

УДК 539.3;534.1

© 2004 г. В.А. КРЫСЬКО, Т.В. ШЕКАТУРОВА

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В работе исследуются хаотические колебания детерминированных геометрически нелинейных пологих изотропных упругих конических оболочек вращения при действии поперечной знакопеременной нагрузки. Влияние сил инерции в направлениях, касательных к срединной поверхности, и инерция поворота нормального сечения не учитываются. Используется метод Рунге. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений решается методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности.

Численный анализ проводится на основе нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений. Выявлены новые сценарии перехода колебаний гибких конических оболочек из состояния гармонических колебаний в хаотические. Изучается вопрос о развитии различных форм колебаний в зависимости от ряда параметров: стрелы подъема оболочки над планом; амплитуды и частоты вынуждающей силы; количества членов, удерживаемых в разложении основных функций в ряды, что позволяет рассмотреть важный вопрос о переходе распределенной системы к дискретной и решить вопрос, исчезает ли хаос при достаточно большом числе членов разложения основных функций в ряды.

1. Введение. Исследованию динамики конических оболочек в отечественной и зарубежной научной литературе посвящено большое число публикаций ввиду важности данной проблемы, но, в основном, исследовались линейные колебания, в меньшей мере – динамическая потеря устойчивости при действии поперечного импульса конечной или бесконечной продолжительности во времени. Исследования же хаотических колебаний конических оболочек в литературе не нашли своего отражения. Данная работа является попыткой заполнить указанный пробел. Для сферических пологих оболочек, прямоугольных пластин, и пластин бесконечной длины при действии продольных знакопеременных нагрузок данный вопрос изучался в [1–7].

2. Постановка задачи и метод решения. Из принципа возможных перемещений, основное соотношение которого имеет вид:

$$-\delta(U_u + U_c) + \iint R \delta w ds = 0$$

где U_u , U_c – потенциальная энергия изгиба и срединной поверхности соответственно, R – нагрузка и сила инерции, используя соотношения геометрически нелинейной теории пологих оболочек вращения [8, 9] получим вариационное уравнение

$$\delta \iint \left\{ \frac{D}{2} [(\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w, w)] - \left[\Delta_k \varphi + L\left(\frac{1}{2}w + w_0, \varphi\right) \right] w - \right. \\ \left. - \frac{1}{2Eh} [(\Delta \varphi)^2 - (1 + \nu)L(\varphi, \varphi)] \right\} ds - \iint \left[q - \frac{h\gamma}{g}(\dot{w} + \dot{w}) \right] \delta w ds = 0 \quad (2.1)$$

Здесь для осесимметричной задачи операторы имеют вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad L(w, \varphi) = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}, \quad \Delta_k w = \Delta_k \varphi = 0$$

где w, φ – функции прогиба и усилий соответственно, w_0 – начальная погибь оболочки, h – толщина оболочки, ε – коэффициент демпфирования, D – цилиндрическая жесткость, E – модуль упругости.

Разложим прогиб w и функцию усилий φ по двум полным линейно независимым системам, подчиненных главным краевым условиям функций и ограничимся конечными суммами. В случае осесимметричной задачи прогиб и функция усилий запишутся в виде

$$w = \sum_{i=1}^n x_i(t) w_i(\rho), \quad \varphi = \sum_{i=1}^n y_i(t) \varphi_i(\rho) \quad (2.2)$$

Коэффициенты $x_i(t)$ и $y_i(t)$ являются искомыми функциями времени. Подставляя выражения (2.2) в (2.1), выполняя операцию варьирования и приравнявая к нулю коэффициенты при δx_i и δy_i , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $x_i(t)$ и $y_i(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\ddot{\mathbf{X}} + \varepsilon \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{C}\mathbf{Y} + \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{Y} &= \mathbf{Q}q_0 \\ \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{E}\mathbf{Y} + \frac{1}{2}\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{X} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij}, \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}, \quad \mathbf{D} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij}, \quad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad \mathbf{Y} = \sum_{j=1}^n y_j, \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n Q_i$$

Решая второе уравнение системы (2.3) относительно \mathbf{Y} , умножая на \mathbf{A}^{-1} первое уравнение системы (2.3) и обозначая $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{R}$, приходим к задаче Коши для нелинейной системы уравнений первого порядка. Проведенное преобразование возможно, так как матрицы \mathbf{A}^{-1} и \mathbf{E}^{-1} существуют, если координатные функции линейно независимы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= -\varepsilon \mathbf{R} + [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} + (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{X})] \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X} + q_0(t)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$q_0(t) = \frac{q(t)a^4}{Eh_0^4}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h_0}, \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{h_0}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{Eh_0^3}, \quad \bar{y}_i = \frac{y_i}{Eh_0^3}$$

$$\bar{h} = \frac{h(\rho)}{h_0}, \quad h(\rho) = h_0(1 + c\rho), \quad t = \bar{t}\tau, \quad \varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon}}{\tau}, \quad \tau = \frac{a}{h_0} \sqrt{\frac{a^2 \gamma}{Eg}}$$

Далее черта над безразмерными величинами опущена. Полученные уравнения решались методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности с начальными условиями $x_i = 0, \dot{x}_i = 0$ при $t = 0$.

