

УДК 539.3

© 2004 г. И.А. ИВАНОВ, В.В. СИЛЬВЕСТРОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПАКЕТА УПРУГИХ ПЛАСТИН, СОЕДИНЕННЫХ ВДОЛЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КРИВЫХ

Рассматривается система n тонких упругих бесконечных пластин, которые наложены друг на друга и соединены вдоль периодической системы разомкнутых кривых Ляпунова. Упругие свойства и толщина пластин в общем случае разные. Пластины растягиваются усилиями, приложенными к ним на бесконечности, причем эти усилия при $y \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow -\infty$ необязательно одинаковые.

Методом интегральных уравнений задача соединения пластин в пакет сводится к $(n-1)$ отдельной периодической задаче. Устанавливается связь (линейная) между напряжениями и коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) в пластинах, соединенных в пакет, и напряжениями и КИН в других отдельных пластинах, содержащих тонкие жесткие линейные включения, расположенные вдоль линий соединения исходных пластин в пакет. Новые пластины никаким образом между собой не связаны. Их упругие параметры и действующие в них усилия при $y \rightarrow \pm\infty$ выражаются по определенному линейному закону через упругие параметры исходных пластин и приложенные к ним на бесконечности усилия. Приводятся примеры.

Ранее изучались пакеты пластин, соединенных друг с другом вдоль периодической системы коллинеарных отрезков [1, 2], а также вдоль конечного числа кривых Ляпунова [3, 4].

1. Постановка задачи. Пусть n тонких бесконечных упругих однородных изотропных пластин E_1, E_2, \dots, E_n , занимающих всю плоскость комплексной переменной $z = x + iy$, наложены одна на другую и жестко соединены между собой без натяга и промежуточных прослоек вдоль периодической системы разомкнутых кривых Ляпунова L_j , полученных от одной кривой L , расположенной в полосе $0 < \operatorname{Re} z < T$ ($T > 0$), с помощью сдвигов на периоды jT ($j = 0, \pm 1, \dots$). Пластина E_k ($k = \overline{1, n}$) имеет толщину h_k , модуль сдвига μ_k и коэффициент Пуассона ν_k . На верхнем конце полосы периодов Π : $0 \leq \operatorname{Re} z \leq T$ пластины E_k , т.е. при $y \rightarrow +\infty$ в расчете на единицу толщины пластины действуют расположенные в плоскости пластины напряжения $(\sigma_x^\infty)'_k, (\sigma_y^\infty)'_k, (\tau_{xy}^\infty)'_k$ и вращение $(\omega^\infty)'_k$. На нижнем (при $y \rightarrow -\infty$) соответственно $-(\sigma_x^\infty)''_k, (\sigma_y^\infty)''_k, (\tau_{xy}^\infty)''_k$ и $(\omega^\infty)''_k$. Значения этих напряжений и вращения при $y \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow -\infty$ необязательно одинаковые.

Будем считать: 1) пластины находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии и взаимодействуют друг с другом только через линии соединения, причем пространственный эффект концентрации напряжений на линиях соединения пренебрежимо мал и трение между пластинами отсутствует; 2) на концах кривых L_j напряжения и производные от компонент смещения могут обращаться в бесконечность порядка меньше 1, а в остальных точках они непрерывны.

На линиях соединения пластин должны выполняться условия жесткого соединения

$$(u + iv)_k^+ = (u + iv)_k^-, \quad (k = \overline{1, n}) \quad (1.1)$$

$$(u + iv)_k^+ = (u + iv)_n^+ \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (1.2)$$

$$\sum_{k=1}^n h_k(\sigma_n + i\tau_n)_k^+ = \sum_{k=1}^n h_k(\sigma_n + i\tau_n)_k^- \quad (1.3)$$

где $(u + iv)_k$ – вектор смещения точек пластины E_k , а $(\sigma_n, \tau_n)_k$ – соответственно нормальная и касательная компоненты вектора напряжения в точках линии соединения со стороны пластины E_k в расчете на единицу ее толщины. Условия (1.1), (1.2) выражают равенство смещений точек пластин E_1, E_2, \dots, E_n на линии соединения, а условие (1.3) – равновесие точек этой линии.

Задача. Требуется определить периодическое напряженное состояние описанного пакета пластин.

2. Интегральное представление комплексных потенциалов. В данном случае напряжения $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_k$, вращение ω_k и частные производные по x от компонент $(u, v)_k$ вектора смещения в точке z пластины E_k выражаются через две кусочно-голоморфные функции $\Phi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$ по формулам [5]:

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \sigma_y)_k &= 4\operatorname{Re}\Phi_k(z), \quad 2\mu_k\omega_k = (1 + \kappa_k)\operatorname{Im}\Phi_k(z) \\ (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})_k &= 2[\bar{z}\Phi_k'(z) + \Psi_k(z)] \\ 2\mu_k\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) &= \kappa_k\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} - z\overline{\Phi_k'(z)} - \overline{\Psi_k(z)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\kappa_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$$

Функции $\Phi_k(z)$ периодичны с основными периодом T , а функции $\Psi_k(z)$ удовлетворяют условию $\Psi(z + T) = \Psi(z) - T\Phi'(z)$. На концах полосы периодов эти функции ограничены и имеют определенное поведение, которое будет получено позже, а на концах кривых L_j могут иметь особенности интегрируемого характера.

