

КРИТИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ В ТЕОРИИ ВЫПУЧИВАНИЯ ПЛАСТИНОК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В [1, 2] разработана теория выпучивания пластинок при ползучести, позволяющая приближенно определить критическое время, соответствующее катастрофическому нарастанию прогиба. Вид основного дифференциального уравнения, которое интегрируется по методу Бубнова – Галеркина – Канторовича, зависит от очертания пластинки. Поэтому рассмотрено применение полярных координат при осесимметричном выпучивании [1] и декартовых координат в задаче выпучивания прямоугольных пластинок [2].

Ниже дана оценка точности предложенной приближенной схемы решения задач выпучивания пластинок на примере удлиненной прямоугольной пластинки. Также отмечается, что, само по себе, критическое время t_* является физическим инвариантом, т.е. величина t_* не может зависеть от выбора координатной системы. В связи со сказанным показано, как критическое время может быть найдено по единому основному дифференциальному уравнению, составленному, например, в декартовых координатах с использованием функции прогиба, соответствующей граничным условиям пластинки любой заданной криволинейной формы.

1. Выпучивание удлиненной прямоугольной пластинки. Оценку точности предложенной приближенной схемы решения задач выпучивания, в соответствии с которой предполагается отсутствие деформаций в срединной плоскости, оказывается возможным выполнить аналитически на примере удлиненной прямоугольной пластинки.

Примем, что размер пластинки в направлении оси y существенно превышает размер в направлении оси x . В этом случае срединная поверхность в деформированном состоянии является цилиндрической и уравнение равновесия принимает вид [2]:

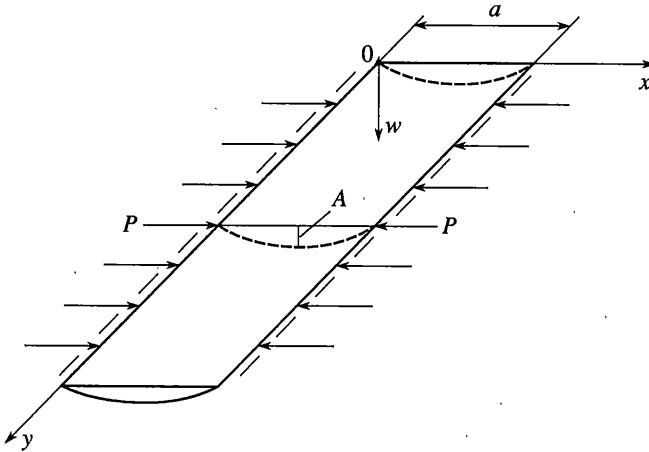
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

$$M_x = 2M_y = -D_n |\partial^2 w / \partial x^2|^{m-1} \partial^2 w / \partial x^2$$

где M_x – изгибающий момент, N_x – нормальная сила, w – прогиб, D_n – обобщенная жесткость, $m = 1/n$ – показатель степени в уравнении состояния нелинейно-вязкого материала, q – интенсивность поперечной нагрузки, точка означает производную по времени.

Рассмотрим закрепленную шарнирно вдоль длинных сторон пластинку шириной a (фиг. 1). Граничные условия при $x = 0$, $w = 0$ и $M_x = 0$; при $x = a$, $w = 0$ и $M_x = 0$ дают возможность после двукратного интегрирования при $q = 0$ и $N_x = -P$ представить уравнение (1.1) в форме $M_x = Pw$. Поскольку всюду в пластинке $\partial^2 w / \partial x^2 \leq 0$, то последнее уравнение равносильно следующему:

$$\partial^2 w / \partial x^2 = -P^n w^n / D_n^n \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Аналогичное уравнение имеет место при продольном изгибе стержня [3], когда не учитывается укорочение оси. Заменяв k/J_n^n для стержня на D_n^{-n} для удлиненной пластинки, получаем решение уравнения (1.2) в виде [3]:

$$t = \frac{\pi^2 D_n^n}{2a^2 P^n (n-1) I(n)} \left(\frac{1}{A_0^{n-1}} - \frac{1}{A^{n-1}} \right)$$

$$I(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{n+1} \alpha d\alpha$$

где A_0 и A – начальное и текущее значения амплитуды изогнутой поверхности.

