_0q) - 1 \quad (3.2)$$

$$i = 1, 2; \quad j = 2, 1, \quad i \neq j$$

Здесь и далее при наличии повторяющихся индексов у одной тензорной величины суммирование по ним не производится.

Значения напряжений (3.1) и фазовых деформаций (3.2) при $q = q^* = 1$ подставляются в качестве величин $\sigma_{ij}^1(q)$ и $\varepsilon_{ij}^{(2)*}$ в определяющие уравнения для фазовых деформаций при обратном превращении (2.4), которые принимают в результате вид

$$d\varepsilon_{ii}^{(2)} = \left(-\frac{2p_{ii}^1 - p_{jj}^1}{3\sigma_{(1)}} + a_0\varepsilon_{ii}^{(2)} \right) dq, \quad d\varepsilon_{12}^{(2)} = 0 \quad (3.3)$$

Уравнения (3.3) должны решаться при начальных условиях

$$\varepsilon_{ii}^{(2)}(1) = \varepsilon_{ii}^{(2)*}, \quad \varepsilon_{12}^{(2)}(1) = 0 \quad (3.4)$$

Видно, что решение задачи (3.3), (3.4) для обратного превращения имеет тот же самый вид (3.2), что и выражения для фазовых деформаций при прямом превращении. Необходимо подчеркнуть, что в отличие от прямого превращения, для рассматриваемого обратного перехода фазовые деформации выражаются по формулам (3.2) не через те напряжения, которые действуют при обратном превращении, а через те напряжения, которые действовали ранее на предварительном этапе прямого превращения.

Уравнение диаграммы обратного перехода (2.5) при использовании зависимостей (2.7) можно представить в форме

$$q = (1 + \cos(\pi(t - k^* \sigma_i^2)))/2, \quad t = (T - A_1)/(A_1 - A_2), \quad k^* = k(A_1 - A_2) \quad (3.5)$$

При использовании соотношений (2.8), (2.9) вместо (3.5) будут справедливы зависимости

$$q = (1 + \cos(\pi(t - k^* \varepsilon_{ij}^{(2)*} \sigma_{ij}^{2*} / \varepsilon_i^{(2)*}))) / 2 \quad (3.6)$$

4. Система уравнений в вариациях для возмущенного состояния. Для рассматриваемого здесь случая потери устойчивости при обратном превращении, так же как и для потери устойчивости при прямом превращении можно показать [5, 6], что наличие малых возмущений температуры не меняет значений критических сил. Поэтому ниже при написании уравнений для возмущенного состояния температура не варьируется.

В случае, если для зависимости температур обратного превращения от действующих напряжений принимается формула (2.7), то для вариации объемной доли мартенситной фазы q из формул (3.5) можно получить

$$\delta q = \psi(q) k^* \delta \sigma_i^2 U_+(-\delta \sigma_i^2), \quad \delta \sigma_i^2 = \frac{(2\sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2) \delta \sigma_{11}^2 + (2\sigma_{22}^2 - \sigma_{11}^2) \delta \sigma_{22}^2}{2\sigma_i^2} \quad (4.1)$$

$$\psi(q) = \pi \sqrt{q(1-q)}, \quad U_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

Пусть используется соотношение (2.8), (2.9) для характерных температур обратного перехода. Следуя (3.2), интенсивность фазовых деформаций $\varepsilon_i^{(2)}$, накапливаемых в процессе прямого превращения, выражается через интенсивность действующих при прямом превращении постоянных напряжений σ_i^1 по формуле

$$\varepsilon_i^{(2)} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^1}{\sigma_{(1)} a_0} (\exp(a_0 q) - 1) \quad (4.2)$$

Используя выражения (3.1), (3.2) и (4.2) для величины $\varepsilon_{ij}^{(2)*} \sigma_{ij}^{2*} / \varepsilon_i^{(2)*}$ можно получить

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{(2)*} \sigma_{ij}^{2*}}{\varepsilon_i^{(2)*}} = \frac{(2\sigma_{11}^1 - \sigma_{22}^1) \sigma_{11}^2 + (2\sigma_{22}^1 - \sigma_{11}^1) \sigma_{22}^2}{2\sigma_i^1} \quad (4.3)$$

Следовательно, при подсчете вариации δq (3.6), в отличие от (4.1) получается

$$\delta q = \psi(q)k^*\delta(\varepsilon_{ij}^{(2)}\sigma_{ij}^{2'}/\varepsilon_i^{(2)})U_+(-\delta(\varepsilon_{ij}^{(2)}\sigma_{ij}^{2'}/\varepsilon_i^{(2)})) \quad (4.4)$$

