

УДК 539.375

© 2004 г. В.В. ГЛАГОЛЕВ, А.А. МАРКИН

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РАЗДЕЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОГО СЛОЯ

Описание механического разделения деформируемого тела предлагается производить на основе соотношений, определяющих связь между процессами деформирования и нагружения представительного для данного материала объема начальным размером δ_0 . Рассматриваются устойчивая и неустойчивая в смысле Дракера стадии деформирования. Условием перехода от устойчивой к неустойчивой стадии является достижение максимальной главной, растягивающей компонентой тензора деформации нижнего критического значения – постоянной материала. Данный подход является развитием концепции разрушения, описанной в [1]. Известно, что образование у материала на стадии предразрушения микропор и микротрещин приводит к разупрочнению. С континуальной точки зрения этот эффект характеризуется наличием у полной диаграммы деформирования падающей ветви. Экспериментальные методики построения полных диаграмм представлены в [2, 3].

В публикуемой статье рассматривается разделение материального слоя при симметричном, относительно плоскости разделения, внешнем воздействии. Выделяется слой взаимодействия толщиной δ_0 , образуемый материалом, переходящим в стадию разупрочнения. Исходя из основного термодинамического соотношения [4] дается феноменологическое определение поверхностной энергии материала. С помощью физических определений поверхностной энергии, приведенных в [5–7], получена оценка толщины слоя взаимодействия через межатомное расстояние, модуль Юнга и предел упругости.

На основе термодинамического анализа квазиобратимого разделения, когда поведение материала все слои взаимодействия считается упругим, получено представление инвариантного контурного интеграла. Предлагаемый подход, в отличие от традиционного [8, 9], когда разрез считается математическим, не приводит к сингулярностям и бесконечным напряжениям. Исходя из данного представления, установлена связь известных критериев разрушения Гриффитса, Ирвина, Черепанова–Райса, Леонова–Панасюка–Дагдейла [10] с толщиной слоя взаимодействия и критическими значениями удельных свободной энергии и диссипации. Для получения конкретных значений различных критериев разделения в рамках предлагаемого подхода достаточно полной диаграммы на растяжение и значения толщины слоя взаимодействия.

1. Соотношения, определяющие поведение материала с учетом разупрочнения. Рассмотрим однородно деформируемый материальный элемент с характерным начальным размером δ_0 . Движение материального элемента задается аффинором де-

формации \mathbf{F} , связывающим начальное положение материального вектор-волокна $\Delta \mathbf{x}$ с его текущим положением $\Delta \xi$ следующим выражением: $\Delta \xi = \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$.

Выделим две стадии процесса деформирования. На первой стадии – устойчивого деформирования выполняется условие $\sigma \cdot \epsilon \geq 0$, где σ – тензор истинных напряжений, ϵ – линейный тензор деформации.

Материал переходит в стадию разупрочнения, предшествующую его разрушению, если максимальное главное значение тензора деформации достигает величины $\epsilon_2 = \epsilon_k > 0$. Обозначим тензор напряжений и тензор деформации в этот момент через $\sigma^{(k)}$ и $\epsilon^{(k)}$. На этой стадии материал неустойчив по Дракеру, и $\sigma \cdot \epsilon < 0$ при $\epsilon_k \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_m$. Разделение элемента происходит при достижении растягивающей деформацией значения ϵ_m . Нормаль к плоскости разделения совпадает с главным направлением, соответствующим главному значению ϵ_2 .

Связь между главными значениями тензоров σ и ϵ на стадии разупрочнения представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \epsilon'_1 &= \frac{1}{E_H} (\sigma'_1 - \nu_H (\sigma'_2 + \sigma'_3)), & \epsilon'_2 &= \frac{1}{E_H} (\sigma'_2 - \nu_H (\sigma'_1 + \sigma'_3)) \\ \epsilon'_3 &= \frac{1}{E_H} (\sigma'_3 - \nu_H (\sigma'_2 + \sigma'_1)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Компоненты со штрихами из (1.1) связаны с текущими главными значениями следующими формулами:

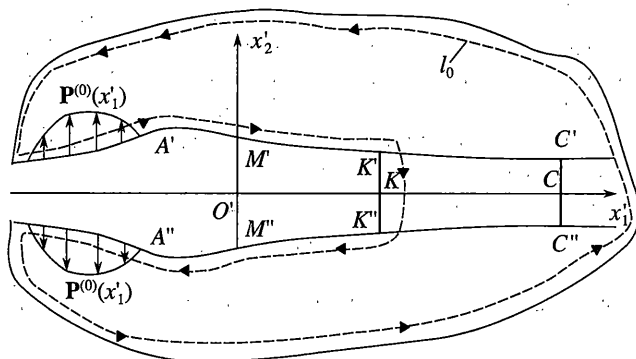
$$\sigma'_1 = -\sigma_i + \sigma_i^{(k)}; \quad \epsilon'_i = \epsilon_i - \epsilon_i^{(k)} \quad (1.2)$$

где $\sigma_i^{(k)}$ и $\epsilon_i^{(k)}$ – главные значения в точке $\sigma_2 = \sigma_k$, $\epsilon_2 = \epsilon_k$. Постоянные E_H и ν_H определяются из аппроксимации диаграммы растяжения. Полагая в (1.1) $\sigma'_1 = \sigma'_3 \equiv 0$, с учетом того, что при $\epsilon_2 = \epsilon_m$, $\sigma_2 = 0$, находим

$$E_H = \sigma_k / (\epsilon_m - \epsilon_k), \quad \nu_H = |\epsilon'_1 / \epsilon'_2| \quad (1.3)$$

2. Описание процесса установившегося разделения в условиях плоской деформации. Рассмотрим процесс симметричного разделения материального слоя. Соответствующие недеформированному состоянию места материальных точек в неподвижной, декартовой системе наблюдателя x_i задаем радиус-вектором \mathbf{x} , место той же точки в процессе деформирования ξ . Положим, что материал ограничен плоскостями $x_3 = \pm 1/2 h_0$. Процесс разделения приводит к образованию поверхности разделения с уравнением сечений ортогональных к оси x_3 : $\xi'_2 = \pm 1/2 \delta(x'_1)$, где $\delta(x'_1)$ – уравнение контура сечения, заданное на луче $-\infty < x'_1 \leq 0$ (фиг. 1). В недеформированном состоянии боковые сечения поверхности разделения задаются уравнением $x_2 = \pm 1/2 \delta_0$. Система координат x'_i – декартова, движется с постоянной скоростью $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_1$ по отношению к неподвижной системе x_i с базисом \mathbf{e}_i . Величина a имеет смысл скорости разделения. Соответствующие недеформированному состоянию места материальных точек в подвижной системе задаем радиус-векторами \mathbf{x}' , а в деформированном состоянии ξ' , при этом

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + a \mathbf{e}_1 t, \quad \xi = \xi' + a \mathbf{e}_1 t \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Декартовы (Лагранжевы) координаты x_i и x'_i фиксируют одну и ту же материальную точку в недеформированном состоянии и остаются неизменными при деформации.

На поверхность разделения действуют нагрузки с векторами напряжений $\mathbf{P}^{(0)}(x'_1)$, отнесенные к единице начальной площади. Эпюры этих нагрузок симметричны относительно оси ox_1 и движутся вдоль берегов разреза со скоростью \mathbf{a} . Таким образом, с точки зрения наблюдателя, связанного с подвижной системой x'_i , все характеристики процесса не будут изменяться со временем в фиксированной точке подвижной системы.

Дифференцируя левую и правую части (2.1) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0 = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} + \mathbf{a}\mathbf{e}_1, \quad \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = -\mathbf{a}\mathbf{e}_1 \quad (2.2)$$

где $\mathbf{a}\mathbf{e}_1$ – переносная скорость подвижной системы.

Если задана некоторая функция ψ от \mathbf{x}' , то ее производная по времени имеет вид

$$\frac{d\psi(\mathbf{x}')}{dt} = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\psi = -\mathbf{a}\mathbf{e}_1 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\psi = -a \frac{\partial \psi}{\partial x'_1} \quad (2.3)$$

где $\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x'_i}$ – оператор Гамильтона начального состояния.