Критическое время соответствует неограниченному нарастанию прогибов. Поэтому из условия $A \rightarrow \infty$ находим критическое время сжатой удлиненной пластинки

$$t_* = \frac{\pi^2 D_n^n}{2a^2 P^n (n-1) I(n) A_0^{n-1}} \quad (1.3)$$

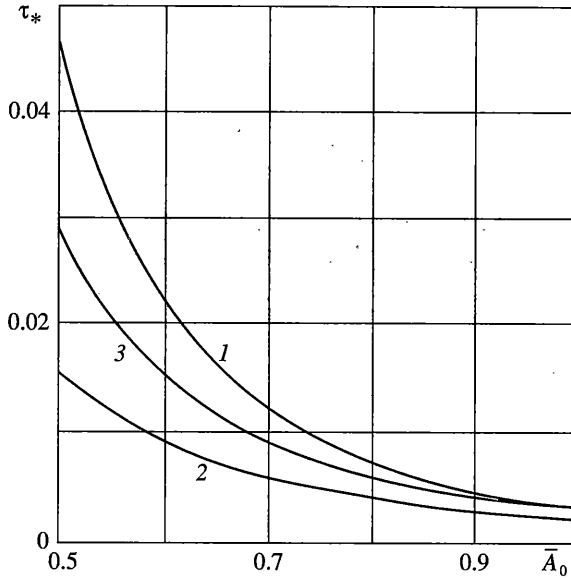
Определим теперь критическое время с учетом деформации в плоскости пластинки. С этой целью используем приближенный подход [3], связанный со схемой идеального двутавра.

Решение задачи в частном случае $n = 5$ имеет вид

$$t_* = \frac{\pi^2 D_n^5}{20 P^5 a^2 H^4} \left[\ln \left(1 + 12 \frac{H^2}{A_0^2} + 8 \frac{H^4}{A_0^4} \right) - 1.13 \ln \frac{1 + 11.29 (H/A_0)^2}{1 + 0.71 (H/A_0)^2} \right] \quad (1.4)$$

где $H = 0.259h$ – половина высоты двутавра, h – толщина пластинки.

Другой вариант приближенного решения с учетом деформации в срединной плоскости пластинки может быть получен с помощью теоремы Келледайна – Друкера [4].



Фиг. 2

Принимая [5] $\Omega_n^2 = (N_x/h)^2 + (M_x b)^2$, $b = (kh D_n^n)^{1/(n+1)}$, определяем критическое время сжатой удлиненной прямоугольной пластинки ($n = 5$)

$$t_* = \frac{\pi^2}{4kP^5 h b^2 a^2} \left\{ \ln \frac{5b^4 h^4 A_0^4 + 12b^2 h^2 A_0^2 + 8}{5b^4 h^4 A_0^4} - 6[\pi/2 - \arctg(5b^2 h^2 A_0^2/2 + 3)] \right\}, \quad (1.5)$$

$$b = 3.34h^{-2}$$

На фиг. 2 сопоставлены между собой значения безразмерного критического времени ($n = 5$) $\tau_* = kP^5 a^2 h^{-7} t_*$, вычисляемого по формулам (1.3)–(1.5) для различных безразмерных начальных прогибов $\bar{A}_0 = A_0/h$ (кривые 1, 2, 3, соответственно). Результаты расчетов приводят к выводу о том, что разработанная в [1, 2] теория выпучивания пластинок без учета деформаций в срединной плоскости позволяет определить критическое время с удовлетворительной точностью при начальных прогибах $A_0 \approx 0.8h$ и более. Например, при $\bar{A}_0 = 0.8$ решение (1.3) отличается от решения (1.5) на 17%.