где на основании (4.3) справедливо соотношение

$$\delta\left(\frac{\varepsilon_{ij}^{(2)*}\sigma_{ij}^{2'}}{\varepsilon_i^{(2)*}}\right) = \frac{(2\sigma_{11}^1 - \sigma_{22}^1)\delta\sigma_{11}^2 + (2\sigma_{22}^1 - \sigma_{11}^1)\delta\sigma_{22}^2}{2\sigma_i^1} \quad (4.5)$$

формально напоминающее выражение (4.1) для вариации интенсивности напряжений, но по содержанию являющимся существенно более простым, поскольку вариация величины $\varepsilon_{ij}^{(2)*}\sigma_{ij}^{2'}/\varepsilon_i^{(2)*}$ линейным образом выражается через вариации напряжений $\delta\sigma_{11}^2, \delta\sigma_{22}^2$, действующих на этапе обратного превращения. В отличие от (4.1) коэффициенты этого линейного выражения – постоянные величины (зависящие от напряжений, действовавших на этапе прямого превращения).

Гипотеза прямых нормалей записывается применительно к пластине с учетом (2.1), (2.2) в виде

$$\varepsilon_{ii}^0 - x_3 w_{,ii} = \frac{\sigma_{ii}^2 - \mu(q)\sigma_{jj}^2}{E(q)} + \varepsilon_{ii}^{(2)}, \quad \varepsilon_{12}^0 - x_3 w_{,12} = \frac{\sigma_{12}^2}{2G(q)} + \varepsilon_{12}^{(2)} \quad (4.6)$$

Здесь x_3 – ортогональная пластине координата, ε_{ij}^0 – деформации срединной плоскости пластины, w – прогиб срединной плоскости пластины, а символы после запятой в нижнем индексе указывают на взятие частной производной вдоль соответствующей координаты.

Следуя (3.3), (3.2) для вариации фазовых деформаций можно получить

$$\delta\varepsilon_{ii}^{(2)} = -\frac{2p_{ii}^1 - p_{jj}^2}{3\sigma_{(1)}} \exp(a_0 q) \delta q, \quad \delta\varepsilon_{12}^{(2)} = 0 \quad (4.7)$$

Беря вариации от обеих частей равенств (4.6), учитывая (4.7), (4.1), (2.3) и разрешая полученные выражения относительно вариаций напряжений, для определяющих соотношений (2.7) можно получить

$$\delta\sigma_{ii} = \frac{E(q)}{1 - \mu^2(q)} \left[(\delta\varepsilon_{ii}^0 - x_3 \delta w_{,ii}) \frac{1 + \xi_{jj}(q)U_+}{1 + \xi(q)U_+} + (\delta\varepsilon_{jj}^0 - x_3 \delta w_{,jj}) \frac{\mu(q) - \xi_{ij}(q)U_+}{1 + \xi(q)U_+} \right] \quad (4.8)$$

$$\delta\sigma_{12} = 2G(q)(\delta\varepsilon_{12}^0 - x_3 \delta w_{,12})$$

$$\xi_{ii} = \frac{E(q)\psi(q)k^*(2\sigma_{ii}^2 - \sigma_{jj}^2)}{2\sigma_i^2} \left(\Delta_1 \sigma_{ii}^2 - \Delta_2 \sigma_{jj}^2 + \frac{2\sigma_{ii}^1 - \sigma_{jj}^1}{3\sigma_{(1)}} \exp(a_0 q) \right)$$

$$\xi_{ij} = \frac{2\sigma_{jj}^2 - \sigma_{ii}^2}{2\sigma_{ii}^2 - \sigma_{jj}^2} \xi_{ii} \quad (4.9)$$

$$\xi(q) = \frac{\xi_{11}(q) + \xi_{22}(q) + \mu(q)(\xi_{12}(q) + \xi_{21}(q))}{1 - \mu^2(q)}, \quad U_+ = U_+(-\delta\sigma_i)$$

$$\Delta_1 = 1/E_1 - 1/E_2, \quad \Delta_2 = \mu_1/E_1 - \mu_2/E_2$$

Здесь и далее величины без знака вариации относятся к докритическому состоянию.

Продельвая аналогичные вычисления для второго варианта выражений характерных температур обратного превращения (2.8), (2.9) с использованием уже соотношений (4.4), (4.5) для вариации параметра фазового состава, можно получить те же выражения для вариаций напряжений, но с другими формулами для параметров ξ_{ij} и U_+ :

$$\xi_{ii} = \frac{E(q)\Psi(q)k^*(2\sigma_{ii}^1 - \sigma_{jj}^1)}{2\sigma_i^1} \left(\Delta_1\sigma_{ii}^2 - \Delta_2\sigma_{jj}^2 + \frac{2\sigma_{ii}^1 - \sigma_{jj}^1}{3\sigma_{(1)}} \exp(a_0q) \right) \quad (4.10)$$

$$\xi_{ij} = \frac{2\sigma_{jj}^1 - \sigma_{ii}^1}{2\sigma_{ii}^1 - \sigma_{jj}^1} \xi_{ii}, \quad U_+ = U_+ \left(-\frac{\varepsilon_{ij}^{2*} \delta\sigma_{ij}^1}{\varepsilon_i^{2*}} \right)$$