Функции $\Phi_k(z)$ и $\Psi_k(z)$, через которые определяется напряженное состояние в пластине E_k , возьмем в интегральном виде, предложенном в [6], с добавленными соответствующими слагаемыми γ_k, γ_k' , обусловленными наличием нагрузок на бесконечности пластин

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2T} \int_L Q_k(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{T} dt + \gamma_k$$

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{2T} \int_L \left[(\overline{Q_k(t)} - 2iq_k(t)) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{T} \bar{dt} - \right.$$

$$\left. - \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{T} + \frac{\pi}{T}(\bar{t} - t + z) \operatorname{cosec} \frac{2\pi(t-z)}{T} \right) Q_k(t) dt \right] + \gamma_k'$$

$$Q_k(z) = g_k'(t) - \frac{2i}{1 + \kappa_k} q_k(t)$$

$$2q_k(t) = (\sigma_n + i\tau_n)_k^+ - (\sigma_n + i\tau_n)_k^-$$

$$\frac{i(1 + \kappa_k)}{2\mu_k} g_k'(t) = \frac{d}{dt} [(u + iv)_k^+ - (u + iv)_k^-]$$

Функции $q_k(t)$ и $g_k'(t)$ будем считать принадлежащими классу $H^*(L)$.

Согласно условиям (1.1) все $g_k'(t) = 0$. Следовательно, комплексные потенциалы имеют вид

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{iT(1 + \kappa_k)} \int_L \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{T} q_k(t) dt + \gamma_k$$

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{iT(1 + \kappa_k)} \int_L \left[\left[\kappa_k \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{T} \overline{q_k(t)} d\bar{t} - \right. \right. \quad (2.2)$$

$$\left. - \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{T} + \frac{\pi}{T} (\bar{t} - t + z) \operatorname{cosec} \frac{2\pi(t-z)}{T} \right) q_k(t) dt \right] + \gamma_k'$$

Функция $q_n(t)$, согласно условиям (1.3), находится из равенства

$$\sum_{k=1}^n h_k q_k(t) = 0, \quad t \in L \quad (2.3)$$

Найдем значения γ_k, γ_k' . Так как

$$\lim_{z \rightarrow x \pm i\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{T} = \pm i \quad (0 \leq x \leq T, t \in L)$$

то на основании формул (2.2):

$$\Phi_k(x \pm i\infty) = \pm \frac{1}{T(1 + \kappa_k)} \int_L q_k(t) dt + \gamma_k \quad (2.4)$$

$$\Psi_k(x \pm i\infty) = \pm \frac{1}{T(1 + \kappa_k)} \left[\int_L \kappa_k \overline{q_k(t)} d\bar{t} - \int_L q_k(t) dt \right] + \gamma_k'$$

С другой стороны, на основании (2.1):

$$\begin{aligned} \Phi_k(x + i\infty) &= \frac{1}{4} [(\sigma_x^\infty)'_k + (\sigma_y^\infty)'_k] + \frac{2i\mu_k}{1 + \kappa_k} (\omega^\infty)'_k \\ \Phi_k(x - i\infty) &= \frac{1}{4} [(\sigma_x^\infty)''_k + (\sigma_y^\infty)''_k] + \frac{2i\mu_k}{1 + \kappa_k} (\omega^\infty)''_k \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\Psi_k(x + i\infty) = \frac{1}{2} [(\sigma_y^\infty)'_k - (\sigma_x^\infty)'_k] + i(\tau_{xy}^\infty)'_k$$

$$\Psi_k(x - i\infty) = \frac{1}{2} [(\sigma_y^\infty)''_k - (\sigma_x^\infty)''_k] + i(\tau_{xy}^\infty)''_k$$

Сравнивая правые части равенств (2.4) и (2.5), находим

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{8} [(\sigma_x^\infty)'_k + (\sigma_y^\infty)'_k + (\sigma_x^\infty)''_k + (\sigma_y^\infty)''_k] + \frac{i\mu_k}{1 + \kappa_k} [(\omega^\infty)'_k + (\omega^\infty)''_k] \\ \gamma'_k &= \frac{1}{4} [(\sigma_y^\infty)'_k + (\sigma_y^\infty)''_k - (\sigma_x^\infty)'_k - (\sigma_x^\infty)''_k] + \frac{i}{2} [(\tau_{xy}^\infty)'_k + (\tau_{xy}^\infty)''_k], \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

причем получаемая при этом система четырех линейных уравнений относительно трех неизвестных $\gamma_k, \gamma'_k, \int_L q_k(t) dt$ совместна тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{aligned} (1 + \kappa_k)[(\sigma_x^\infty)'_k - (\sigma_x^\infty)''_k] &= (3 - \kappa_k)[(\sigma_y^\infty)'_k - (\sigma_y^\infty)''_k] \quad (k = \overline{1, n}) \\ (\omega^\infty)'_k - (\omega^\infty)''_k &= -\frac{1}{2\mu_k} [(\tau_{xy}^\infty)'_k - (\tau_{xy}^\infty)''_k] \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

