

УДК 531.38

© 2004 г. И.Г. БОРУК, Л.Г. ЛОБАС, Л.Д. ПАТРИЦИО

**О СОСТОЯНИЯХ РАВНОВЕСИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО ДВОЙНОГО
МАЯТНИКА СО СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ НА УПРУГОЗАДЕЛАННОМ
ВЕРХНЕМ КОНЦЕ**

Исследована модель упругого криволинейного стержня со следящей силой в виде перевернутого двухзвенного математического маятника с упруго-вязкими шарнирами. Показано, что при некоторых значениях модуля следящей силы и жесткости упругой заделки верхнего конца маятника возможна дивергентная бифуркация, в результате которой вертикальное положение равновесия теряет устойчивость и появляются два новых невертикальных устойчивых состояния равновесия (“бифуркация вилки” или бифуркация трехкратного равновесия).

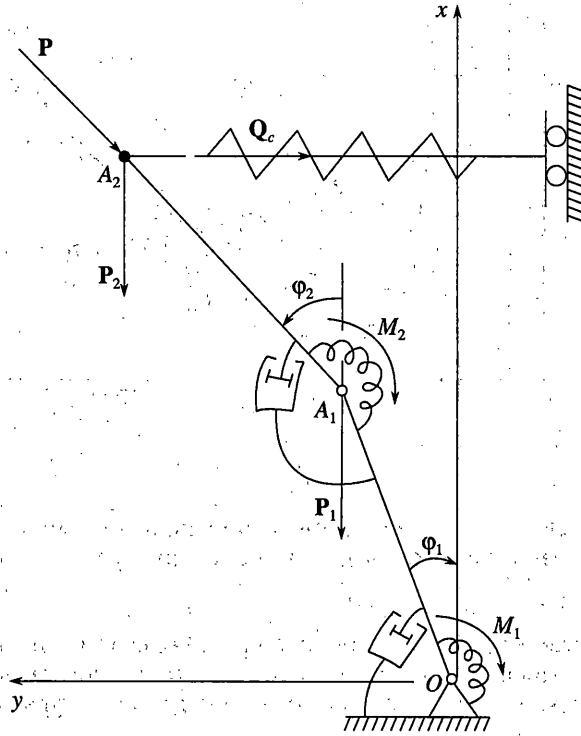
1. Объект исследования. Задача Циглера [1] получила значительный научный интерес [2–8]. В указанных работах исследовалось положение равновесия, при котором оба звена маятника занимают вертикальное положение. Очевидна возможность существования сочетания параметров маятника, допускающая наклонные состояния равновесия. Ниже описана методика нахождения таких состояний.

Пусть φ_1, φ_2 – углы отклонения от вертикали нижнего и верхнего звеньев (фиг. 1); $l_1 = OA_1, l_2 = A_1A_2$ – длины соответствующих звеньев, причем звенья предполагаются невесомыми; m_1, m_2 – массы материальных точек, находящихся на верхних концах звеньев; P – модуль следящей силы, приложенной к верхнему звену; c – жесткость упругой заделки этого звена; μ_1 – коэффициент вязкости в нижнем шарнире, учитывающий действие внешнего трения; μ_2 – коэффициент вязкости в промежуточном шарнире, отражающий влияние внутреннего трения в системе; c_1, c_2 – жесткости спиральных пружин в шарнирных соединениях. Составив дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода по обобщенным координатам φ_1, φ_2 , получаем следующие дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения двухзвенного математического маятника:

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ & - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 + cl_1(l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 + (c_1 + c_2)\varphi_1 - \\ & - c_2\varphi_2 + (\mu_1 + \mu_2)\dot{\varphi}_1 - \mu_2\dot{\varphi}_2 - Pl_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2gl_2 \sin \varphi_2 + \\ & + cl_2(l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) \cos \varphi_2 - c_2(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = 0 \end{aligned}$$

2. Характер опасности границы области устойчивости, отвечающей нулевому корню характеристического уравнения. Система дифференциальных уравнений (1.1) имеет решение $\varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = 0$, отвечающее верхнему вертикальному положению равновесия обоих звеньев маятника. На плоскости параметров c и P границей области устойчивости служат гиперболы $P = P_0(c)$ и $P = P_1(c)$. На первой характеристическое уравнение матрицы линеаризации имеет пару чисто мнимых корней, на другой –