3. Достоверность и анализ полученных результатов. Изложенный выше алгоритм метода Ритца позволяет решать широкий класс как статических, так и динамических задач. Решение статических задач возможно с помощью метода установления, идея которого принадлежит В.И. Феодосьеву [10]. Решая задачу Коши при $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$ для ряда значений параметра поперечной распределенной по поверхности оболочки и постоянной во времени нагрузки, получим для $\{q_i\} \rightarrow \{w_i, \varphi_i\}$, что позволит построить зависимости $q[w(0)]$ и исследовать напряженно-деформированное состояние конструкции. Графики $q(w)$, полученные в [11] для статических задач полностью совпадают с результатами, полученными настоящим подходом.

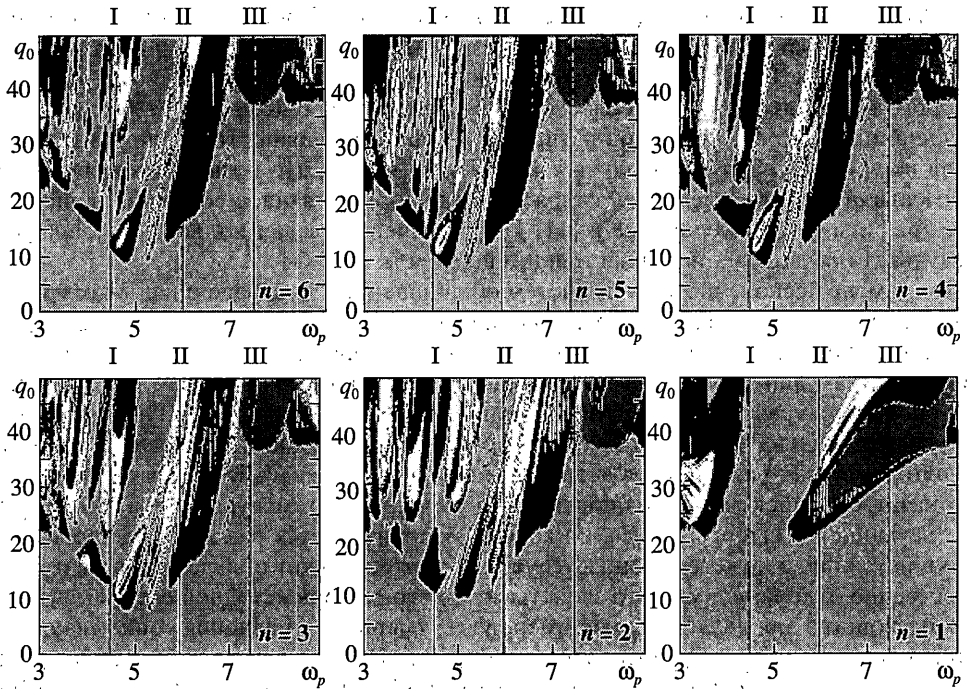
При замене бесконечномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений конечными необходимо правильно интерпретировать результаты численного счета. Предполагается, что с увеличением числа уравнений наступает момент, начиная с которого динамические свойства системы стабилизируются так, что дальнейший рост числа уравнений в аппроксимации не вносит ничего нового. При таком подходе существенным фактором является конечная размерность аттрактора системы. Однако даже если размерность аттракторов ограничена, весьма значительными могут оказаться эффекты, возникающие из-за усечения системы уравнений (2.2). В случае “неудачного” выбора базиса, по которому производится разложение прогибов и функции усилий, соответствующая усеченная система может обладать аттракторами, качественно отличающимися по свойствам от аттракторов исходной системы.

Это свойство проявляется, например, у двухмерного уравнения, описывающего тепловую конвекцию жидкости. Система Лоренца [12], представляющая собой трехмодовое усечение этого уравнения, демонстрирует сложную, в том числе хаотическую динамику. Увеличение же числа мод в системе сначала приводит к нерегулярному возрастанию области хаоса, а затем к внезапному уменьшению. При достаточно большом числе мод хаос исчезает. В [13] показано, что для больших чисел Пранудля δ в рассматриваемой двумерной конвекции Бусинеска имеются критические значения числа Рэлея (Ra) для возникновения одно- и двухмодового колебательного движения, а при дальнейшем росте Ra система возвращается к периодической одночастотной конвекции. Этот пример показывает, что для получения качественно верного соответствия между динамикой исходной и усеченной системы, полученной на основе метода Бубнова – Галеркина или метода Ритца, необходимо учитывать довольно значительное число координатных функций.