С использованием вариации напряжений (4.8) определяются вариации внутренних сил и моментов

$$\delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad \delta N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_{ij} dx_3 \quad (i = j = 1, 2) \quad (4.11)$$

Полученные с помощью (4.11) выражения для вариаций моментов подставляются в уравнение изгиба [14]

$$\delta M_{11,11} + 2\delta M_{12,12} + \delta M_{22,22} = h(\sigma_{11}^2 \delta w_{,11} + \sigma_{22}^2 \delta w_{,22}) \quad (4.12)$$

которое и должно иметь нетривиальные решения при критических значениях нагрузок. Во всех рассмотренных в данной работе случаях результат этой подстановки приводит к уравнению устойчивости в форме

$$A_{11}(q)\delta w_{,1111} + 2A_{12}(q)\delta w_{,1122} + A_{22}(q)\delta w_{,2222} - \frac{h}{D(q)}(\sigma_{11}\delta w_{,11} + \sigma_{22}\delta w_{,22}) = 0 \quad (4.13)$$

$$D(q) = \frac{E(q)h^3}{12(1 - \mu^2(q))}$$

В качестве примера рассматривается свободно опертая по всем кромкам пластина. Используется представление прогиба в двойных тригонометрических рядах

$$\delta w(x_1, x_2) = \sum_n \sum_m \delta w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_2\right) \quad (4.14)$$

Подстановка (4.14) в (4.13) дает следующее соотношение для определения критических нагрузок:

$$P_{11}^2 \left(\frac{m}{a}\right)^2 + P_{22}^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 = \frac{D(q)\pi^2}{h} \left[A_{11}(q) \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2A_{12}(q) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + A_{22}(q) \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \quad (4.15)$$

Полученное путем решения уравнения (4.15) значение параметра критической нагрузки необходимо минимизировать как по m и n , так и по q . Решения в рамках различных гипотез различаются выражениями для коэффициентов $A_{ij}(q)$, которые будут приведены ниже.

5. Решения в рамках гипотезы “фиксированного фазового состава”. Гипотеза “фиксированного фазового состава” [4–6] состоит в том, что при переходе в смежную форму равновесия параметр фазового состава не меняется. Для получения раз-

решающих уравнений в рамках этой гипотезы необходимо в соотношениях (4.8) положить $U_+ = 0$ для всех точек пластины. В результате получается $A_{11}(q) = A_{22}(q) = A_{12}(q) = 1$, оператор четвертого порядка в левой части (4.13) превращается в бигармонический, а само уравнение (4.13) – в уравнение устойчивости упругих пластин с переменной цилиндрической жесткостью $D(q)$, зависящей от параметра фазового состава. В данном случае правая часть соотношения (4.15), а, следовательно, и определяемые с помощью этого уравнения критические усилия не зависят от нагрузок, действовавших на предварительном этапе прямого превращения. Для большинства СПФ цилиндрическая жесткость является убывающей функцией параметра фазового состава. Поэтому наименьшие значения критических нагрузок соответствуют полностью мартенситному состоянию. Потеря устойчивости либо должна произойти в начальной точке обратного перехода, либо не произойти вовсе.

6. Решение в рамках гипотез “продолжающегося фазового перехода” и “продолжающегося нагружения”. В данном пункте рассматривается случай, когда за счет выбора малых вариаций действующих на этапе обратного превращения нагрузок в каждой точке изучаемой пластины удастся обеспечить выполнение условия $\delta\sigma_i < 0$

в случае использования соотношений (2.7) или $\varepsilon_{ij}^{(2)*} \delta\sigma'_{ij} / \varepsilon_i^{(2)*} < 0$ для соотношений (2.8), (2.9). Как видно, из уравнений (2.6), (4.1) или (4.4), в этом случае дополнительный фазовый переход будет иметь место в каждой точке пластины и при вычислении вариаций напряжений (4.8) для всех точек пластины необходимо положить $U_+ = 1$. В результате получаются следующие значения коэффициентов

$$A_{ii}(q) = \frac{1 + \xi_{ij}(q)}{1 + \xi(q)}, \quad A_{12}(q) = 1 - \mu(q) + \frac{2\mu(q) - \xi_{12}(q) - \xi_{21}(q)}{2(1 + \xi(q))} \quad (6.1)$$

Необходимо отметить, что зависимости (6.1) справедливы для обоих видов выражений для характерных температур обратного превращения (2.7) или (2.8), (2.9). Решения же для критических сил будут различаться за счет различных формул для $\xi_{ij}(q)$ (4.9) или (4.10) соответственно.

