

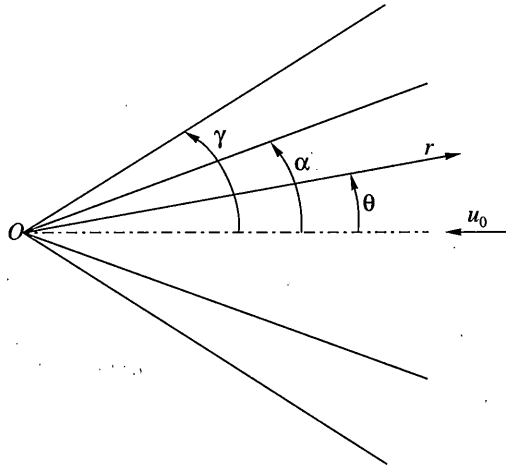
УДК 539.374

© 2004 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ, Е.А. ЛЯМИНА

ВНЕДРЕНИЕ КЛИНА В ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ, ПОДЧИНЯЮЩУЮСЯ МОДЕЛИ ДВОЙНОГО СДВИГА

Внедрение клина или конуса в пластическую среду является одной из классических задач механики твердого тела. В публикуемой работе решена задача о внедрении плоского клина в пластическую среду, подчиняющуюся модели двойного сдвига (double-shearing model в терминологии [1]). В соответствии с этой моделью деформация определяется сдвигом вдоль обоих характеристических направлений системы статических уравнений (уравнения равновесия и условие текучести). Наиболее полно модель описана в [1], а уравнения плоского течения в полярных координатах, требуемые для настоящего решения, даны в [2]. Модель основана на условии текучести Кулона-Мора и ее основными особенностями являются невыполнение ассоциированного закона пластического течения и совпадение характеристик для напряжений и скоростей. Кроме того, при применении закона трения, предложенного в [2, 3], решения являются сингулярными [4], причем асимптотическое поведение решений вблизи поверхностей трения полностью аналогично случаю классической пластичности [5]. В случае внедрения клина, рассмотренном в публикуемой работе, также имеется сингулярная поверхность (линия в плоскости течения), совпадающая с поверхностью клина, где предполагается справедливым закон трения [2, 3]. Отметим, что сингулярные поля скорости в случае внедрения клина или конуса в пластические и вязкие среды интенсивно изучались в последнее время [6–9]. Однако, во всех этих случаях основное внимание уделялось сингулярности вблизи кончика клина или конуса, несвязанной с законом трения. Решения для внедрения конуса в жесткопластический материал, условие текучести которого зависит от среднего напряжения, были получены в [10, 11]. В [10], однако, был применен довольно искусственный закон трения на стенке конуса. В [11] была использована модель двойного сдвига, а трение на поверхности конуса отсутствовало. Решение основывалось на недопустимом разрывном поле скоростей. Возможно, что трудности при получении этого решения связаны с тем, что оно строилось как обобщение соответствующего решения для идеального жесткопластического материала. Действительно, решения [2, 3] являются непосредственными обобщениями решений, полученных для такой модели материала (например, [12]). Однако, в случае внедрения клина имеется существенное качественное различие между решениями, полученными по разным моделям, как показано в публикуемой работе. В частности, поле скоростей является непрерывным на жесткопластической границе.

Рассмотрим движение клина в пластической среде, подчиняющейся модели двойного сдвига [1], со скоростью u_0 вдоль своей оси (фиг. 1). Введем движущуюся полярную систему координат $r\theta$, начало которой совпадает с вершиной клина. Ось симмет-



Фиг. 1

рии клина определяется уравнением $\theta = 0$. При плоском течении уравнения модели [1] в полярной системе координат имеют вид [2]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \sin \varphi + [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2]^{1/2} = 2k \cos \varphi \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

$$\sin 2\psi \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \cos 2\psi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \sin \varphi \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2d\psi}{dt} \right) = 0 \quad (4)$$

Здесь (1) – уравнения равновесия; (2) – условие текучести; (3) – уравнение несжимаемости; (4) – уравнение связи напряженного и деформированного состояний; σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений в системе координат $r\theta$; u , v – проекции вектора скорости на направления r и θ соответственно; ψ – угол между максимальным главным напряжением и осью r , отсчитываемый от оси против хода часовой стрелки; t – время; $d\psi/dt$ – материальная производная; $k = \text{const}$ – коэффициент сцепления; $\varphi = \text{const}$ – угол внутреннего трения.