В частности, если характеристика есть поле перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) = \xi - \mathbf{x} = \xi' - \mathbf{x}'$, то поле абсолютных скоростей примет вид:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}') = -\mathbf{a}\mathbf{e}_1 \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} = -a d\mathbf{u}/dx'_1 \quad (2.4)$$

В материальном пространстве, расположенном вне поверхности разделения, выделим область $O'M''K''K'M'$ (фиг. 1), находящуюся в стадии разупрочнения. При этом полагаем, что граница $M'O'M'$ этой области, являющаяся частью поверхности разделения, будет плоской также как и граница $K''K''$ с материалом, находящимся в стадии устойчивого деформирования. Материал, расположенный в области $O'M''K''C''CC''K'M'$, где $O'K < O'C < \infty$, в недеформированном состоянии, предшествующем разделению, образует слой, ограниченный плоскостями $-1/2\delta_0 \leq x_2 \leq 1/2\delta_0$. Толщина слоя взаимодействия δ_0 полагается параметром, характеризующим свойства данного материала.

Подчеркнем, что материальные частицы слоя взаимодействия в результате разделения формируют материальные поверхности разделения $A'M'$ и $A''M''$. Данное условие означает, что может существовать приповерхностный слой образованный материалом “осаждающимся” на поверхностях разделения.

Полагая напряженно-деформированное состояние в слое взаимодействия однородным по координате x_2 и симметричным относительно плоскости $x_2 = 0$, получим следующие выражения компонент тензора напряжений внутри слоя

$$\sigma_{11} = \sigma_1(x_1), \quad \sigma_{ij} \equiv 0 (i \neq j), \quad \sigma_{22} = \sigma_2(x_1); \quad \sigma_{33} = \sigma_3(x_1) \quad (2.5)$$

Напряженное состояние в слое будет равновесным, если выполняется условие

$$d\sigma_1/dx_1 = 0 \quad (2.6)$$

На левой границе слоя взаимодействия $x_1 = 0$ потребуем выполнения условия $\sigma_1 = 0$, в соответствии с которым из (2.6) следует, что в слое взаимодействия

$$\sigma_1 \equiv 0 \quad (2.7)$$

Из (1.1) и (1.2), полагая $v_n = 0$, получим

$$\sigma_2 = E_n(\varepsilon_m - \varepsilon_2), \quad \varepsilon_k \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_m \quad (2.8)$$

3. Термомеханика устойчиво деформируемого материала. Для материала, ограниченного в произвольный момент разделения замкнутым контуром l_0 , показанным на фиг. 1, запишем основное термодинамическое соотношение [10], которое примет следующий вид:

$$\int_{\Sigma_{(0)}} (\psi + \eta \dot{T} + \dot{w}) \rho_0 d\Sigma_0 = \oint_{l_{(0)}} \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{v} dl_0 \quad (3.1)$$

где ψ – скорость удельной (отнесенной к массе) свободной энергии, η – удельная энтропия, \dot{T} – скорость изменения температуры, \dot{w} – скорость удельной диссипации, \mathbf{q}_0 – вектор напряжения, dl_0 – элементарная длина граничного контура, $d\Sigma_0$ – элементарная площадь срединной материальной плоскости.

Полагая процесс изотермическим, выделим область $\Sigma_{(y)}$, ограниченную контуром, где диссипация отсутствует. Для последней термодинамическое соотношение примет вид:

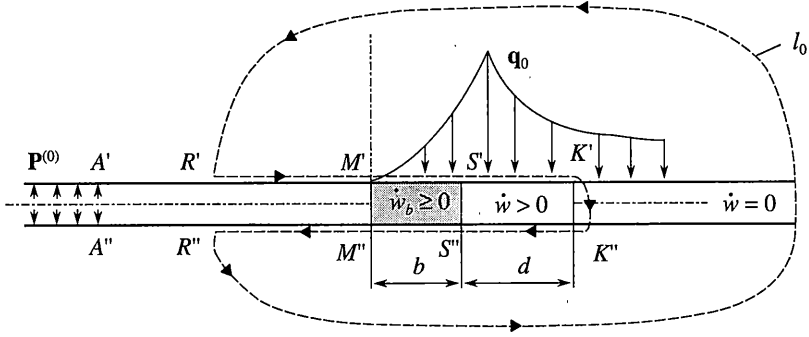
$$\int_{\Sigma_{(y)}} \dot{\psi} \rho_0 d\Sigma_0 - \oint_{l_{(y)}} \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{v} dl_0 = 0 \quad (3.2)$$

где $l_{(y)}$ – контур, ограничивающий область, в которой $\dot{w} = 0$.