Исследуем колебания пологой конической оболочки, представив ее как пластину с начальной погибью $w_0 = -k(1 - \bar{\rho})$, где $k = Hh_0^{-1}$ – стрела подъема оболочки над планом. Рассмотрим в качестве краевых условий при $\rho = 1$ подвижную заделку $w(1) = w'_\rho(1) = \varphi(1) = \varphi'_\rho(1) = 0$. Аппроксимирующие функции выберем в виде $w_i(\rho) = (1 - \rho^2)^{i+1}$, $\varphi_i(\rho) = (1 - \rho^2)^{i+1}$. Тогда коэффициенты системы (2.4) запишутся так

$$A_{ik} = \frac{1}{6 + 2i + 2k} + c \frac{(4 + 2i + 2k)!!}{(7 + 2i + 2k)!!}$$

$$B_{ik} = \frac{4(i+1)(k+1)}{3(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{i+k+1} \left[\frac{ik}{(i+k)(i+k+1)} + \frac{3c^2}{2(i+k+2)} \left[\frac{6ik}{(i+k)(i+k-1)} - \frac{1+\nu}{2} \right] \right] + \frac{3c(2i+2k-4)!!}{(2i+2k+3)!!} [15ik - (1+\nu)(i+k)(i+k-1)] \right\}$$



Фиг. 1

$$Q_i = \frac{1}{2(i+2)}, \quad C_{ip} = 2 \frac{H}{h_0} p(2p-1) \int_0^1 \rho^{2p-2} (1-\rho^2)^{i+1} d\rho \quad (3.1)$$

$$E_{jp} = -16(j+1)(p+1) \left\{ \frac{pj}{(j+p+1)(j+p)(j+p-1)} + \frac{c^2}{2(j+p+1)(j+p+2)} \right\} \times$$

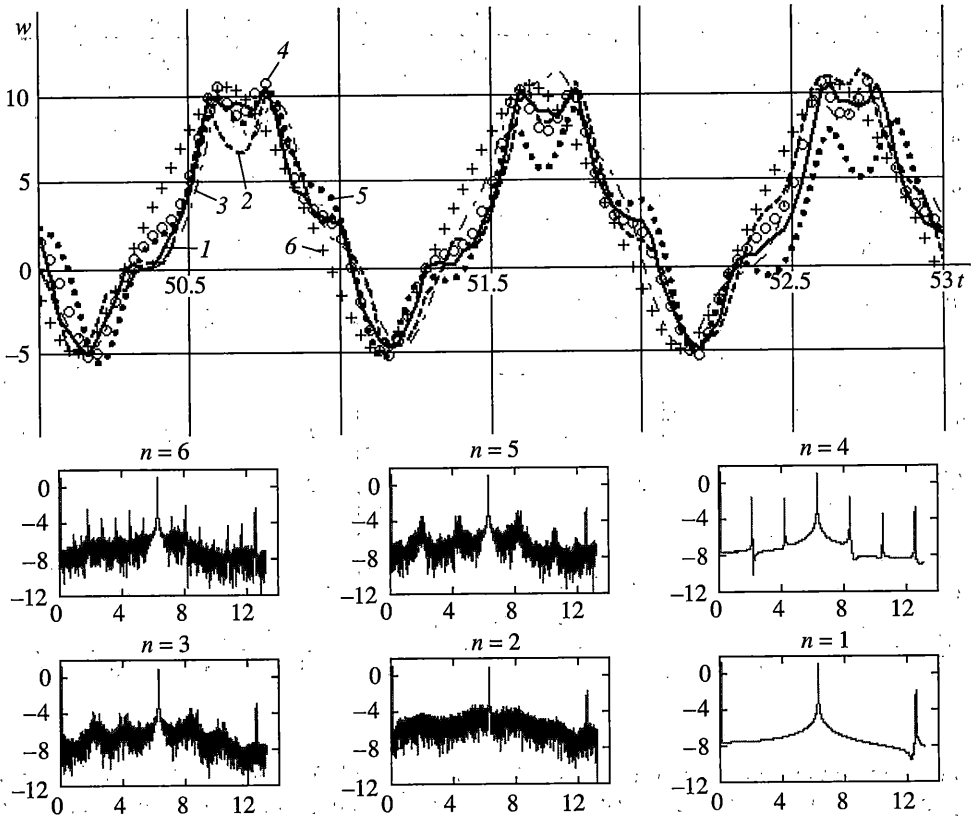
$$\times \left[\frac{6jp}{(j+p)(j+p-1)} - \frac{1-\nu}{2} \right] - c \frac{(2j+2p-4)!!}{(2j+2p+3)!!} [15jp - (1-\nu)(j+p)(j+p-1)]$$

$$D_{ikp} = \frac{4(i+1)(k+1)(p+1)}{(i+k+p+1)(i+k+p+2)}$$

Исследуем вопрос о влиянии количества заданных функций при использовании метода Ритца на точность полученных решений. Нагрузка равномерно распределена по поверхности оболочки и изменяется по гармоническому закону $q = q_0 \sin \omega_p t$.