При выполнении этих условий

$$\int_L q_k(t) dt = \frac{T}{2} [(\sigma_y^\infty)'_k - (\sigma_y^\infty)''_k] - \frac{iT}{2} [(\tau_{xy}^\infty)'_k - (\tau_{xy}^\infty)''_k] \quad (k = \overline{1, n}) \quad (2.8)$$

Равенства (2.8) служат условиями равновесия разрезанных вдоль кривой L полос периодов $0 \leq \text{Re} z \leq T$ каждой из пластин E_k по отдельности. Из этих равенств и равенства (2.3) следуют в свою очередь условия равновесия всего пакета пластин:

$$\sum_{k=1}^n [(\sigma_y^\infty)'_k - (\sigma_y^\infty)''_k] = 0, \quad \sum_{k=1}^n [(\tau_{xy}^\infty)'_k - (\tau_{xy}^\infty)''_k] = 0 \quad (2.9)$$

В дальнейшем будем считать, что нагрузки на бесконечности удовлетворяют условиям (2.7), (2.9). Они полностью совпадают с условиями, полученными в [1] другим путем.

3. Интегральные уравнения задачи. Условия (1.2) с учетом (1.1) равносильны условиям

$$(u + iv)_k^+(t) + (u + iv)_k^-(t) = (u + iv)_n^+(t) + (u + iv)_n^-(t), \quad t \in L \quad (k = \overline{1, n-1})$$

которые на основании формул [6]:

$$2\mu_k \frac{d}{dt} (u + iv)_k^\pm(t) = \kappa_k \Phi_k^\pm(t) - \overline{\Phi_k^\pm(t)} - \frac{d\bar{t}}{dt} (t\overline{\Phi_k^\pm(t)} + \overline{\Psi_k^\pm(t)}), \quad t \in L$$

и представлений (2.2) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_k} \left[\kappa_k \Phi_k(t) - \overline{\Phi_k(t)} - \frac{d\bar{t}}{dt} (t\overline{\Phi_k'(t)} + \overline{\Psi_k(t)}) \right] &= \\ = \frac{1}{\mu_n} \left[\kappa_n \Phi_n(t) - \overline{\Phi_n(t)} - \frac{d\bar{t}}{dt} (t\overline{\Phi_n'(t)} + \overline{\Psi_n(t)}) \right], \quad t \in L \quad k = \overline{1, n-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где под $\Phi_k(t), \Psi_k(t)$ понимаются главные значения соответствующих особых интегралов, включая слагаемые γ_k, γ'_k . Используя (2.3), (2.2), выразим $\Phi_n(t), \Psi_n(t)$ через $\Phi_k(t),$

$\Psi_k(t)$ ($k = \overline{1, n-1}$):

$$\Phi_n(t) = -\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \Phi_j(t) + \gamma_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \gamma_j \quad (3.2)$$

$$\Psi_n(t) = -\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \Psi_j(t) + \gamma'_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \gamma'_j$$

$$\alpha_j = (h_j(1 + \kappa_j))/(h_n(1 + \kappa_n))$$

Тогда условия (3.1) в матричной форме примут вид (δ_{kj} – символ Кронекера):

$$A\Phi(t) - B\left(\overline{\Phi(t)} + \frac{d\overline{t}}{dt}(t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)})\right) = F(t), \quad t \in L \quad (3.3)$$

$$\Phi(t) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_{n-1}(t))^T, \quad \Psi(t) = (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_{n-1}(t))^T$$

$$F(t) = (f(t), f(t), \dots, f(t))^T, \quad A = \|a_{kj}\|, \quad B = \|b_{kj}\|$$

$$a_{kj} = \frac{\kappa_n}{\mu_n} \alpha_j + \frac{\kappa_k}{\mu_k} \delta_{kj}, \quad b_{kj} = \frac{1}{\mu_n} \alpha_j + \frac{1}{\mu_k} \delta_{kj} \quad (k, j = \overline{1, n-1})$$

$$f(t) = \frac{1}{\mu_n} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \left(\kappa_n \gamma_j - \overline{\gamma_j} - \frac{d\overline{t}}{dt} \overline{\gamma_j} \right) + \frac{1}{\mu_n} \left(\kappa_n \gamma_n - \overline{\gamma_n} - \frac{d\overline{t}}{dt} \overline{\gamma_n} \right) \quad (3.4)$$

Равенство (3.3) и дополнительные условия (2.8) являются компактной формой записи системы сингулярных интегральных уравнений для нахождения функций $q_k(t)$ ($k = \overline{1, n-1}$), которая получится, если вместо вектор-функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ подставить интегральные представления (2.2) их компонент. Записывать эти уравнения в интегральной форме для дальнейших исследований нет необходимости.