Левую часть (3.2) преобразуем, выражая $\dot{\psi}$ и \mathbf{v} по (2.3), (2.4), с использованием теоремы Остроградского–Гаусса

$$\oint_{l_{(y)}} \left(\rho_0 n_1^{(0)} \dot{\psi} - \mathbf{q}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1'} \right) dl_0 = 0 \quad (3.3)$$

Рассмотрим вариант квазиобратимого разделения, полагая, что весь материал вне слоя взаимодействия деформируется обратимо. Представим левую часть (3.3) в соответствии с распределением диссипации, показанном на фиг. 2. Располагая точки R' и R''



Фиг. 2

так что внешняя нагрузка на отрезках берегов $R'M'$ и $R''M''$ отсутствует, получим следующие условия на границах:

$$\begin{aligned}
 n_1^{(0)} &= 0, \quad \mathbf{q}_0 = 0 \text{ при } x_1' \in R'M' \text{ и } R''M'' \\
 n_1^{(0)} &= 0, \quad \mathbf{q}_0 = \sigma_2 \mathbf{e}_2 \text{ при } x_1' \in M''K'' \\
 n_1^{(0)} &= 0, \quad \mathbf{q}_0 = -\sigma_2 \mathbf{e}_2 \text{ при } x_1' \in K'M' \\
 n_1^{(0)} &= -1, \quad \mathbf{q}_0 = \sigma_1 \mathbf{e}_1 = 0 \text{ при } -\frac{\delta_0}{2} \leq x_2' \leq \frac{\delta_0}{2} \\
 u_2|_{x_1' \in K'M'} &= -u_2|_{x_1' \in M''K''}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Интегрируя левую часть (3.3) по контуру $R''R'K'K''$ с учетом (3.4), получим

$$J^{(i)} + 2 \int_0^{b+d} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1'} dx_1' - \rho_0 \delta_0 \Psi_y = 0 \tag{3.5}$$

где $J^{(i)}$ – внутренний интеграл, определяемый интегрированием по произвольному контуру, исключающему области диссипации с началом в точке R'' отрезка $A''M''$ и окончанием в точке R' отрезка $A'M'$, $\Psi_y = \Psi|_{x_1' = b+d}$ – свободная энергия в сечении слоя $x_1' = b+d$.

В геометрически линейном приближении поле перемещений в силу однородности ϵ_2 по x_2 внутри слоя взаимодействия имеет вид

$$u_2 = \epsilon_2 x_2 \tag{3.6}$$

Далее из (3.6) и (2.8) получим

$$\int_0^b \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1'} \Big|_{x_2' = \delta_0/2} dx_1' = -\frac{\delta_0}{4} \sigma_k (\epsilon_m - \epsilon_k) \tag{3.7}$$

Для определения значения интеграла

$$\int_b^{b+d} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1'} \Big|_{x_2' = \delta_0/2} dx_1'$$

рассмотрим замкнутую область $S''K''K'S'$ (фиг. 2) и запишем основное термодинамическое соотношение (3.1), полагая, что величина диссипации не зависит от скорости деформирования. Так как распределение свободной энергии и диссипации в области непрерывно и непрерывны производные $d\psi/dx_1'$, dw/dx_1' , то с использованием теоремы Остроградского–Гаусса, учитывая (2.3), (2.4), запишем

$$\oint_{l_{(n)}} \left(\rho_0 n_1^{(0)} (\psi + w) - \mathbf{q}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1'} \right) dl_0 = 0 \quad (3.8)$$