7. Решение для равномерной толщины зоны дополнительного фазового перехода. Разыскивается решение в рамках гипотезы “продолжающегося фазового перехода”, в предположении о том, что дополнительное фазовое превращение может испытывать не все сечение пластины, а только его часть. Прекращение дополнительного (обратного) фазового перехода может произойти при использовании соотношений (2.7) в части сечения, где при переходе в смежную форму равновесия интенсивность напряжений растет, что препятствует осуществлению явления “псевдоупругости”. При использовании соотношений (2.8), (2.9), прекращение дополнительного обратного превращения происходит в тех точках сечения, где при выпучивании растет величина $\sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^{(2)*}$. Данное предположение аналогично гипотезе “упругой разгрузки” для потери устойчивости при прямом превращении [6]. Для краткости за ним будет сохранено это название, хотя в данном случае речь может идти как об “упругой разгрузке”, так и об “упругой догрузке”.

В общем случае координата x_3^0 поверхности, разграничивающей зоны наличия и отсутствия дополнительного фазового перехода, зависит от координат x_1, x_2 , что затрудняет решение. Однако можно указать условия, при выполнении которых координата x_3^0 является постоянной величиной. Ниже будет показано, что если вариации температуры и нормальных усилий в плоскости пластины равны нулю

$$\delta t = \delta N_{11} = \delta N_{22} = 0 \quad (7.1)$$

то величина x_3^0 от координат срединной плоскости пластины не зависит. Сначала рассмотрим соотношения (2.7) для характерных температур обратного превращения. В силу условия непрерывности вариации интенсивности напряжений при переходе через искомого границу, отрицательности этой вариации в зоне дополнительного фазового перехода и ее положительности в зоне фиксированного фазового состава на самой границе эта вариация должна быть равна нулю. Записывая условие равенства нулю вариации интенсивности напряжений, а также два последние равенства (7.1) и решая данную систему, можно получить

$$x_3^0 = \frac{h}{\xi} \left(1 + \frac{\xi}{2} - \sqrt{1 + \xi} \right) \quad (7.2)$$

Поскольку величина ξ (7.2) от x_1, x_2 не зависит, то от этих координат не будет зависеть и величина x_3^0 .

Если же для характерных температур обратного превращения используется соотношение (2.8), (2.9), то на искомой границе должна быть равна нулю вариация (4.5). Это условие совместно с равенствами (7.1) приводит к тому же выражению (7.2), где величина ξ будет иметь другое значение, определяемое по третьей формуле (4.9), но уже с использованием величин ξ_{ij} , вычисляемых по формулам (4.10).

Осталось определить, при каких условиях на вариации внешних нагрузок возможно выполнение второго и третьего равенств (7.1). Видно, что для этого достаточно считать равными нулю вариации внешних нормальных нагрузок $\delta p_{11}^2 = \delta p_{22}^2 = 0$ и задать некоторым специальным образом малые возмущения поверхностных касательных усилий на поверхностях и кромках пластины. Формулы для этих возмущений не отличаются от полученных в [6] для задачи о потере устойчивости пластины при прямом превращении и здесь не приводятся.

Для определения критических нагрузок, соответствующих полученному решению, по первой формуле (4.11) могут быть найдены выражения для вариаций внутренних погонных моментов $\delta M_{11}, \delta M_{22}$. Исключив из этих выражений величины $\delta \epsilon_{11}^0, \delta \epsilon_{22}^0$ с помощью двух последних уравнений (7.1) и подставив полученные формулы в уравнения равновесия (4.12), можно сформулировать искомое дифференциальное уравнение, совпадающее по виду с (4.13), но с другими коэффициентами

$$A_{ii}(q) = \frac{\xi_{jj}(q)}{\xi(q)} + \left(1 - \frac{\xi_{jj}(q)}{\xi(q)} \right) \frac{4}{\xi(q)} \frac{2x_3^0}{h} \quad (7.3)$$

$$A_{12}(q) = 1 - \mu(q) - \frac{\xi_{12}(q) + \xi_{21}(q)}{2\xi(q)} + \left(\mu(q) + \frac{\xi_{12}(q) + \xi_{21}(q)}{2\xi(q)} \right) \frac{4}{\xi(q)} \frac{2x_3^0}{h}$$

8. Анализ результатов. Сравнение зависимостей (4.13), (4.15), (6.1), (7.2) и (7.3) с аналогичными формулами, полученными в [6], показывает, что задачу о потере устойчивости при обратном мартенситном превращении удалось свести к той же математической форме, что и задачу о потере устойчивости, вызванной прямым мартенситным превращением. Сходство это носит, однако, весьма формальный характер, поскольку существенно отличаются полученные в данной работе для обратного превращения и в [6] для прямого превращения выражения для коэффициентов $\xi_{ij}(q)$. Принципиальное отличие здесь состоит в том, что если для случая прямого превращения коэффициенты $\xi_{ij}(q)$, а, следовательно, и $A_{ij}(q)$ зависят от усилий, действующих на этапе прямого превращения, то для потери устойчивости, вызванной обратным превращением,

в общем случае, коэффициенты уравнения устойчивости являются функциями как нагрузок, действующих на рассматриваемом этапе обратного превращения, так и от нагрузок, которые действовали на предварительном этапе прямого превращения.