Преобразуя матрицу A , можно доказать, что она невырожденная. Тогда систему (3.3) можно записать в виде

$$\Phi(t) - A^{-1}B\left(\overline{\Phi(t)} + \frac{d\overline{t}}{dt}(t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)})\right) = A^{-1}F(t), \quad t \in L \quad (3.5)$$

По аналогии с [4] можно показать, что матрица $A^{-1}B$ имеет $n-1$ линейно независимых собственных векторов. Пусть S – матрица, составленная (по столбцам) из этих векторов. Тогда матрица $S^{-1}A^{-1}BS$ является диагональной, причем ее диагональные элементы суть собственные значения матрицы $A^{-1}B$. Для удобства обозначим их через $1/\kappa_1^*$, $1/\kappa_2^*$, ..., $1/\kappa_{n-1}^*$, где κ_1^* , κ_2^* , ..., κ_{n-1}^* – положительные числа, причем такие, что значение κ_k^* принадлежит области физически допустимых значений упругой постоянной κ . Будем искать решение системы (3.5) в виде $\Phi(t) = S\Phi^*(t)$, $\Psi(t) = S\Psi^*(t)$, где $\Phi^*(t)$, $\Psi^*(t)$ – новые неизвестные вектор-функции. Тогда получим

$$\Phi^*(t) - S^{-1}A^{-1}BS\left(\overline{\Phi^*(t)} + \frac{d\overline{t}}{dt}(t\overline{\Phi^{*'}(t)} + \overline{\Psi^*(t)})\right) = (AS)^{-1}F(t), \quad t \in L \quad (3.6)$$

Так как $S^{-1}A^{-1}BS = \text{diag}\{1/\kappa_1^*, 1/\kappa_2^*, \dots, 1/\kappa_{n-1}^*\}$, то система (3.6) распадается на $n - 1$ следующих самостоятельных уравнений

$$\kappa_k^* \Phi_k^*(t) - \overline{\Phi_k^*(t)} - \frac{dt}{dt} (\overline{t\Phi_k^{*'}(t)} + \overline{\Psi_k^*(t)}) = \kappa_k^* f(t) \sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}, \quad t \in L \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (3.7)$$

$$\|c_{kj}\| = (AS)^{-1}$$

где через $\Phi_k^*(t)$ и $\Psi_k^*(t)$ ($k = \overline{1, n-1}$) обозначены главные значения компонент вектор-функций $\Phi^*(z)$ и $\Psi^*(z)$ соответственно. Эти компоненты имеют вид (2.2), в которых плотности интегралов $q_k(t)$ и постоянные γ_k, γ_k' надо заменить соответственно на

$$q_k^*(t) = \sum_{j=1}^{n-1} d_{kj} q_j(t) \quad (k = \overline{1, n-1}), \quad \|d_{kj}\| = S^{-1} \quad (3.8)$$

$$\gamma_k^* = \sum_{j=1}^{n-1} d_{kj} \gamma_j, \quad \gamma_k^{*'} = \sum_{j=1}^{n-1} d_{kj} \gamma_j' \quad (k = \overline{1, n-1})$$

При этом условия (2.8) преобразуются в равносильные им условия

$$\int_L q_k^*(t) dt = \frac{T}{2} \sum_{j=1}^{n-1} d_{kj} [i(\sigma_y^{\infty'})_j - (\sigma_y^{\infty})_j] - i[(\tau_{xy}^{\infty'})_j - (\tau_{xy}^{\infty})_j] \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (3.9)$$

4. Связь со второй основной периодической задачей теории упругости. Уравнения (3.7) совпадают с уравнениями второй основной периодической задачи теории упругости [6]. Для того, чтобы определить, какой конкретной задаче они соответствуют, рассмотрим вспомогательную вторую основную задачу теории упругости для одной пластины единичной толщины с разрезами вдоль периодической системы кривых L_j ($j = 0, \pm 1, \dots$), когда на берегах разрезов заданы нулевые смещения, а на верхнем и нижнем концах полосы периодов при $z \rightarrow x + i\infty$ и $z \rightarrow x - i\infty$ ($0 \leq x \leq T$) действуют неизвестные пока напряжения и вращения $\sigma_x^{*'}, \sigma_y^{*'}, \tau_{xy}^{*'}, \omega^{*}$ и $\sigma_x^{*''}, \sigma_y^{*''}, \tau_{xy}^{*''}, \omega^{*''}$ соответственно, удовлетворяющие условиям (2.7). Считаем, что пластина имеет упругие постоянные μ и κ . Интегральное уравнение данной задачи описывается равенством [6]

$$\kappa \Phi(t) - \overline{\Phi(t)} - \frac{dt}{dt} (\overline{t\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}) = 0, \quad t \in L \quad (4.1)$$

при дополнительном условии

$$\int_L q(t) dt = \frac{T}{2} [\sigma_y^{*'} - \sigma_y^{*''}] - \frac{iT}{2} [\tau_x^{*'} - \tau_x^{*''}] \quad (4.2)$$