Построим карты, отражающие характер поведения оболочек со стрелой подъема $k = 5$ (фиг. 1) в зависимости от величины управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ для разного числа членов разложения в (2.2) $n = 1-6$ (основные обозначения приведены в табл. 1). Дальнейшее увеличение числа n в (2.2) не привело к серьезному изменению карт управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$.

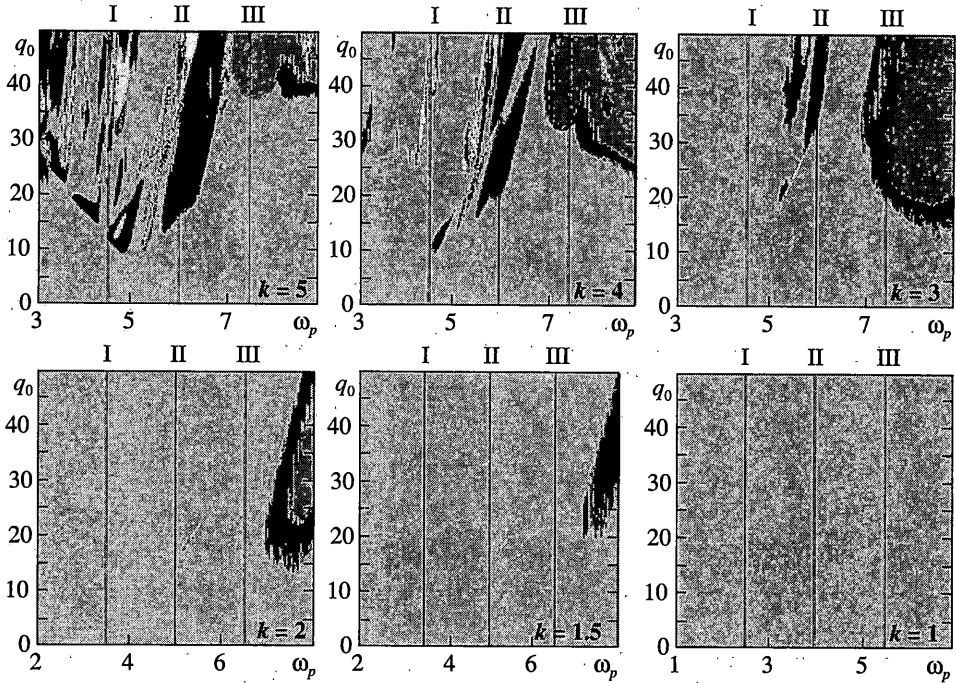
Карта при $n = 1$ сильно отличается от остальных, с увеличением n очертания различных областей становятся похожими. Так область колебаний на половинной час-



Фиг. 2

тоте одинаковая для всех $n \geq 2$, но при $n = 2$ она смещена вправо. Области хаоса с увеличением n становятся меньше, но отдельные участки не меняются, начиная с $n = 4$. Рассмотрим точку ($q_0 = 46$, $\omega_p = 6.25$), которая при $n = 6$ находится в зоне хаоса. На фиг. 2 приведены сигналы: $w(0, t)$ при $50 \leq t \leq 53$ и спектры мощности ($S(\omega)$). При $n = 1$ (кривая 1) колебания гармонические; $n = 4$ (кривая 4) описывает бифуркацию утроения периода (орбита 3); $n = 2, 3, 5, 6$ (кривые 2, 3, 5, 6 соответственно) описывают хаотические колебания, но характер хаоса принципиально различен: при $n = 2$ – хаос на основной частоте, при $n = 3, 5$ – хаос на частотах утроенного периода, а при $n = 6$ – на частотах усмеренного периода, т.е. каждый член разложения привносит в картину хаоса свою специфику (можно утверждать, что в хаосе существуют условия регулярности, именуемые плотностью периодических точек). В зонах гармонических колебаний и бифуркаций достаточно 3–4 членов разложения (2.2). При $k < 3$ в любой зоне можно ограничиться тремя членами ряда (2.2).

При $n = 4$ – на спектре мощности обнаружено явление утроение периода колебаний, и притягивающие орбиты имеют период 3. В этом случае ставится вопрос о существовании других периодических орбит. Эти орбиты по необходимости должны быть отталкивающими, так как на диаграмме наблюдаются только притягивающие орбиты. Наличие орбиты периода 3 означает наличие орбит с периодами $n = 1, 2, 3, \dots$. Приведенные соображения применимы к вещественнозначным функциям, отображающим интервал на себя. Важный случай орбит с периодом 3 был рассмотрен в [14],







Фиг. 3

но на 11 лет ранее более общий случай был доказан в [15]. Здесь же эти результаты получены при численном исследовании динамики диссипативных систем в виде гибких осесимметричных конических оболочек. Ниже остановимся на других орбитах, которые появляются в динамике гибких конических оболочек.