Видно, однако, что если в формулах для $\xi_{ij}(q)$ (4.9) или (4.10) положить

$$\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \sigma_{ij} \quad (8.1)$$

то они перейдут в зависимости для аналогичных коэффициентов, полученные в [6] для случая прямого превращения. Поэтому в рамках принятых допущений справедливо следующее положение. Пусть рассматриваются две задачи об определении критических размеров прямоугольной пластины из СПФ. В первой происходит прямое превращение под действием нагрузок (p_{11}, p_{22}) . Во второй анализируется явление потери устойчивости при обратном превращении под действием нагрузок (p_{11}, p_{22}) , которое происходит после прямого превращения под действием тех же нагрузок. В этом случае критические размеры пластины для обеих задач будут одинаковы.

Пусть компоненты тензоров напряжений, действовавших на этапах прямого и обратного превращений, связаны зависимостью

$$\sigma_{ij}^1 = \gamma \sigma_{ij}^2, \quad \gamma > 0 \quad (8.2)$$

частным случаем которой (при $\gamma = 1$) является соотношение (8.1). Подстановка (8.2) в (4.9) и (4.10) приводит к одинаковым формулам для коэффициентов ξ_{ij} для двух рассматриваемых выражений характерных температур обратного перехода (2.7) и (2.8), (2.9). Отсюда следует, что если компоненты тензоров напряжений, действовавших на этапах предварительного прямого и обратного превращений пропорциональны с положительным коэффициентом, то обе модели приводят к одинаковым значениям критических сил.

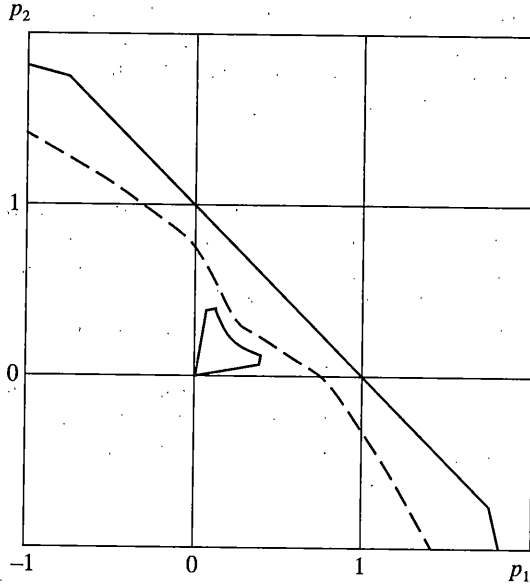
В общем случае, искомые критические нагрузки входят не только в левую, но и в правую часть (4.15) через коэффициенты $A_{ij}(q)$. Исключения составляют: решения в рамках гипотезы “фиксированного фазового состава” и случай использования соотношений (2.8), (2.9) для температур перехода, при условии, что переменностью упругих модулей при фазовом превращении можно пренебречь: $E_1 = E_2$, $G_1 = G_2$. При этом (4.15) можно явно разрешить относительно искомого параметра критической нагрузки, что облегчает процесс минимизации этой величины по q и m , n .

В качестве примера, иллюстрирующего различные подходы, изученные в работе, рассмотрена квадратная пластина из СПФ, характеризующаяся следующими значениями безразмерных параметров:

$$\frac{a}{b} = 1, \quad \frac{h}{b} = \frac{1}{20}, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{3}, \quad \mu_1 = 0.48,$$

$$\mu_2 = 0.33, \quad k^* E_2 = 480, \quad \frac{\sigma_{(1)}}{E_2} = 0.049, \quad a_0 = 0.718$$