2. Основное дифференциальное уравнение в полярных координатах. При малых прогибах и в условиях отсутствия удлинений в срединной плоскости геометрические соотношения в задаче теории ползучести аналогичны соответствующим зависимостям в прикладной теории упругости [6], но формулируются в скоростях

$$\xi_r = -z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2}, \quad \xi_\varphi = -z \left(\frac{\partial \dot{w}}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{r^2 \partial \varphi^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\xi_{r\varphi} = -z \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{r \partial \varphi \partial r} - \frac{\partial \dot{w}}{r^2 \partial \varphi} \right)$$

где r и φ – полярные координаты; $\xi_r, \xi_\varphi, \xi_{r\varphi}$ – скорости деформаций; z – координата, отсчитываемая от срединной плоскости.

Изгибающий и крутящий моменты в поперечных сечениях пластинки определяются с учетом (2.1) по формулам

$$\begin{aligned} M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = -D_n \kappa^{m-1} \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{\partial \dot{w}}{2r \partial r} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{2r^2 \partial \varphi^2} \right) \\ M_\varphi &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi z dz = -D_n \kappa^{m-1} \left(\frac{\partial \dot{w}}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{2 \partial r^2} \right) \\ M_{r\varphi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\varphi} z dz = -\frac{1}{2} D_n \kappa^{m-1} \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{r \partial r \partial \varphi} - \frac{\partial \dot{w}}{r^2 \partial \varphi} \right) \\ \kappa &= \left[\left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \dot{w}}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{r^2 \partial \varphi^2} \right) + \left(\frac{\partial \dot{w}}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{r^2 \partial \varphi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{r \partial r \partial \varphi} - \frac{\partial \dot{w}}{r^2 \partial \varphi} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_{r\varphi}$ – напряжения.

Следствием уравнений равновесия, составленных с учетом внутренних моментов от нормальных сил в срединной плоскости является уравнение [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{2 \partial^2 M_{r\varphi}}{r \partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_\varphi}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{2 \partial M_{r\varphi}}{r^2 \partial \varphi} + \frac{2 \partial M_r}{\partial r} - \frac{\partial M_\varphi}{r \partial r} = \\ = - \left[q + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\varphi \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right) + 2 N_{r\varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}$ – внутренние силы в срединной плоскости пластинки.

Подставим в уравнение (2.3) выражения для моментов (2.2). В результате получим основное дифференциальное уравнение теории выпучивания пластинки в полярных координатах

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \kappa^{m-1}}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{\partial \dot{w}}{2r \partial r} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{2r^2 \partial \varphi^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \kappa^{m-1}}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial \dot{w}}{r^3 \partial r} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{r^4 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{2r^2 \partial r^2} \right) + \\ + \left(\frac{\partial^2 \kappa^{m-1}}{\partial r \partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{r^2 \partial r \partial \varphi} - \frac{\partial \dot{w}}{r^3 \partial \varphi} \right) + \left(\frac{\partial \kappa^{m-1}}{\partial r} \right) \left(\frac{2 \partial^3 \dot{w}}{\partial r^3} + \frac{5 \partial^2 \dot{w}}{2r \partial r^2} - \frac{3 \partial^2 \dot{w}}{r^3 \partial \varphi^2} + \frac{2 \partial^3 \dot{w}}{r^2 \partial r \partial \varphi^2} - \frac{\partial \dot{w}}{r^2 \partial r} \right) + \\ + \left(\frac{\partial \kappa^{m-1}}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{r^3 \partial r \partial \varphi} + \frac{2 \partial^3 \dot{w}}{r^4 \partial \varphi^3} + \frac{2 \partial^3 \dot{w}}{r^2 \partial r^2 \partial \varphi} + \frac{\partial \dot{w}}{r^4 \partial \varphi} \right) + \kappa^{m-1} \nabla^2 \nabla^2 \dot{w} - \\ - \frac{1}{D_n} \left[q + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\varphi \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \right) + 2 N_{r\varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\nabla^2 \nabla^2$ – бигармонический оператор.