где $\Phi(t), \Psi(t)$ есть главные значения особых интегралов (2.2) с плотностью $q(t)$ и со слагаемыми

$$\gamma = \frac{1}{8} [\sigma_x^{*'} + \sigma_y^{*'} + \sigma_x^{*''} + \sigma_y^{*''}] + \frac{i\mu}{1 + \kappa} [\omega^{*'} + \omega^{*''}]$$

$$\gamma' = \frac{1}{4} [\sigma_y^{*'} + \sigma_y^{*''} - \sigma_x^{*'} - \sigma_x^{*''}] + \frac{i}{2} [\tau_{xy}^{*'} + \tau_{xy}^{*''}]$$

Уравнения (3.7) и (4.1) совпадут, если после подстановки вместо $\Phi_k^*(t)$, $\Psi_k^*(t)$ и $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ их выражений, у полученных уравнений совпадают интегральные и внеинтегральные члены соответственно. Так как интегральные члены этих равенств имеют одно и то же ядро, то они совпадают, если $\kappa = \kappa_k^*$ и $q(t) = q_k^*(t)$. В свою очередь, равенство внеинтегральных членов приводит к равенству

$$\kappa_k^* \gamma - \bar{\gamma} - \frac{d\bar{\gamma}}{dt} \gamma' = \kappa_k^* \gamma_k^* - \bar{\gamma}_k^* - \frac{d\bar{\gamma}_k^*}{dt} \gamma_k^{*'} - \kappa_k^* \left(\sum_{j=1}^{n-1} c_{kj} \right) f(t), \quad t \in L$$

откуда с учетом (3.4), (3.8) получим

$$\kappa_k^* \gamma - \bar{\gamma} = \xi_k, \quad \gamma' = \zeta_k \tag{4.3}$$

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{n-1} \left[d_{kj} (\kappa_k^* \gamma_j - \bar{\gamma}_j) - \frac{\kappa_k^* \beta_k}{\mu_n} \alpha_j (\kappa_n \gamma_j - \bar{\gamma}_j) \right] - \frac{\kappa_k^* \beta_k}{\mu_n} (\kappa_n \gamma_n - \bar{\gamma}_n)$$

$$\zeta_k = \sum_{j=1}^{n-1} \left(d_{kj} - \frac{\kappa_k^* \beta_k}{\mu_n} \alpha_j \right) \gamma_j' - \frac{\kappa_k^* \beta_k}{\mu_n} \gamma_n' \tag{4.4}$$

$$\alpha_j = \frac{h_j(1 + \kappa_j)}{h_n(1 + \kappa_n)}, \quad \beta_k = \sum_{j=1}^{n-1} c_{kj}, \quad \|c_{kj}\| = (AS)^{-1}, \quad \|d_{kj}\| = S^{-1}$$

Далее, сравнивая условия (3.9) и (4.2) при $q(t) = q_k^*(t)$, получим

$$\sigma_y^{*'} - \sigma_y^{*''} - i[\tau_{xy}^{*'} - \tau_{xy}^{*''}] = 2\eta_k \tag{4.5}$$

$$\eta_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} d_{kj} ((\sigma_y^\infty)'_j - (\sigma_y^\infty)''_j - i[(\tau_{xy}^\infty)'_j - (\tau_{xy}^\infty)''_j]) \tag{4.6}$$

Наконец, подставив в (4.3) выражения γ , γ' и присоединив к равенствам (4.3), (4.5) условия (2.7) записанные для неизвестных напряжений и вращений, получим систему 8 линейных действительных алгебраических уравнений относительно 8 неизвестных напряжений и вращений. Решая эту систему при $\mu = \mu_k$, найдем

$$\begin{aligned} (\sigma_x^*)_k &= \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\kappa_k^* - 1} \xi_k + \frac{3 - \kappa_k^*}{1 + \kappa_k^*} \eta_k - \zeta_k \right), & (\sigma_x^*)''_k &= \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\kappa_k^* - 1} \xi_k - \frac{3 - \kappa_k^*}{1 + \kappa_k^*} \eta_k - \zeta_k \right) \\ (\sigma_y^*)_k &= \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\kappa_k^* - 1} \xi_k + \eta_k + \zeta_k \right), & (\sigma_y^*)''_k &= \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\kappa_k^* - 1} \xi_k - \eta_k + \zeta_k \right) \\ (\tau_{xy}^*)_k &= \operatorname{Im}(\zeta_k - \eta_k), & (\tau_{xy}^*)''_k &= \operatorname{Im}(\zeta_k + \eta_k) \\ (\omega^*)_k &= \frac{1}{4\mu_k} \operatorname{Im}(\xi_k + 2\eta_k), & (\omega^*)''_k &= \frac{1}{4\mu_k} \operatorname{Im}(\xi_k - 2\eta_k) \quad (k = \overline{1, n-1}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

где постоянные ξ_k , η_k , ζ_k находятся по формулам (4.4), (4.6), (2.6).