Фиг. 1

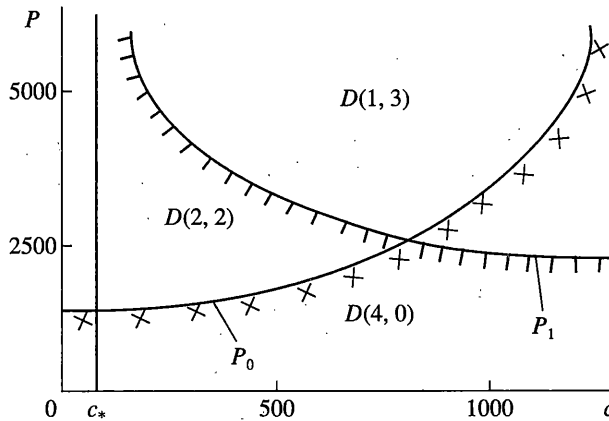
один нулевой корень; действительные части остальных корней отрицательные. В случае $m_1 = 10\text{кг}$, $m_2 = 5\text{кг}$, $l_1 = l_2 = 0.5\text{м}$, $c_1 = c_2 = 400\text{Н/м}$, $\mu_1 = \mu_2 = 10\text{ Нмс}$ части обеих гипербол, лежащие в первом квадранте, изображены на фиг. 2. Символы $D(s, 4-s)$ отвечают областям, в которых s корней характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, $4-s$ – положительные ($s = 1, \dots, 4$). Исследуем характер опасности [9] границы $P = P_1(c)$, где

$$P_1(c) = \frac{A_{41}c + A_{40}}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)(c - c_*)}, \quad A_{41} = (l_1 + l_2)[c_2(l_1 + l_2) - m_2 g l_1 l_2] + l_2^2(c_1 - m_1 g l_1)$$

$$A_{40} = (c_2 - m_2 g l_2)[c_1 - (m_1 + m_2)g l_1] - c_2 m_2 g l_2, \quad c_* = \frac{m_2 g}{l_1 + l_2}$$

Введем новые переменные $x_1 = \phi_1$, $x_2 = \dot{\phi}_1$, $x_3 = \phi_2$, $x_4 = \dot{\phi}_2$ и запишем полиномиальные аппроксимации дифференциальных уравнений возмущенного движения, ограничившись членами третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^4 a_{ij} x_j + P_i(x_1, \dots, x_4) \\ P_i(x_1, \dots, x_4) &= \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 a_{klm}^{(i)} x_k x_l x_m + o(|x|^3) \\ a_{klm}^{(i)} &= a_{kml}^{(i)} = a_{mkl}^{(i)} \quad (i = 1, \dots, 4) \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 2

Коэффициенты разложений имеют громоздкий аналитический вид и поэтому здесь не приводятся. Динамическая система (2.1) имеет структуру

$$\dot{x} = f(x), \quad f(-x) = -f(x), \quad x \in R^4$$

т.е. относится к системам с центральной (или простейшей [10]) симметрией. Для таких систем в [10] на основании [11] получено явное выражение первой ненулевой ляпуновской величины в случае нулевого корня характеристического уравнения матрицы линеаризации. Пусть A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $A = \|a_{ij}\|_1^4$. Если нумерацию переменных x_1, \dots, x_4 провести так, чтобы $A_{44} \neq 0$, то в (2.1) вместо переменной x_4 введем переменную $x = \sum A_{i4} x_i$. Динамическая система (2.1) преобразуется к виду

$$\dot{x} = X(x, x_1, x_2, x_3) \tag{2.2}$$

$$\dot{x}_s = \sum_{r=1}^3 b_{sr} x_r + b_s x + P_s(x_1, x_2, x_3, x_4(x, x_1, x_2, x_3)) \tag{2.3}$$

$$X(x, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^4 a_i P_i(x_1, x_2, x_3, x_4(x, x_1, x_2, x_3)) \tag{2.4}$$

$$x_4(x, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{a_4} \left(x - \sum_{s=1}^3 a_s x_s \right)$$

$$b_{sr} = a_{sr} - a_r b_s, \quad b_s = a_{s4}/a_4 \quad (s = 1, 2, 3)$$

Согласно [11] приравняем нулю правые части не критических уравнений (2.3) и будем искать решение соответствующей системы конечных (в данном случае алгебраических) уравнений в виде $x_r = u_r(x)$, $u_r(0) = 0$. Разыскивая функции $u_r(x)$ в виде степенных рядов, сходящихся [10, 11] при достаточно малых значениях критической переменной x , допустимо ограничиться лишь величинами первого порядка

$$u_r = \sigma_r x + \dots, \quad \sigma_r = A_{4r} / \sum_{i=1}^4 a_i A_{4i} \quad (r = 1, 2, 3)$$