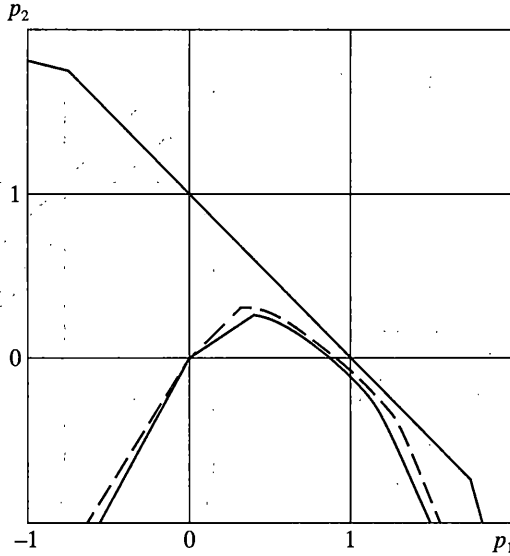
На фиг. 1 представлены границы областей устойчивости указанной пластины, получающиеся при использовании соотношений (2.7) для температур перехода. По осям координат отложены величины действующих нагрузок, отнесенные к критическому значению нагрузки одноосного сжатия такой пластины в мартенситном состоянии $p^* = 4D(1)\pi^2/(hb^2)$. Полученное решение относится к случаю, когда предварительное прямое превращение происходило под действием равнодвухосного сжатия нагрузками $p_{11}^1 = p_{22}^1 = 0.25p^*$.



Фиг. 1

Ломаная сплошная линия отвечает границе области устойчивости, полученной в рамках гипотезы “фиксированного фазового состава”. Штриховая кривая, занимающая на фиг. 1 промежуточное положение, соответствует решению, полученному в предположении о равномерной толщине зоны дополнительного фазового перехода. Следует отметить, что получающаяся при этом область устойчивости является вогнутой. Наконец, примыкающая к началу координат сплошная линия отвечает случаю, когда решение достигается в рамках гипотез “продолжающегося фазового перехода” и “продолжающегося нагружения”. Вид этой кривой вызывает сомнения. Действительно, если ее поведение в области $p_{11}^1 \approx p_{22}^2$, примыкающей к штриховой кривой (при этом $m = n = 1$) вполне приемлемо, то по мере удаления от оси симметрии $p_{11}^2 = p_{22}^2$, границы области сначала резко “отворачивают”, а затем просто “падают” к нулю. При этом, например для верхнего “падающего” участка кривой $m = 1$, а n по мере приближения к нулю многократно возрастает. Фактически при приближении к нулю для получения рассматриваемой границы анализировалась асимптотика уравнения (4.15) при $n \rightarrow \infty$. Конечно, невозможно считать такое поведение границы области устойчивости адекватным действительности. Более того, уравнение (4.15) позволяет находить корни, отвечающие растяжению вдоль обеих осей, что также вряд ли можно считать приемлемым.

Следует отметить, что неадекватные результаты получаются при использовании соотношения (2.7) лишь в том случае, когда напряженные состояния, соответствующие предварительному прямому и последующему обратному превращению, существенно различаются. В частности, следуя фиг. 1, критические нагрузки одноосного сжатия при обратном превращении стремятся к нулю, однако происходит это потому, что предварительное напряженное состояние в процессе предшествующего прямого превращения было равнодвухосным сжатием. Если же предварительное напряженное состояние на этапе прямого превращения было одноосным сжатием, то для критических