Таким образом, уравнение (3.7) и условие (3.9) соответствуют второй основной периодической задаче теории упругости для одной отдельной пластины E_k^* , имеющей единичную толщину, упругие постоянные μ_k, κ_k^* и разрезанной в полосе периодов Π вдоль кривой L , на берегах которой заданы нулевые смещения, а на концах $x \pm i\infty$ полосы Π действуют напряжения и вращения, определяемые через исходные данные задачи по формулам (4.7). Заметим, что в общем случае напряжения и вращение на разных концах полосы Π имеют, вообще говоря, разные значения. Решения основных периодических задач теории упругости для плоскости с коллинеарными разрезами в случае произвольных нагрузок на концах полосы Π имеются в работе [8].

5. Напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Так как комплексные потенциалы $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ ($1 \leq k \leq n-1$), описывающие напряженное состояние в пластине E_k по формулам (2.1), выражаются через комплексные потенциалы $\Phi_j^*(z), \Psi_j^*(z)$ описанной в конце п. 4 задачи по формулам

$$\Phi_k(z) = \sum_{j=1}^{n-1} s_{kj} \Phi_j^*(z), \quad \Psi_k(z) = \sum_{j=1}^{n-1} s_{kj} \Psi_j^*(z), \quad \|s_{kj}\| = S \quad (5.1)$$

то в силу линейности формул (2.1) относительно комплексных потенциалов напряжения и вращение $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \omega)_k(z)$ в точке z пластины E_k выражаются через соответствующие напряжения и вращение $(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*, \omega^*)_j(z)$ в точке z описанных выше пластин E_j^* по формулам

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \omega)_k(z) = \sum_{j=1}^{n-1} s_{kj} (\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*, \omega^*)_j(z) \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (5.2)$$

Тогда, согласно (3.2), напряжения и вращение в пластине E_n находятся по формулам

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \omega)_n(z) = - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \omega)_k(z) + (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \omega)_0 \quad (5.3)$$

где $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \omega)_0$ – напряжения и вращение, определенные по формулам (2.1) для постоянных комплексных потенциалов

$$\Phi_0(z) = \gamma_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \gamma_j, \quad \Psi_0(z) = \gamma'_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \gamma'_j$$

В данном случае комплексные потенциалы $\Phi_j^*(z), \Psi_j^*(z)$, значит, и комплексные потенциалы $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ соответствуют второй основной задаче теории упругости для плоскости с разрезами. Поэтому распределение напряжений вблизи концов линии соединения L в пластинах, соединенных в пакет, будет таким же, как вблизи вершин тонких жестких остроугольных включений в одной отдельной пластине [7]. Поэтому определим КИН вблизи конца $z = c$ линии L в пластине E_j по формуле

$$(k_1 - ik_2)_j = \pm 2\kappa_j \lim_{z \rightarrow c} \sqrt{\mp 2\pi(z-c)} \Phi_j(z)$$

где верхние знаки соответствуют начальной точке линии, а нижние – конечной. Тогда в силу равенств (5.1) и (3.2) получим

$$(k_1 - ik_2)_j = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\kappa_j}{\kappa_l^*} s_{jl} (k_1^* - ik_2^*)_l, \quad \|s_{jl}\| = S \quad (j = \overline{1, n-1}) \quad (5.4)$$

$$(k_1 - ik_2)_n = - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h_j \kappa_n (1 + \kappa_j)}{h_n \kappa_j (1 + \kappa_n)} (k_1 - ik_2)_j \quad (5.5)$$

где $(k_1^* - ik_2^*)_l$ – КИН вблизи соответствующего конца линии L в пластине E_l^* .

Вывод. Задача соединения пластин E_1, E_2, \dots, E_n в пакет вдоль периодической системы кривых $L_j, j = 0, \pm 1, \dots$ эквивалентна $n - 1$ периодическим задачам о напряженном состоянии отдельных, никаким образом не связанных между собой, вообще говоря, других $n - 1$ пластин $E_1^*, E_2^*, \dots, E_{n-1}^*$ при следующих условиях:

пластина E_k^* имеет единичную толщину, модуль сдвига μ_k и коэффициент Пуассона в $\nu_k^* = (3\lambda_k - 1)/(\lambda_k + 1)$, где λ_k является собственным значением (с учетом кратности) матрицы $A^{-1}B$, определенной в п. 3;

все пластины содержат абсолютно жесткие включения нулевой толщины вдоль кривых L_j ;

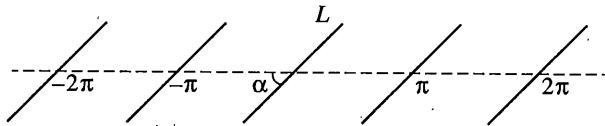
в пластине E_k^* при $y \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow -\infty$ действуют напряжения и вращения $(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*, \omega_k^*)_k$ и $(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*, \omega_k^*)_k$ соответственно, определяемые через исходные данные по формулам (4.7), (4.4), (4.6), где $\kappa_k^* = 1/\lambda_k$.