Картина перехода в хаос становится существенно разнообразнее по мере увеличения параметра подъемности оболочки. На фиг. 3 приведены карты характера колебаний на множестве параметров $\{q_0, \omega_p\}$ при $k = 1, 1.5, 2, 3, 4, 5$. Решения получены для $n = 6$ в (2.2). Анализ зависимости $\{q_0, \omega_p\}$ от k показывает, что для пластинки ($k = 0$) $\{q_0, \omega_p\}$ характеризуется только гармоническими колебаниями при ограничении на прогиб $w(0) \leq 5$ и $q_0 \leq 100$. Зоны хаоса и бифуркаций с увеличением k начинают возрастать, для $k = 1$ имеются только две зоны – вкрапления хаоса в поле гармонических колебаний, с увеличением $k \geq 1.5$ появляются новые зоны бифуркаций.

Явление турбулентности уже известно сотни лет, но создание математических моделей перехода динамической системы в состояние хаоса следует отнести к рабо-

Таблица 1.

Условное обозначение	Тип колебаний
	Гармонические колебания на частоте ω_p
	Гармонические колебания на частоте $\omega_p/2$
	Бифуркации
	Хаос

те [16]. В дальнейшем появились другие модели [17–19], но ни одна из этих моделей при рассмотрении детерминированных колебаний конических оболочек для любых граничных условий и стрелы подъема в чистом виде не может описать перехода механической системы в состояние хаоса. Указанные выше параметры играют существенную роль в механизме перехода механической системы в состояние хаоса при изменении амплитуды и частоты внешнего воздействия. Для конической оболочки со стрелой подъема $k = 3$ был обнаружен новый механизм перехода колебаний конических оболочек из гармонических в хаотические. Рассмотрим этот сценарий более подробно. Основные характеристики: сигнал $w(0, t)$, фазовый портрет $w(\dot{w})$, спектр мощности $S(\omega)$ в зависимости от граничных значений q_0 приведены в табл. 2, значения q_0 названы граничными, так как между указанными границами q_0 картина остается близкой к постоянной. Отметим особенности этих положений.

1. Колебания совершаются на основной частоте возбуждения a_1 и являются гармоническими. Фазовый портрет представляет из себя предельное множество однооборотного цикла ($q_0 = 23.6$).

2. Дальнейшее движение по параметру q_0 ($q_0 = 24.3$) приводит к появлению новой независимой частоты b_1 , т.е. имеется двухчастотное движение на частотах a_1 и b_1 . Движение не синхронизированное, т.е. $a_1/b_1 = 13.17\dots$ В фазовом портрете наблюдается двухоборотный цикл. Резко меняется характер сигнала. Колебания носят релаксационный характер и на вершинах импульса имеются высокочастотные пики, кроме того, появляется третья зависимая частота $a_2 = a_1 - b_1$. В этом случае в фазовом портрете наблюдается рождение устойчивого инвариантного двумерно-периодического тора.