Уравнение (2.4) может быть приближенно проинтегрировано [1, 2] при симметричных или несимметричных формах выпучивания. Решение можно представить в виде

$$A/A_0 = (1 - t/t_*)^{1/(1-n)}$$

Критическое время представляет собой физический инвариант. Поэтому вместо (2.4) для вычислений t_* можно использовать другие координаты, в частности, декартовы [2]. Для круглых пластинок использование основного дифференциального уравнения в декартовых координатах неудобно. Однако для пластинок других очертаний вычисления t_* в декартовых координатах оказывается эффективным из-за отсутствия необходимости выводить основное дифференциальное уравнение в соответствующих криволинейных координатах.

3. Осесимметричная задача. В частном случае осесимметричного выпучивания круглой пластинки уравнение равновесия (2.3) и основное дифференциальное уравнение (2.4) принимают, соответственно, вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{2\partial M_r}{r\partial r} - \frac{\partial M_\varphi}{r\partial r} = - \left(q + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\varphi \frac{\partial w}{r\partial r} \right) \\ \left(\frac{\partial^2 \kappa^{m-1}}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{\partial \dot{w}}{2r\partial r} \right) + \frac{\partial \kappa^{m-1}}{\partial r} \left(\frac{2\partial^3 \dot{w}}{\partial r^3} + \frac{5\partial^2 \dot{w}}{2r\partial r^2} - \frac{\partial \dot{w}}{r^2\partial r} \right) + \kappa^{m-1} \nabla^2 \nabla^2 \dot{w} - \\ - \frac{1}{D_n} \left(q + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\varphi \frac{\partial w}{r\partial r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\kappa = \left[\left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} \frac{\partial \dot{w}}{r\partial r} + \left(\frac{\partial \dot{w}}{r\partial r} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Поле нормальных сил в срединной плоскости определяется решением задачи плоского напряженного состояния [7].

В частном случае сплошной пластинки, когда $N_r = N_\varphi = \text{const}$, уравнение (3.1) может быть проинтегрировано по радиусу и представлено в форме

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) - M_\varphi = -Qr + N_r \vartheta r$$

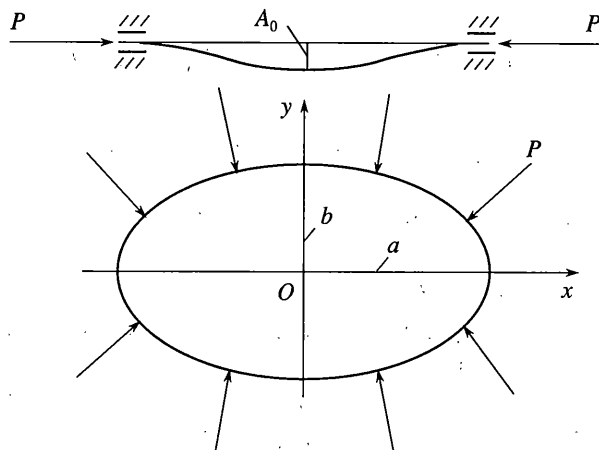
где Q – поперечная сила, $\vartheta = -\partial w/\partial r$ – угол поворота нормали, N_r – растягивающая радиальная сила в срединной плоскости.

В таком виде это уравнение при $q = 0$ было использовано в [1] для определения критического времени защемленной по наружному контуру пластинки, нагруженной сжимающими радиальными силами.

4. Пластины различных очертаний. Например, для защемленной по всему контуру сплошной эллиптической пластинки (фиг. 3) можно задать функцию прогибов в виде [8]:

$$w = A(t)(x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1)^2 \quad (4.1)$$

и использовать для вычислений критического времени основное дифференциальное уравнение, выведенное в декартовых координатах [2]. В частном случае $a = b$ таким образом определяется t_* для круглой пластинки.