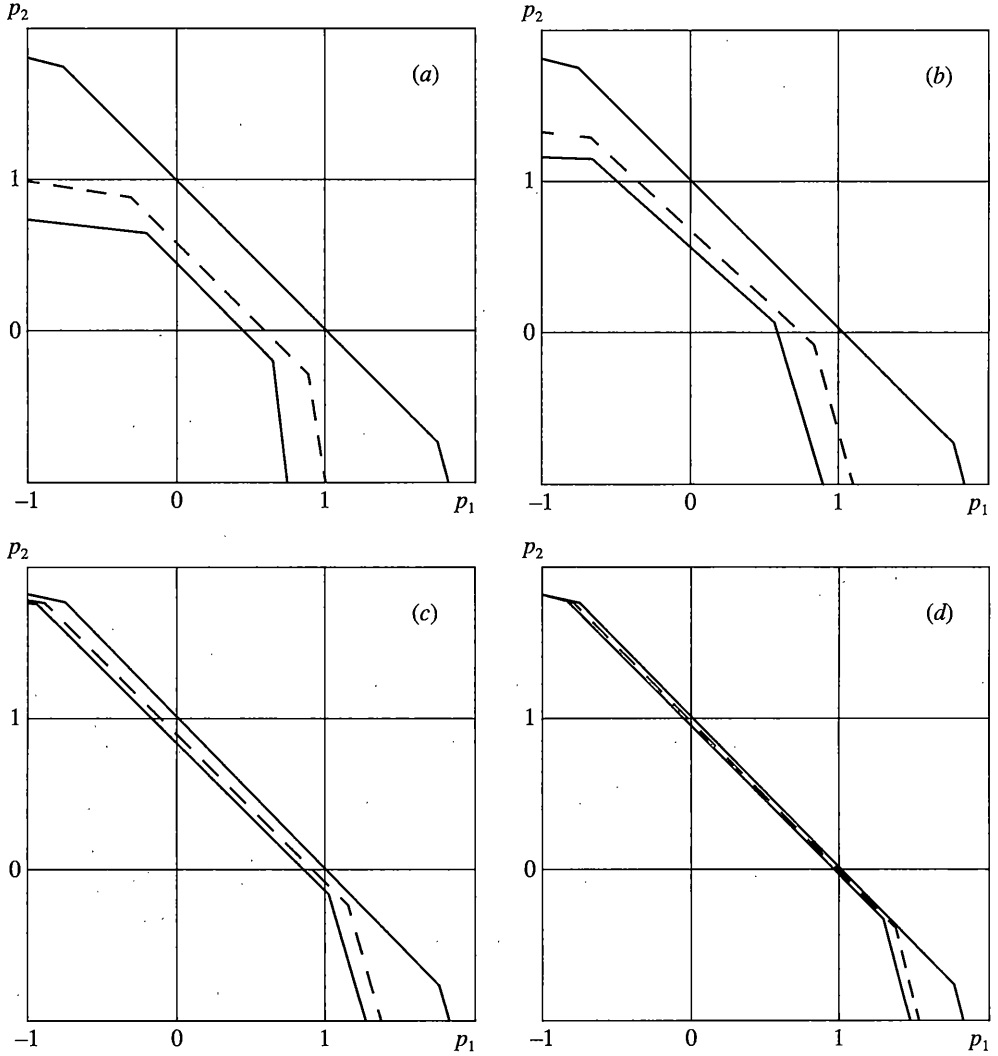
Фиг. 2

нагрузок одноосного сжатия при последующем обратном превращении получаются вполне приемлемые результаты, в то время как для существенно отличных от одноосного сжатия напряженных состояний решение никак нельзя назвать адекватным.

Этот факт иллюстрируется графиком, приведенным на фиг. 2; где построены области устойчивости для обратного превращения при двухосном нагружении после одноосного сжатия при прямом превращении вдоль оси 1: $p_{11}^1 = 0.5p^*$, $p_{22}^1 = 0$. Обозначения кривых на фиг. 1 и 2 совпадают. Как видно, в данном случае при одноосном сжатии вдоль той же оси 1 в процессе обратного превращения и близких напряженных состояниях получаются вполне реалистичные результаты, в то время как, например, для равнодвухосного сжатия $p_{11}^2 = p_{22}^2$ в данном случае решения явно являются неадекватными (критическая нагрузка стремится к нулю). Следует отметить, что в данном случае нереалистичные результаты получаются в рамках концепции “продолжающегося фазового перехода” и для гипотезы “продолжающегося нагружения” и для гипотезы “упругой разгрузки”.

В отличие от соотношений (2.7), выражения (2.8), (2.9) не приводят к сомнительным результатам в рамках концепции “продолжающегося фазового перехода”. На фиг. 3 приведены границы областей устойчивости рассматриваемой пластины из СПФ при обратном термоупругом фазовом превращении, найденные с использованием соотношений (2.8), (2.9). Фиг. 3, а соответствует нагрузке $p_{11}^1 = p_{22}^1 = 0.25p^*$ на этапе предшествующего прямого превращения, (b) – $p_{11}^1 = 1/3p^*$, $p_{22}^1 = 1/6p^*$; (c) – $p_{11}^1 = 0.5p^*$, $p_{22}^1 = 0$; (d) – $p_{11}^1 = 0.75p^*$, $p_{22}^1 = -0.25p^*$. Эти нагрузки подобраны так, чтобы на этапе прямого мартенситного перехода сохранял неизменное значение первый инвариант тензора напряжений. Обозначения на фиг. 1 и 3 совпадают.

В частности, область устойчивости, построенная на фиг. 3, c, соответствует тому же случаю одноосного сжатия на этапе прямого превращения, для которого с исполь-



Фиг. 3

зованием соотношения (2.7) получены парадоксальные результаты, приведенные на фиг. 2. Как видно, при использовании соотношений (2.8), (2.9), границы области устойчивости получаются вполне реалистичными.

Из данных фиг. 3 следует, что наименьшие значения критических нагрузок получаются при использовании гипотез “продолжающегося фазового перехода” и “продолжающегося нагружения”. К таким же выводам приводит анализ устойчивости пластины из СПФ при прямом термоупругом превращении [6]. Фиг. 3 позволяет судить о том, как трансформируется область устойчивости пластины из СПФ, соответствующая обратному переходу, по мере того как нагрузка на предшествующем этапе становится все более несимметричной. Наиболее опасным при условии $p_{11}^1 + p_{22}^1 =$

= const является вариант, соответствующий фиг. 3, а, когда пластина на предшествующем этапе сжата равными поверхностными силами вдоль всех своих кромок.