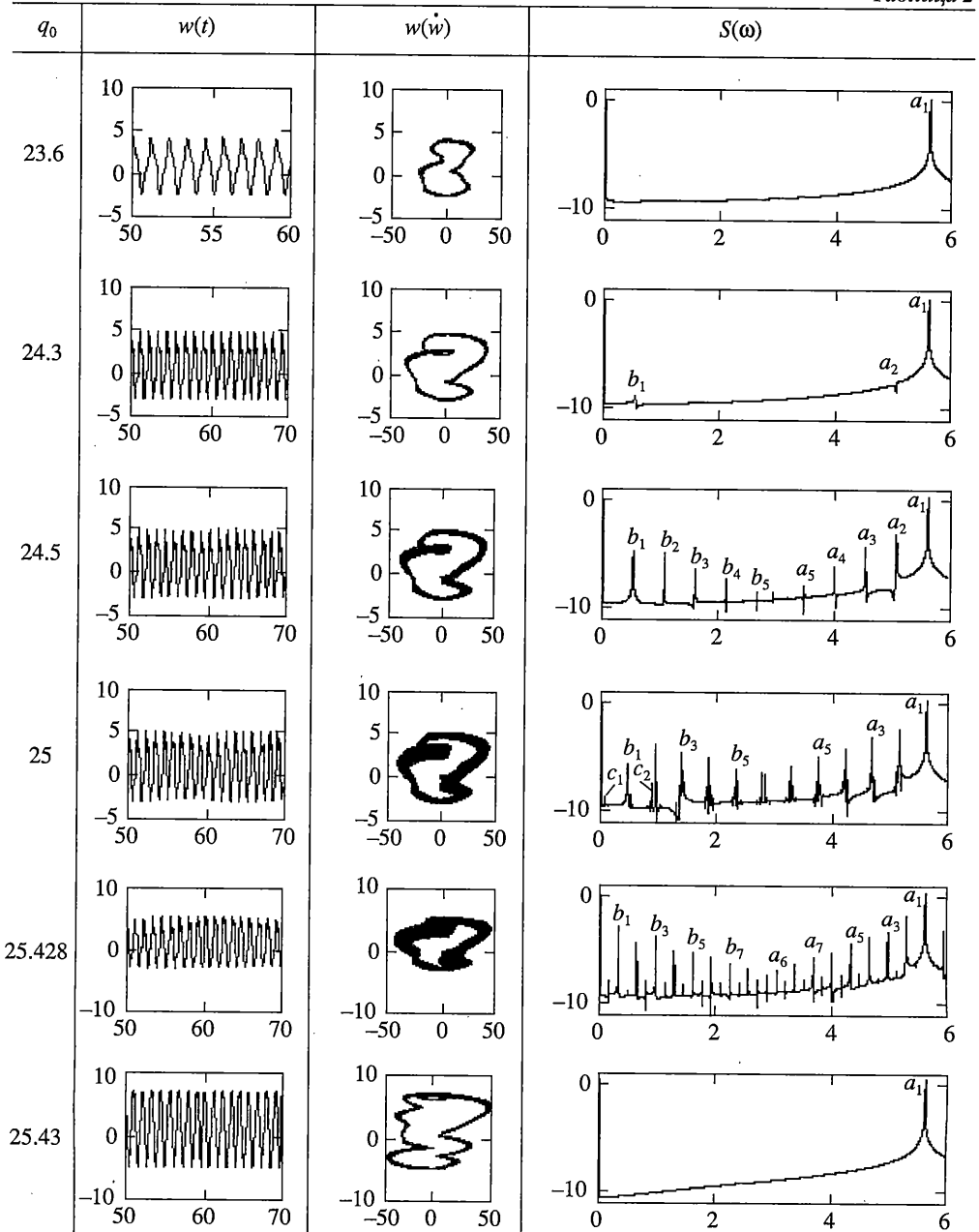
3. Увеличение $q_0 = 24.5$ приводит к серии линейно зависимых частот $b_n = nb_1$ и $a_n = a_1 - (n - 1)b_1$, причем этот процесс происходит до тех пор, пока не произойдет сближение частот a_k и $b_k \in [b_1, a_1]$; после этого в спектре рождается третья частота c_2 ($q_0 = 25$), с последующей серией линейных комбинаций: $c_n = x_n \pm c_2$, $c_2 = a_6 + b_6$, $x_n = a_n$, b_n ($q_0 = 25$). Т.е. здесь наблюдаются резонансные торы.

4. Дальнейшее движение по параметру q_0 приводит систему вновь к перестройке: разрушение частоты c_2 с последующей однократной бифуркацией Андронова – Хопфа ($q_0 = 25.428$). Дальнейшее увеличение $q_0 = 25.4285$ приводит систему к хаосу. Изменение q_0 на $9 \cdot 10^{-5} - q_0 = 25.42859$ приводит оболочку к жесткой потере устойчивости (резко возрастают прогибы: приблизительно в два раза) и система перестраивается вновь на гармонические колебания с частотой возбуждения a_1 . Здесь этот процесс можно трактовать как динамическую потерю устойчивости конических оболочек при действии периодических знакопеременных нагрузок. Анализ существующих динамических критериев дан в [20].

Описанный выше сценарий перехода гармонических колебаний в хаотические есть первая попытка анализа исследования проблемы эволюции одночастотных, двухчастотных и трехчастотных колебаний, т.е. переход к хаосу через режим квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами. Численный анализ доказывает структурную независимость режима двухчастотных колебаний (двухмерного тора T^2), порождающего в окрестности T^2 режим странного аттрактора.

Кроме перехода колебаний в состояние хаоса по описанному выше сценарию, в областях $\{q_0, \omega_p\}$, имеются подобласти, в которых переход в хаос механической системы осуществляется в чистом виде по сценарию Фейгенбаума [17] (получение хаоса с помощью удвоения периода). Модель Фейгенбаума хорошо подтверждается численными экспериментами на простых моделях. Известно, что бифуркация удвоения хорошо описана в аттракторе Рейслера и др. Данное явление также обнаружено для конической оболочки. В табл. 3 приведены зависимости для граничных значений q_0