P, H	$\varphi_1^*, \text{рад}$	$\varphi_2^*, \text{рад}$
2541.55	0.9138	0.3380
2543	0.9526	0.3598
2545	0.9911	0.3826
2550	1.0568	0.4245
2553	1.0853	0.4442
2557	1.1163	0.4666
2560	1.1359	0.4813
2562	1.1476	0.4903
2565	1.1635	0.5030

Для суждения об устойчивости нулевого решения системы типа (2.1) необходимо составить выражение

$$X(x, u_1(x), u_2(x), u_3(x)) = qx^3 + o(x^3)$$

На основании (2.4) имеем

$$x_4(x, u_1(x), u_2(x), u_3(x)) = \sigma_4 x + \dots, \sigma_4 = \frac{1}{a_4} \left(1 - \sum_{r=1}^3 a_r \sigma_r \right)$$

Поэтому

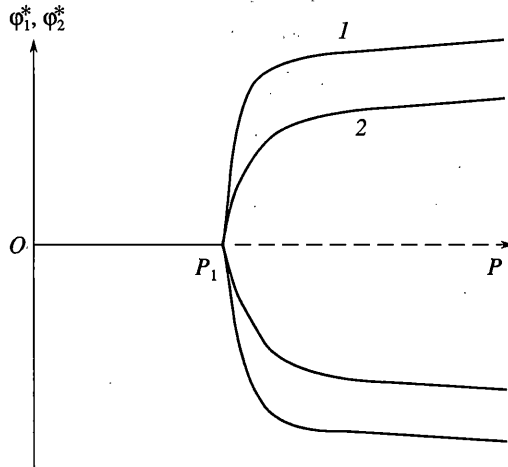
$$q = \sum_{i=1}^4 a_i \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 a_{klm}^{(i)} \sigma_k \sigma_l \sigma_m$$

Для указанных выше числовых значений параметров $q < 0$, поэтому верхнее вертикальное положение равновесия маятника асимптотически устойчиво (нелинейная устойчивость) при $P = P_1$ [11], а гипербола $P = P_1(c)$ является безопасной границей области асимптотической устойчивости [9].

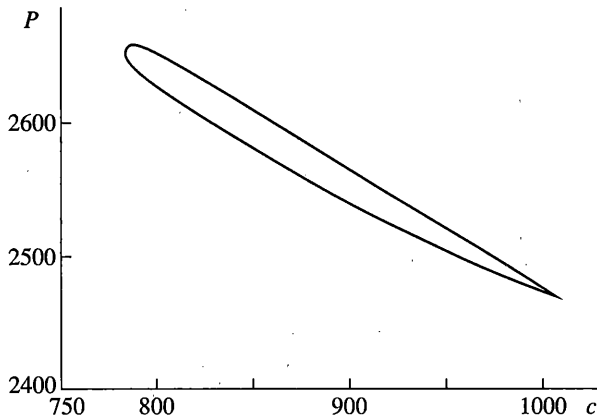
3. Существование невертикальных положений равновесия. Поскольку $q < 0$ на границе $P = P_1$, то согласно [12] в области $D(3, 1)$ дивергентной неустойчивости вертикальных положений равновесия существуют два (невертикальных) устойчивых положения равновесия, т.е. при $P = P_1$ в начале координат фазового пространства динамической системы (2.1) рождается кратная особая точка – имеет место “бифуркация вилки” или бифуркация трехкратного равновесия. Это приводит к тому, что исследуемая точка $\varphi_1 = 0, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_2 = 0$ фазового пространства хотя и становится неустойчивой при $P > P_1(c)$, однако в ее окрестности существуют две устойчивые особые точки типа узловых. Поэтому текущие возмущения в этом случае ограничены: после потери устойчивости основного (исследуемого) стационарного состояния система переходит к другому устойчивому стационарному состоянию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_1(t) = \varphi_1^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_2(t) = \varphi_2^*, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_2(t) = 0$$

Пусть, например, $c = 900 \text{ Н/м}$, тогда $P_1(c) = 2541 \text{ Н}$. С увеличением модуля следящей силы значения величин φ_1^* и φ_2^* возрастают (таблица).