Причина появления нереалистичных решений задач устойчивости при обратном превращении в случае использования соотношений (2.7) для характерных температур и концепции “продолжающегося фазового перехода” состоит в том, что вариация интенсивности напряжений терпит разрыв при $\sigma_i = 0$. Действительно, основным фактором, определяющим специфику процесса потери устойчивости элементов из СПФ является наличие вариаций фазовых деформаций, связанных с дополнительным фазовым переходом. Видно, что в рамках системы определяющих соотношений (2.2), (2.4), (2.7) вариация фазовых деформаций при обратном превращении, если оно осуществляется после прямого превращения, происходящего под действием постоянных напряжений, может быть определена по формулам

$$\delta \varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{3}{2} \chi_1(q) \frac{\sigma_{ij}^{1'} \sigma_{mn}^{2'} \delta \sigma_{mn}^{2'}}{\sigma_i^2}, \quad \chi_1(q) = \frac{\exp(a_0 q) k^* \psi(q)}{\sigma_{(1)}} \quad (8.3)$$

В этих формулах всюду положено $U_+ = 1$ в соответствии с концепцией “продолжающегося нагружения”. Очевидно, что при $\sigma_{ij}^{1'} \neq \sigma_{ij}^{2'}$, т.е. в случае, если напряжения, действующие при прямом и последующем обратном превращениях различаются, вариации фазовых деформаций (8.3) терпят разрыв при $\sigma_i^2 \rightarrow 0$. Именно с наличием этого разрыва связано нереалистичное поведение собственных значений задачи при существенно различающихся величинах $\sigma_{ij}^{1'}$ и $\sigma_{ij}^{2'}$. В то же время, если напряженные состояния при прямом и последующем обратном превращениях совпадают: $\sigma_{ij}^{1'} = \sigma_{ij}^{2'}$, то из (8.3) следует

$$\delta \varepsilon_{ij}^{(2)} = \chi_1(q) \sigma_{ij}^{2'} \sigma_{mn}^{2'} \delta \sigma_{mn}^{2'} / \sigma_i^2 \quad (8.4)$$

и вариации фазовых деформаций являются непрерывными функциями вариаций напряжений при всех значениях $\sigma_{ij}^{2'}$, в том числе и при $\sigma_i^2 = 0$ ($\delta \varepsilon_{ij}^{(2)} \rightarrow 0$ при $\sigma_i^2 \rightarrow 0$). Поэтому при совпадении напряженных состояний прямого и обратного превращений получаются реалистичные значения критических сил.

Пусть теперь используются соотношения (2.8), (2.9) для характерных температур обратного перехода. В этом случае можно получить

$$\delta \varepsilon_{ij}^{(2)} = \chi_2(q) \sigma_{ij}^{1'} \delta \sigma_{ij}^{2'}, \quad \chi_2 = k^* \exp(a_0 q) \psi(q) \varepsilon_{ij}^{(2)*} / (\sigma_{(1)} \varepsilon_i^{(2)*}) \quad (8.5)$$

Здесь уже вариации фазовых деформаций являются линейными непрерывными функциями вариаций напряжений $\delta \sigma_{ij}^{2'}$ для любых сочетаний напряженных состояний прямого и обратного превращения, что и приводит к реалистичным решениям задач устойчивости.

Анализ представленных результатов позволяет сделать выбор в пользу определяющих соотношений (2.8) для температур обратного мартенситного перехода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 02-01-01075, и по программе РАН, проект “Среды с микроструктурой, учет эффекта нелокальности, внутренних степеней свободы, дискретности, вида напряженного состояния, кристаллографических особенностей термоупругих фазовых превращений”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хусаинов М.А. Исследование эффекта осесимметричного выпучивания круглых пластин // Ж. техн. физики. 1997. Т. 67. № 6. С. 118–120.
2. Мовчан А.А., Казарина С.А. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 82–89.
3. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость “стойки Шенли” при ползучести или прямом термоупругом мартенситном превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. №1. С. 89–102.
4. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 2. С. 132–144.
5. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситное превращение под действием сжимающих напряжений // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 3. С. 169–178.
6. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 1. С. 60–72.
7. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
8. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 197–205.
9. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации фазовой диаграммы и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 2. С. 173–181.
10. Мовчан А.А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 79–90.
11. Liang C., Rogers C.A. One – dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. Intelligent Material System and Structures. 1990. V. 1. № 2. P. 207–234.
12. Nishimura F., Watanabe N., Watanabe T., Tanaka K. Transformation conditions in an Fe-based shape memory alloy under tensile – torsional loads: Martensite start surface and austenite start / finish planes // Mater. Sci. Eng. Ser. A. 1999. V. 264. № 1–2. P. 232–244.
13. Tanaka K., Watanabe T. Transformation conditions in an Fe-based shape memory alloy: an experimental study // Arch. Mech. 1999. V. 51. № 6. P. 805–832.
14. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1991. 334 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.02.2004