где $l_{(n)}$ – контур, ограничивающий область $S''K''K'S'$, где $\dot{w} > 0$. На границе области имеем

$$\begin{aligned} n_1^{(0)} &= 0, \quad \mathbf{q}_0 = -\sigma_2 \mathbf{e}_2 \text{ при } x_1' \in S''K'' \\ n_1^{(0)} &= 0, \quad \mathbf{q}_0 = \sigma_2 \mathbf{e}_2 \text{ при } x_1' \in K'S' \\ n_1^{(0)} &= -1, \quad \mathbf{q}_0 = \sigma_1 \mathbf{e}_1 = 0, \quad \psi = \psi_k, \quad w = w_k \text{ при } -\delta_0/2 \leq x_2' \leq \delta_0/2, \quad x_1' = b \\ n_1^{(0)} &= 1, \quad \mathbf{q}_0 = \sigma_1 \mathbf{e}_1 = 0, \quad \psi = \psi_y, \quad w = 0 \text{ при } -\delta_0/2 \leq x_2' \leq \delta_0/2, \quad x_1' = b + d \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8) с учетом (3.9) получаем

$$-2 \int_b^{b+d} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1'} \Big|_{x_2' = \delta_0/2} dx_1' - \rho_0 \delta_0 (\psi_k + w_k - \psi_y) = 0 \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10), (3.7) в (3.5) приходим к следующему представлению $J^{(l)}$ -интеграла:

$$J^{(l)} = \rho_0 \delta_0 (\psi_k + w_k) + \delta_0/2 \sigma_k (\epsilon_m - \epsilon_k) \quad (3.11)$$

где $\psi_k = \psi(\epsilon_k)$ и $w_k = w(\epsilon_k)$ значения плотности свободной энергии и диссипации в точках $x_1' = b$ слоя взаимодействия.

4. Термомеханика разупрочняющегося материала. Выделим, согласно фиг. 2, разупрочняющийся материал, ограниченный контуром $M''S''S'M'$, и запишем для него термомеханическое соотношение, которое имеет вид:

$$\dot{\psi}_b + \dot{w}_b = -\oint \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{v} dl_0 \quad (4.1)$$

где ψ_b – свободная энергия, w_b – диссипация разупрочняющегося материала, знак минус указывает на нагрузку, противоположную условию (3.4).

Контурный интеграл, на основании (2.4), представим в виде:

$$-\oint \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{v} dl_0 = a \oint \mathbf{q}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1'} dl_0 \quad (4.2)$$

Используя формулу (3.8), представим скорость свободной энергии разупрочняющегося материала в следующем виде:

$$\dot{\psi}_b + \dot{w}_b = (a/2) \delta_0 \sigma_k (\epsilon_m - \epsilon_k) \quad (4.3)$$

Рассмотрим структуру изменения свободной энергии разупрочняющегося материала с учетом прекращения взаимодействия в момент $t + \Delta t$ между границами слоя взаимодействия на отрезке $a\Delta t$. Положим, что часть свободной энергии, распределенная в момент $t + \Delta t$ на отрезке $a\Delta t$, полностью переходит в поверхностную энергию, аккумуля-

лируемую в приповерхностных микрослоях поверхности разделения. Тогда в момент $t + \Delta t$ энергия разупрочняющегося участка будет состоять из поверхностной энергии, распределенной по поверхностным слоям $a\Delta t$, и энергии разупрочняющегося материала на длине $b - a\Delta t$:

$$\begin{aligned} \psi_b(t + \Delta t) &= \delta_0 \int_0^b \psi(t + \Delta t, x'_1) \rho_0 dx'_1 = \delta_0 \int_0^{a\Delta t} \psi(t + \Delta t, x'_1) \rho_0 dx'_1 + \\ &+ \delta_0 \int_{a\Delta t}^b \psi(t + \Delta t, x'_1) \rho_0 dx'_1 = 2\gamma a \Delta t + \delta_0 \int_{a\Delta t}^b \psi(t + \Delta t, x'_1) \rho_0 dx'_1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Первое слагаемое в правой части (4.4) отождествляем с удельной поверхностной энергией γ , отнесенной к единице образуемой площади. В силу стационарности процесса для второго слагаемого в правой части (4.4) должно выполняться условие:

$$\int_{a\Delta t}^b \psi(t + \Delta t, x'_1) \rho_0 dx'_1 = \int_0^{b-a\Delta t} \psi(t, x'_1) \rho_0 dx'_1 \quad (4.5)$$