Ввиду симметрии будем рассматривать только область $\alpha \leq \theta \leq \pi$, где α – половина угла клина. Основное предположение состоит в том, что ψ не зависит от r . Так как течение в системе координат $r\theta$ имеет установившийся характер, то из этого предположения следует, что в этой системе координат

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (5)$$

Отметим, что условие (5) приводит к существенному отличию настоящего решения от решений [2, 3], в которых выполнялось условие $d\psi/dt = 0$. Условие пластичности (2)

удовлетворяется подстановкой

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{rr}}{k} &= \operatorname{ctg} \varphi - \frac{r^m \Phi(\psi)}{\sin \varphi} (1 - \cos 2\psi \sin \varphi) \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{k} &= \operatorname{ctg} \varphi - \frac{r^m \Phi(\psi)}{\sin \varphi} (1 + \cos 2\psi \sin \varphi) \\ \frac{\sigma_{r\theta}}{k} &= r^m \Phi(\psi) \sin 2\psi, \quad \Phi(\psi) \geq 0\end{aligned}\quad (6)$$

где m – произвольная постоянная, а $\Phi(\psi)$ – произвольная функция ψ .

На поверхности клина $\theta = \alpha$ действует условие трения, предложенное в [2, 3]. Принимая во внимание выражение для касательного напряжения (6), для рассматриваемого процесса аналитическая форма этого закона трения будет

$$\psi = \psi_w = \pi/4 + \varphi/2 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha \quad (7)$$

В случае идеального жесткопластического материала второе условие для напряжений (и, соответственно, для ψ) задается на жесткопластической границе, которая, по предположению, является поверхностью разрыва скорости и совпадает с огибающей семейства характеристик. Ниже будет показано, что для рассматриваемой модели материала такое решение не имеет физического смысла. Поэтому будем искать непрерывное решение. Полагая, что жесткопластическая граница определяется уравнением $\theta = \gamma$, имеем

$$v = -u_0 \sin \gamma \quad \text{при} \quad \theta = \gamma \quad (8)$$

$$u = u_0 \cos \gamma \quad \text{при} \quad \theta = \gamma \quad (9)$$

Кроме того, из условия непроникания следует

$$v = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha \quad (\text{или} \quad \psi = \psi_w) \quad (10)$$

Величина γ неизвестна.

Подставляя (6) в уравнения равновесия (1), получаем, с учетом сделанных предположений относительно ψ , два уравнения вида

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{d\psi} = \frac{2m \sin \varphi \sin 2\psi}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)} \quad (11)$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)}{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)} \quad (12)$$

В дальнейшем важное значение будет иметь поведение функции ψ в окрестности точки $\psi = \psi_w$. Раскладывая числитель и знаменатель правой части уравнения (12) в ряд Тейлора в окрестности этой точки и интегрируя с учетом (7), найдем

$$2 \operatorname{tg} \varphi (\psi - \psi_w)^2 \approx m(\alpha - \theta) \quad (13)$$

вблизи точки $\psi = \psi_w$. Так как $\theta \geq \alpha$, то из уравнения (13) следует, что

$$m \leq 0 \quad (14)$$

Интегрирование уравнения (11) дает

$$\Phi = \Phi_0 |m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)|^{m/2} \quad (15)$$

где Φ_0 – постоянная. Ее величина, как и в других аналогичных решениях, остается неопределенной. Решение уравнения (12) также может быть получено в квадратурах, но удобнее его записать в виде

$$\theta = \alpha + 2 \sin \varphi \int_{\psi_w}^{\psi} \frac{\sin \varphi + \cos 2z}{[m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2z)]} dz \quad (16)$$

Очевидно, что это решение удовлетворяет граничному условию (7).