Таблица 2



сигнала $w(0, t)$, $50 \leq t \leq 60$, фазового портрета $w(\dot{w})$, спектра мощности и отображения Пуанкаре. Значение последовательности $q_{0,n}$ и последовательности d приведены в табл. 4 которая приводит нас к сходящейся последовательности

$$d_n = \frac{q_{0,n} - q_{0,n-1}}{q_{0,n+1} - q_{0,n}} = 4.66830065\dots$$

Таблица 3

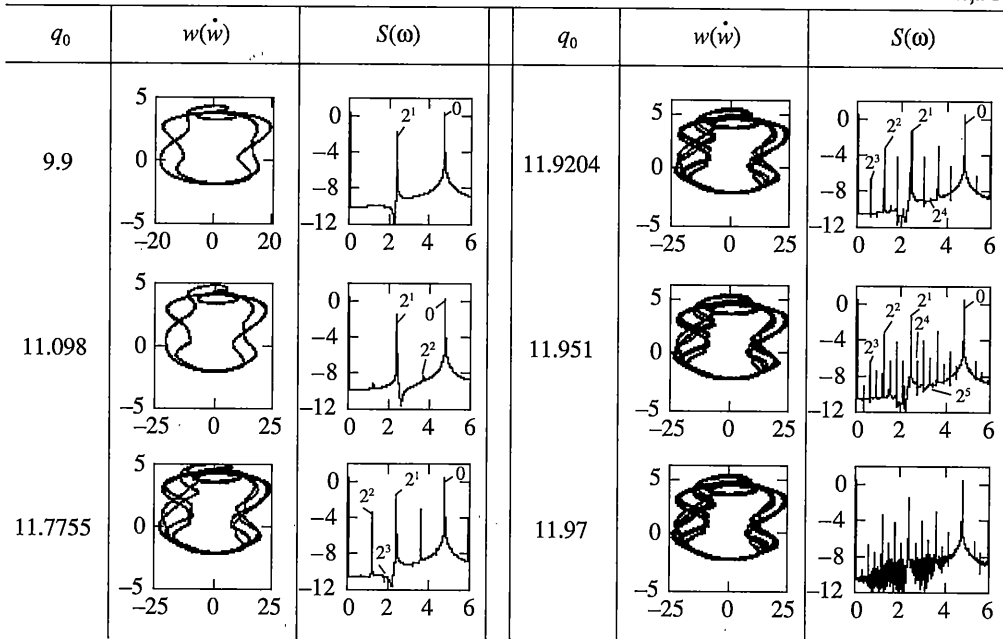


Таблица 4

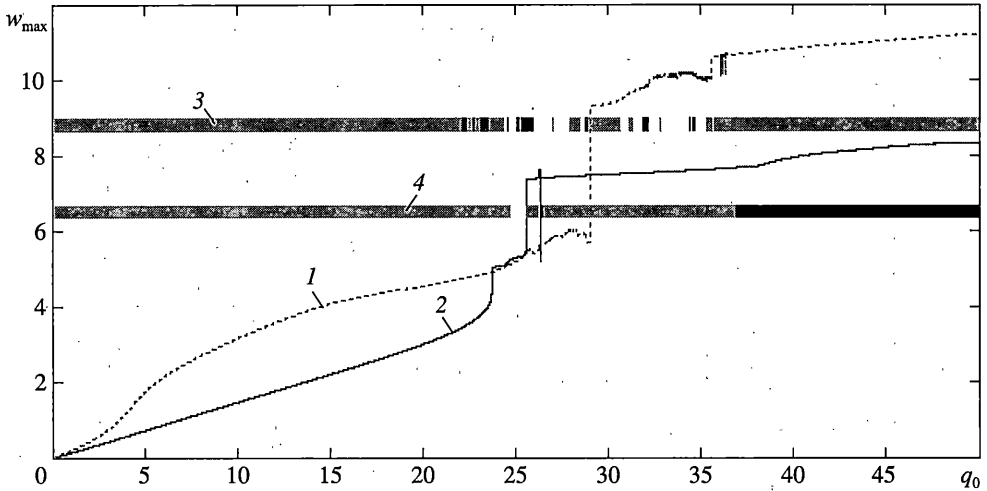
n	1	2	3	4	5
$q_{0,n}$	9.605846	11.098	11.77755	11.9204	11.951
d_n		2.19579722	4.75708785	4.66830065	

Теоретическое значение, полученное для функции $f = (1 - cx^2)$ [21, табл. 1.25] равно $d = 4.66916224\dots$ Различия теоретических расчетов с численными экспериментами для конических оболочек составляют 0.018%.

Поразительна красота закономерностей, связанных с переходом к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода и возникающие в результате хаотические аттракторы Смейла. Это название предложено в [22] исходя из того, что каскад бифуркаций удвоения является типичным при возникновении “подковы” Смейла [23]. Такие аттракторы называют аттракторами Фейгенбаумовского типа и странными аттракторами.

При исследовании хаотических колебаний в публикуемой работе не строились диаграммы бифуркаций, как это обычно делается при исследовании функций в случае широкого класса двузначных отображений интервала в себя, а строилась шкала бифуркаций, которая зависит от $\{q_0, \omega_p\}$ при фиксированном значении ω_p . Это связано с тем, что на карте $\{q_0, \omega_p\}$ возможны различные сценарии перехода в хаос, как это было отмечено выше.