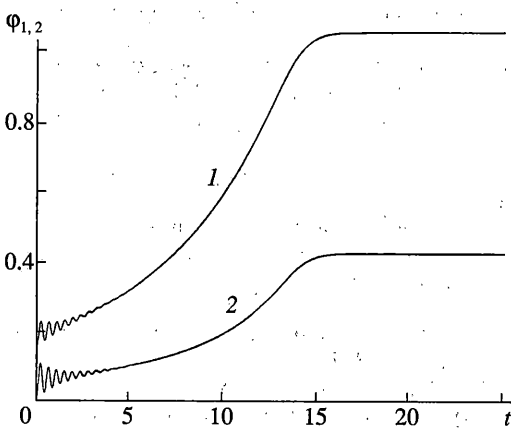
Фиг. 3



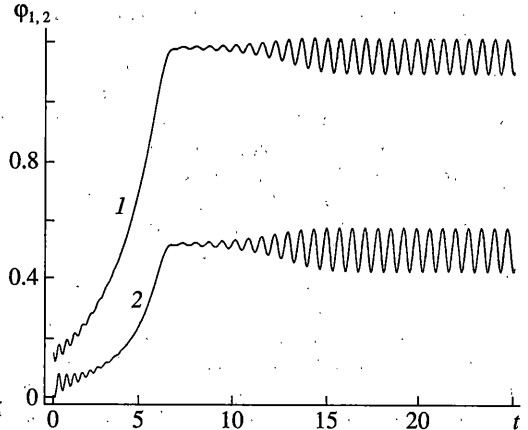
Фиг. 4

Качественные зависимости $\Phi_1^*(P)$ (кривая 1), Φ_2^* (кривая 2), типичные для бифуркаций типа вилки, показаны на фиг. 3. Штриховая линия на оси абсцисс означает, что при $P > P_1$ нулевое решение системы (1.1) неустойчиво. Область существования наклонных положений равновесия маятника представлена на фиг. 4. Интегральные кривые системы (1.1), полученные для $c = 900$ Н/м, $P = 2500$ Н и изображенные на фиг. 5, иллюстрируют тот факт, что с течением времени верхнее вертикальное положение равновесия маятника теряет устойчивость, поскольку значения функций $\Phi_1(t)$ (кривая 1) и $\Phi_2(t)$ (кривая 2) отходят достаточно далеко от невозмущенных (нулевых) значений. При дальнейшем увеличении времени $t[s]$ эти функции стабилизируются.

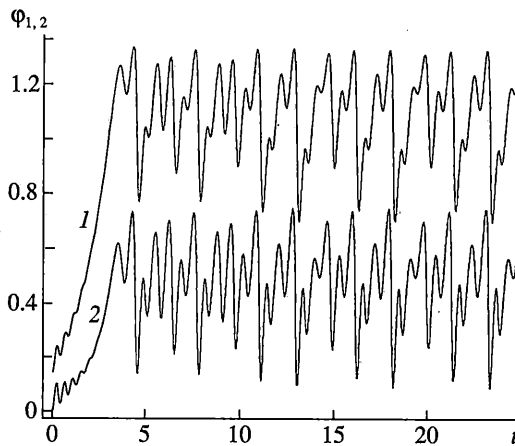
Интегральные кривые системы (1.1), полученные для значений P , превышающих приведенные в таблице и изображенные для $P = 2570$ Н на фиг. 6, показывают, что при этих P в фазовом пространстве маятника происходят повторные бифуркации:



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

особая точка с фазовыми координатами $\varphi_1 = \varphi_1^*$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi_2^*$, $\dot{\varphi}_2 = 0$ теряет устойчивость вследствие бифуркации рождения устойчивого предельного цикла (бифуркация Андронова–Хопфа). При $P > 2565$ Н по φ_1 и φ_2 происходят одночастотные колебания с небольшими амплитудами около определенных значений. Амплитуда тем больше, чем больше P . При дальнейшем увеличении значений P (например, при $P = 2590$ Н) возникают многочастотные периодические режимы движения (фиг. 7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing.-Arch. 1952. 20. H.1. S. 49–56.
2. Hagedorn P. On the destabilizing effect of non-linear damping in nonconservative systems with follower forces // Intern. J. Non-linear Mech. 1970. 5. № 2. P. 341–358.
3. Пановко Я.Г., Сорокин С.В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 135–139.

4. Troger H., Steindl A. Nonlinear Stability and Bifurcation Theory. Wien; New York: Springer, 1991. 408 p.
5. Агафонов С.А. Об устойчивости и автоколебаниях двойного маятника с упругими элементами, находящегося под действием следящей силы // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 185–190.
6. Агафонов С.А. Эффект стабилизации равновесия маятника Циглера параметрическим возбуждением // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 36–40.
7. Жинжер Н.И. Влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 149–155.
8. Сейранян А.П. О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределенности критической нагрузки // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 3. С. 323–326.
9. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
10. Лобас Л.Г. Нелинейная устойчивость и бифуркации типа вилки в динамических системах с простейшей симметрией // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 327–332.
11. Ляпунов А.М. Собр. соч. В 3 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. 473 с.
12. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Вещественные бифуркации двухзвенных систем с качением // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. № 3. С. 418–425.

Киев, Ковилья (Португалия)

Поступила в редакцию
21.01.2002