Фиг. 3

С помощью метода Бубнова – Галеркина – Канторовича уравнение для определения функции времени с учетом принятого выражения (4.1) и равенств $N_x = N_y = -P$, $N_{xy} = 0$ преобразуется к виду

$$\left(\frac{A}{a}\right)^m (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6) + \frac{A}{D_n} P I_7 = 0$$

$$I_1 = \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{\sqrt{1-\bar{x}^2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \bar{\kappa}^{m-1} \right) [(12 + 2\eta^2)\bar{x}^2 + (4 + 6\eta^2)\bar{y}^2 - 4 - 2\eta^2] f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

$$I_2 = \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{\sqrt{1-\bar{x}^2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \bar{\kappa}^{m-1} \right) \eta^2 [(4\eta^2 + 6)\bar{x}^2 + (2 + 12\eta^2)\bar{y}^2 - 2 - 4\eta^2] f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

$$I_3 = \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{\sqrt{1-\bar{x}^2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \bar{\kappa}^{m-1} \right) 8\bar{x}\bar{y}\eta^2 f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

$$I_4 = \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{\sqrt{1-\bar{x}^2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}} \bar{\kappa}^{m-1} \right) \bar{x}(48 + 16\eta^2) f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

$$I_5 = \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{\sqrt{1-\bar{x}^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{\kappa}^{m-1} \right) \bar{y}(48\eta^4 + 16\eta^2) f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

$$I_6 = \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{\sqrt{1-\bar{x}^2}} \bar{\kappa}^{m-1} (24 + 16\eta^2 + 24\eta^4) f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

$$I_7 = \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{\sqrt{1-\bar{x}^2}} [(12+4\eta^2)\bar{x}^2 + (12\eta^2+4)\bar{y}^2 - 4 - 4\eta^2] f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

$$\bar{\kappa} = [(144+16\eta^4+48\eta^2)\bar{x}^4 + (16+48\eta^2+144\eta^4)\bar{y}^4 + (96+224\eta^2+96\eta^4)\bar{x}^2\bar{y}^2 - (96+64\eta^2+32\eta^4)\bar{x}^2 - (32+64\eta^2+96\eta^4)\bar{y}^2 + 16(1+\eta^2+\eta^4)]^{1/2}$$

$$\bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/b, \quad \eta = a/b, \quad f(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 1)^2$$

Проинтегрируем уравнение (4.2) с учетом начального условия (при $t = 0, A = A_0$). В результате получим искомую зависимость $A(t)$:

$$\frac{1}{1-n} \left(\frac{1}{A^{n-1}} - \frac{1}{A_0^{n-1}} \right) = a^2 \left[-\frac{PI_7}{D_n(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)} \right]^n t$$

Критическое время соответствует условию $A \geq A_0$. Поэтому устремив $A \rightarrow \infty$ определим критическое время

$$t_* = \frac{D_n^n}{a^2(n-1)A_0^{n-1}P^n} \left[\frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{I_7} \right]^n$$

Координатные функции, полученные методами теории упругости, удовлетворяющие граничным условиям для ряда очертаний пластинок, даны в [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов К.И. Анализ выпучивания круглой пластинки в условиях ползучести // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 1995. № 4. С. 91–97.
2. Романов К.И. Анализ выпучивания прямоугольной пластинки в условиях ползучести // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 1999. № 3. С. 109–116.
3. Романов К.И. Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1993. Вып. 33. С. 139–151.
4. Calladine C.R., Drucker D.C. Nesting surfaces of constant rate of energy dissipation in creep // Quart. Appl. Math. 1962. V. 20. № 1. P. 79–84.
5. Романов К.И. Исследование продольного изгиба стержня в условиях ползучести на основе теоремы Келледайна – Друкера // Изв. РАН. МГТ. 1999. № 4. С. 157–161.
6. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. Некоторые задачи прикладной теории упругости. М.: Машгиз, 1958. 974 с.
7. Аминов О.В., Романов К.И. Плоское напряженное состояние кольцевой пластинки при ползучести в условиях больших деформаций // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 1999. № 2. С. 104–114.
8. Бояришинов С.В. Основы строительной механики машин. М.: Машиностроение, 1973. 456 с.
9. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 437 с.
10. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 232 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.09.2002