Приведем зависимость $w_{\max}(0)$ от q_0 на частоте вынуждающей силы $\omega_p = 5.61$ для конических оболочек со стрелой подъема $k = 5, 3$ (на фиг. 4 кривые 1, 2 соответственно). На фиг. 4 также приведены линии 3, 4, характеризующие характер колебания оболочки от параметра q_0 , относящиеся соответственно к оболочкам со стрелой



Фиг. 4

подъема 5, 3. Характеристика $w_{\max}(q_0)$, линии 3, 4 на фиг. 4 и первый ляпуновский показатель хорошо согласуются между собой. При положительном показателе Ляпунова, характеризующего появление хаоса, на что указывают и линии 3, 4 на фиг. 4, и $w_{\max}(q_0)$, где наблюдается биеение и серия жестких бифуркаций, т.е. динамическая потеря устойчивости. Наступление временного хаоса влечет за собой появление пространственного.

5. Заключение. Разработан метод исследования хаотических колебаний гибких пологих конических оболочек в зависимости от ряда параметров: стрелы подъема, амплитуды и частоты вынуждающей поперечной нагрузки. Построены карты характера колебаний конических оболочек в зависимости от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$. Обнаружены зоны сценария Фейгенбаума и подсчитана константа Фейгенбаума. Выявлен новый сценарий перехода колебаний оболочек от гармонических к хаотическим. Исследован вопрос о влиянии количества членов разложения в ряд функций прогиба и усилий на характер колебаний конических оболочек в зонах бифуркаций и хаоса. Показано, что хаотические колебания во времени конических оболочек влекут за собой хаотические колебания и по пространству, т.е. пространственный и временной хаос взаимосвязаны для рассмотренного класса пространственных систем. Рассмотрен вопрос о существовании границы в сложном поведении системы, до которой ее поведение целесообразно считать еще просто хаосом, а после которой это уже нечто иное, что можно назвать “многомодовой” турбулентностью (собирательный образ, основанный на типичности поведения распределенных систем).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells. Applications the Bubnov – Galerkin and Finite Difference Numerical Methods. Berlin, ets.: Springer, 2003. 424 p.
2. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. Regular and chaotic behavior of flexible plates // Europ. Congr. on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Eccomas Computational Fluid Dynamics Conf. 2001. Swansea, UK, 2001. 9p. (CDROM).
3. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. Spatio-temporal chaos and solitons exhibited by von Kármán model // Int J. Bifurcation and Chaos. 2002. V. 12. № 7. P. 1465–1513.

4. Krysko V.A., Narkaitis G.G., Awrejcewicz J. Bifurcations of thin plates transversally and sinusoidally axited // Structural Dynamics. EUROODYN / Eds. H. Grundmann and J.I. Schuele. Swets Zeitinger, Lisse, 2002. P. 529–534.
5. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Nonlinear coupled problems in dynamics of shells // Intern. J. Eng-ng Sci. 41 2003. V. 41. № 6. P. 587–607.
6. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Feigenbaum scenario exhibited by thin plate dynamics // Nonlinear Dynamics. 2001. V. 24. № 4. P. 373–398.
7. Крысько В.А., Сопенко А.А., Салий Е.В. Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек на прямоугольном плане // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10. № 1–2. С. 92–103.
8. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
9. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
10. Феодосьев В.И. Об одном способе решения задач устойчивости деформируемых систем // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 265–275.
11. Кантор Б.Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Киев: Наук. думка, 1971. 136 с.
12. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // Atmos. Sci. 1962. V. 20. № 1. P. 130–141.
13. Curry J.H., Herring J.R., Loncaric J., Orszag S.A. Order disorder in two- and threedimensional Bénard convection // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 1–38.
14. Li Tien-Yien., Yorke J.A. Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. V. 82. P. 985–992.
15. Шарковский А.Н. Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // УМЖ. 1964. Т. 16. № 1. С. 61–71.
16. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44. № 8. С. 339–342.
17. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1979. V. 21. № 6. P. 669–706.
18. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulens // Commun Math. Phys. 1971. V. 20. № 3. P. 167–192.
19. Manneville P., Pomean Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // Physica. 1980. V. 1. № 2. P. 219–226.
20. Крысько В.А., Крысько А.В. Проблемы бифуркаций и жесткой потери устойчивости нелинейной теории пластин // Механика оболочек и пластин в XXI веке. Саратов: Изд-во СГТУ, 1999. С. 50–67.
21. Collet P., Eckmann J.P. Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems. Boston: Birkhauser, 1980. 248 p.
22. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и турбулентность // Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. Киев: Наук. думка, 1985. Ч. 2. С. 118–124.
23. Smale S. Dynamical systems and turbulence // Zect. Notes Math. Berlin: Spring, 1977. № 615. P. 48–70.

Саратов

Поступила в редакцию
22.05.2003