Используя (4.4), (4.5), находим изменение свободной энергии за время Δt для разупрочняющегося материала

$$\begin{aligned} \Delta \psi_b &= \psi_b(t + \Delta t) - \psi_b(t) = 2\gamma a \Delta t + \delta_0 \int_0^{b-a\Delta t} \psi(t, x'_1) \rho_0 dx'_1 - \\ &- \delta_0 \int_0^b \psi(t, x'_1) \rho_0 dx'_1 = 2\gamma a \Delta t + \delta_0 \int_b^{b-a\Delta t} \psi(t, x'_1) \rho_0 dx'_1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (4.6) с учетом $\psi_k = \psi(t, b)$ следует, что скорость свободной энергии разупрочняющегося материала связана с поверхностной энергией следующим выражением:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi_b}{\Delta t} = \frac{d\psi_b}{dt} = a(2\gamma - \delta_0 \rho_0 \psi_k) \quad (4.7)$$

Из (4.3) и (4.7) следует определение поверхностной энергии

$$\gamma = \delta_0 / 2 \rho_0 \psi_k + \delta_0 / 4 \sigma_k (\epsilon_m - \epsilon_k) - \dot{w}_b / 2a \quad (4.8)$$

Определение (4.8) универсально в том смысле, что оно не зависит от распределения областей обратимого и необратимого деформирования вне слоя взаимодействия. Рассматривая два крайних варианта учета диссипации стадии разупрочнения (диссипации нет и энергия полностью диссипирует), получаем оценку величины поверхностной энергии в виде:

$$\delta_0 / 2 \rho_0 \psi_k \leq \gamma \leq \delta_0 / 2 \rho_0 \psi_k + \delta_0 / 4 \sigma_k (\epsilon_m - \epsilon_k)$$

Используем представление (4.8) для оценки толщины слоя взаимодействия. В [5] приведена следующая оценка поверхностной энергии через межатомное расстояние b_0 и модуль Юнга E :

$$\gamma = b_0 E / 108 \quad (4.9)$$

В [6] поверхностная энергия представлена формулой:

$$\gamma = b_0 E / 250 \quad (4.10)$$

а в [7] дана оценка

$$\gamma = 0.01Eb_0 \quad (4.11)$$

Положим, что свойства материала аппроксимируются идеальной упругопластической моделью, тогда:

$$\rho_0\Psi_k = 0.5E\varepsilon_y^2 \quad (4.12)$$

где ε_y – предел упругости по деформациям.

Положим в (4.8) $\varepsilon_k = \varepsilon_m$, тогда $\dot{w}_b = 0$ и из (4.8)–(4.12) получим следующую грубую оценку толщины слоя взаимодействия:

$$\delta_0 \approx 0.01b_0/\varepsilon_y^2 \quad (4.13)$$

В [6] указано, что для большинства металлов межатомное расстояние имеет порядок 10^{-9} – 10^{-10} м, считая $\varepsilon_y = 10^{-3}$, получим $\delta_0 \approx 10^{-5}$ – 10^{-6} м.

5. Частные модели процесса разделения. На основании выражения (3.11), полученного в рамках предположения о квазиобратимом течении процесса разделения, и выражения (4.8) для поверхностной энергии приходим к следующему представлению $J^{(i)}$ -интеграла:

$$J^{(i)} = 2\gamma + \rho_0\delta_0w_k + \dot{w}_b/a \quad (5.1)$$

Известно, что основным критерием распространения разрывов, моделируемых трещинами, является вязкость разрушения [5, 6, 10, 11]. Гипотеза об универсальности данного критерия для хрупких и квазихрупких материалов равносильна требованию распределения напряжений и перемещений в окрестности тупиковой точки по формулам линейной теории упругости. В этом случае J интеграл для плоской деформации определяется по формуле [8]:

$$J = (1 - \nu^2)K^2/E \quad (5.2)$$

где K – коэффициент при сингулярной составляющей напряжений (коэффициент интенсивности напряжений). Условие начала разделения состоит в требовании $K = K_c$, где K_c – универсальная постоянная материала – вязкость разрушения. Несмотря на то, что формула (5.2) строго справедлива лишь для материалов упруго деформируемых вплоть до разрушения ее, в соответствии с концепцией Ирвина–Орвана [2], используют для квазихрупких материалов. На основании такого подхода из сравнения (5.1) и (5.2) получим