При этом напряжения, вращения и КИН вблизи концов линий соединения в пластинах E_k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$), находящихся в составе пакета, определяются через соответствующие им напряжения, вращения и КИН вблизи вершин жестких включений в пластинах E_k^* ($k = 1, 2, \dots, n - 1$), по формулам (5.4), где S – матрица, составленная по столбцам из собственных векторов матрицы $A^{-1}B$. Напряжения, вращения и КИН в пластине E_n находятся через соответствующие напряжения, вращения и КИН в остальных пластинах по формулам (5.3) и (5.5).

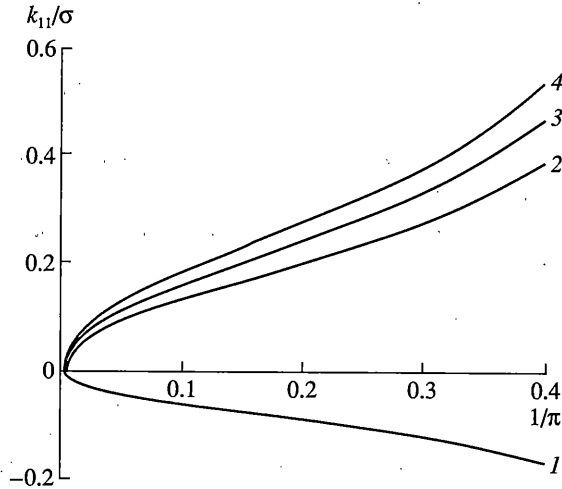
Формулы (5.2) и (5.4) устанавливают линейную связь между напряжениями, вращением и КИН в пластинах E_1, E_2, \dots, E_{n-1} , находящихся в составе пакета, и соответствующими напряжениями, вращением и КИН в отдельно взятых пластинах $E_1^*, E_2^*, \dots, E_{n-1}^*$. Таким образом, для нахождения напряжений и КИН в пластинах, соединенных в пакет, надо сначала найти их в описанных выше отдельных пластинах E_k^* или взять их из имеющейся литературы, и затем воспользоваться формулами (5.4), (5.5).

Замечание. Все полученные выше результаты справедливы и в том случае, когда линия соединения L в полосе Π состоит из нескольких разомкнутых кривых Ляпунова.

Пример. Пусть две пластины E_1, E_2 одинаковой толщины $h_1 = h_2 = 1$ соединены вдоль периодической системы отрезков L_j , полученных от одного отрезка L с помощью сдвигов на периоды $j\pi$ ($j = 0, \pm 1, \dots$). Отрезок L имеет длину $2l$ и образует угол α с действительной осью (фиг. 1). При $y \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow -\infty$ в пластине E_1 действуют напряжения $(\sigma_y^\infty)'_1 = (\sigma_y^\infty)''_1 = \sigma$, а все остальные исходные силовые данные нулевые. На фи-



Фиг. 1



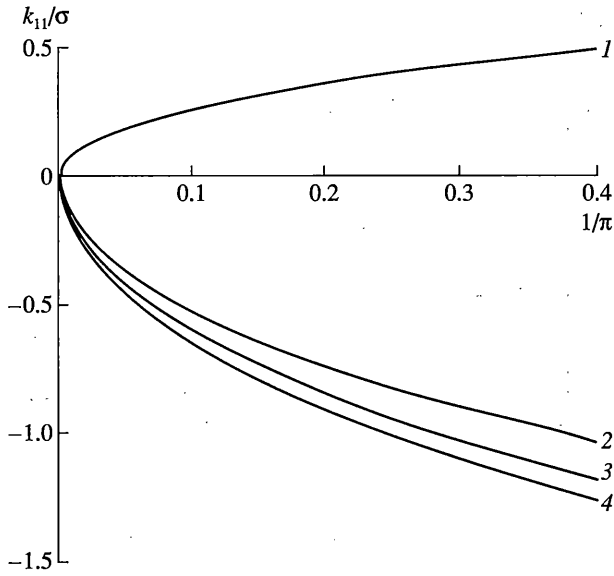
Фиг. 2

графах 2–5 приведены графики зависимости коэффициента k_{11}/σ , соответствующего пластине E_1 , от упругих и геометрических параметров задачи. При этом соответствующий пластине E_2 коэффициент $k_{12} = h_1 \kappa_2 (1 + \kappa_1) k_{11} / [h_2 \kappa_1 (1 + \kappa_2)]$, а остальные коэффициенты $k_{21} = k_{22} = 0$. Коэффициент k_{11} рассчитывался по формуле (5.4), которая в случае пакета из двух пластин имеет вид