$$(1 - \nu^2)K_c^2/E = 2\gamma + \rho_0\delta_0w_k + \dot{w}_b/a \quad (5.3)$$

Из формул (5.3) и (4.8), полагая $w_k = 0$, $\varepsilon_k = \varepsilon_m$, находим связь между критериями Гриффитса, Ирвина, Райса–Черепанова и критической деформацией слоя взаимодействия

$$J^{(i)} = (1 - \nu^2)K_c^2/E = 2\gamma = \rho_0\delta_0\Psi_k = 0.5\delta_0E\varepsilon_k^2 \quad (5.4)$$

Выражение (5.4) соответствует концепции хрупкого разрушения, когда считается, что материал деформируется упруго (без диссипации) вплоть до разделения. Учет диссипативной составляющей в формуле (5.3) требует использования упругопластической модели описания материала. Для определения w_k достаточно зависимости $\sigma_2(\varepsilon_2)$ на отрезке $0 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_k$, тогда критическое значение диссипации определяется по формуле:

$$\rho_0w_k = \int_0^{\varepsilon_k} \sigma_2 d\varepsilon_2 - \rho_0\Psi_k \quad (5.5)$$

Из (5.3), (5.5) и (4.8) получим формулу для определения вязкости разрушения упруго-пластического материала в следующем виде:

$$(1 - \nu^2)K_c^2/E = \delta_0 \int_0^{\epsilon_k} \sigma_2 d\epsilon_2 + 0.5\delta_0\sigma_k(\epsilon_m - \epsilon_k) + \dot{w}_b/a \quad (5.6)$$

Таким образом, для определения вязкости разрушения по формуле (5.6) необходимо знать толщину слоя взаимодействия и зависимость $\sigma_2(\epsilon_2)$.

Рассмотрим идеальный упругопластический материал, для которого $\sigma_2 = \sigma_k = \text{const}$. В этом случае (5.6), полагая $\epsilon_k = \epsilon_m$, принимает вид

$$(1 - \nu^2)K_c^2/E = \delta_0(\sigma_k\epsilon_k - \sigma_k^2/2E) \quad (5.7)$$

Второе слагаемое в правой части данной формулы (свободная энергия) для реальных металлических материалов много меньше первого (работы напряжений). Поэтому справедлива оценка

$$K_c = \sqrt{\frac{E\sigma_k\delta_k}{1 - \nu^2}} \quad (5.8)$$

где $\delta_k = \epsilon_k\delta_0$ – критическое смещение слоя взаимодействия.

Полученное выражение совпадает с представлением вязкости разрушения через критерий Леонова–Панасюка, Дагдейла [6, 10, 11], если ассоциировать δ_k с критическим раскрытием трещины, а σ_k с максимальным значением напряжений взаимодействия между берегами трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-01-96011 и № 04-01-96700).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Линьков А.М.* Разрушение как потеря устойчивости: некоторые новые эффекты, методы и результаты // *Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела: Сб. тр. научной школы академика В.В. Новожилова. Вып. 4. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2001. С. 13–31.*
2. *Лебедев А.А., Чаусов Н.Г.* Установка для испытания материалов с построением полностью равновесных диаграмм деформирования // *Пробл. прочности. 1981. № 12. С. 104–106.*
3. *Лебедев А.А., Чаусов Н.Г., Евицкий Ю.Л.* Методика построения полных диаграмм деформирования листовых материалов // *Пробл. прочности. 1986. № 9. С. 29–32.*
4. *Ильющин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
5. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
7. *Cottrell A.H.* *Tewksbury Symposium on Fracture. University of Melbourne. 1963.*
8. *Черепанов Г.П.* О распространении трещин в сплошной среде // *ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476–488.*
9. *Александров В.М., Кудин И.И.* Асимптотические методы в задаче Гриффитса // *ПММ. 1989. Т. 53. Вып. № 4. С. 665–671.*
10. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991. 415 с.
11. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.