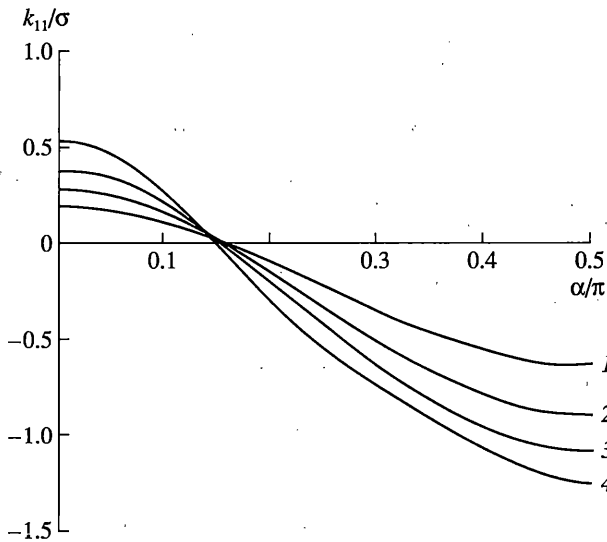
$$(k_1 - ik_2)_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa_1^*} (k_1^* - ik_2^*)_1, \quad \kappa_1^* = \frac{\kappa_2(1 + \kappa_1) + \kappa_1(1 + \kappa_2)\epsilon}{1 + \kappa_1 + (1 + \kappa_2)\epsilon}, \quad \epsilon = \frac{h_2 \mu_2}{h_1 \mu_1}$$

где k_{11}^* , k_{12}^* – КИН, соответствующие одной отдельной пластине E_1^* с упругими постоянными μ_1 , κ_1^* , которая содержит жесткие линейные включения нулевой толщины вдоль отрезков $L_j = (j = 0, \pm 1, \dots)$ и при $y \rightarrow \pm\infty$ подвержена напряжениям, определяемым по формулам (4.7), (4.4), (4.6). Коэффициенты k_{11}^* , k_{12}^* при расчетах взяты из [7].

На фиг. 2 приведены графики зависимости коэффициента k_{11}/σ от отношения l/π при фиксированных значениях упругих постоянных $\kappa_1 = 2.1$, $\kappa_2 = 2.3$ и фиксированном значении отношения μ_2/μ_1 , когда отрезок L расположен параллельно действительной оси ($\alpha = 0$). Кривая 1 соответствует случаю $(\mu_2/\mu_1) = 0.2$, кривая 2 – случаю $(\mu_2/\mu_1) = 1$, кривая 3 – случаю $(\mu_2/\mu_1) = 2$, кривая 4 – случаю $(\mu_2/\mu_1) = 10$. На фиг. 3 приведены графики зависимости k_{11}/σ от l/π при тех же упругих постоянных, когда отрезок L перпендикулярен к действительной оси ($\alpha = \pi/2$).

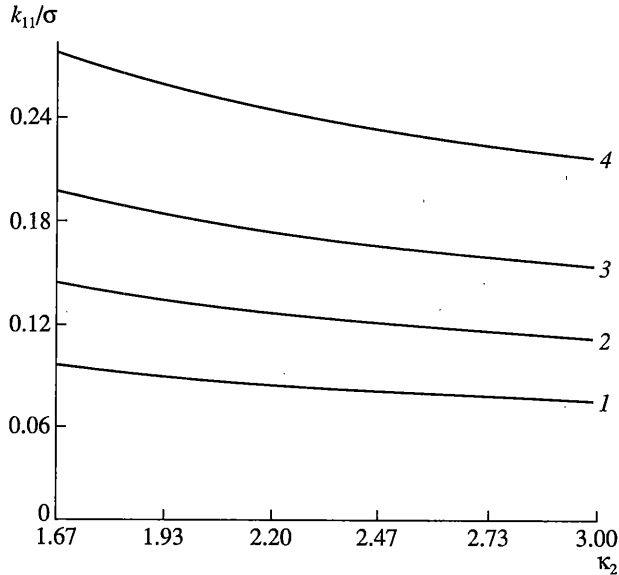


Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 4 отражает зависимость коэффициента k_{11}/σ от величины α угла наклона отрезка L к действительной оси при $\kappa_1 = 2.1$, $\kappa_2 = 2.3$, $(\mu_2/\mu_1) = 2$, а фиг. 5 – зависимость k_{11}/σ от упругой постоянной κ_2 ($5/3 < \kappa_2 < 3$) при $\kappa_1 = 2.1$, $(\mu_2/\mu_1) = 2$. На этих фигурах кривая 1 соответствует случаю $l = 0.1\pi$, кривая 2 – случаю $l = 0.2\pi$, кривая 3 – случаю $l = 0.3\pi$, кривая 4 – случаю $l = 0.4\pi$.



Фиг. 5

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00160).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сильвестров В.В., Иванов И.А. Растяжение двух упругих пластин, соединенных друг с другом вдоль периодической системы отрезков // Изв. инж.-технол. Акад. Чуваш. Респ. 1998. № 3–4; 1999. № 1–2. С. 42–46.
2. Сильвестров В.В., Иванов И.А. Соединение упругих пластин в пакет вдоль периодической системы отрезков // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 4. С. 197–202.
3. Сильвестров В.В., Шумилов А.В. Задача соединения упругих пластин в пакет вдоль кривых // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 165–170.
4. Сильвестров В.В., Шумилов А.В. К задаче соединения упругих пластин в пакет вдоль кривых // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 166–174.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
7. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стацук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
8. Опанасович В.К. Комплексні потенціали періодичної задачі колінарних тріщин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. № 49. С. 130–137.

Чебоксары

Поступила в редакцию
15.04.2002