Представим поле скоростей в виде

$$\frac{u}{u_0} = \frac{G(\psi)}{r} - \frac{dg(\psi)d\psi}{d\psi d\theta}, \quad v = u_0 g(\psi) \quad (17)$$

где $G(\psi)$ и $g(\psi)$ – произвольные функции ψ . Представление (17) удовлетворяет условию несжимаемости (3) при любом выборе функций $G(\psi)$ и $g(\psi)$. Подставляя (5) и (17) в (4), с учетом (12), получим уравнения для $G(\psi)$ и $g(\psi)$ в виде

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{d\psi} = - \frac{4 \sin \varphi \sin 2\psi}{[m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)]} \quad (18)$$

$$a_1(\psi) \frac{d^2 g}{d\psi^2} + a_2(\psi) \frac{dg}{d\psi} + a_3(\psi) g = 0 \quad (19)$$

$$a_1(\psi) = \sin \varphi + \cos 2\psi, \quad a_2(\psi) = \frac{2m \cos^2 \varphi \sin 2\psi}{[m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)]}$$

$$a_3(\psi) = \frac{4 \sin^2 \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi) (\cos^2 2\psi + 4 \sin \varphi \cos 2\psi + 3 \sin^2 \varphi - m \cos^2 \varphi)}{[m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)]^2}$$

Решение уравнения (18) имеет форму

$$G = \frac{G_0}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)}$$

где G_0 – постоянная. Из (9) получаем, $G_0 = 0$ при любых m и γ . Следовательно, $G \equiv 0$ и (17) показывает, что радиальная скорость зависит только от θ . Для определения функции g имеем однородное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второй степени (19). Из (8)–(10), (12) и (17) следует, что граничные условия для этого уравнения будут

$$g = 0 \quad \text{при } \psi = \psi_w \quad (20)$$

$$g = -\sin \gamma \quad \text{при } \psi = \psi_\gamma \quad (21)$$

$$\frac{dg}{d\psi} = - \frac{2 \sin \varphi \cos \gamma (\sin \varphi + \cos 2\psi_\gamma)}{m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi_\gamma)} \quad \text{при } \psi = \psi_\gamma \quad (22)$$

Здесь ψ_γ – величина ψ при $\theta = \gamma$. Уравнение (19) имеет особые точки при $\psi = \pm \psi_w$. Краевое условие (20) показывает, что точка $\psi = \psi_w$ принадлежит к области, в которой должно быть построено решение. Вторая особая точка принадлежит к этой об-

ласти, если $\psi_\gamma = -\psi_w$. Отметим, что именно такое условие имеет место в решении, основанном на идеальной жесткопластической модели. Разложим коэффициенты уравнения (19) в ряд Тейлора в окрестности особых точек. В результате получим

$$\begin{aligned} a_1(\psi) &= \mp 2 \cos \varphi (\psi \mp \psi_w) + 2 \sin \varphi (\psi \mp \psi_w)^2 + o[(\psi \mp \psi_w)^2] \\ a_2(\psi) &= \pm 2 \cos \varphi - \frac{4(2+m) \sin \varphi}{m} (\psi \mp \psi_w) + o(\psi \mp \psi_w) \\ a_3(\psi) &= \pm \frac{8 \sin^2 \varphi}{m \cos \varphi} (\psi \mp \psi_w) - \frac{8(4+m) \sin^3 \varphi}{m^2 \cos^2 \varphi} (\psi \mp \psi_w)^2 + o[(\psi \mp \psi_w)^2] \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь и далее верхний знак относится к точке $\psi = \psi_w$, а нижний – к точке $\psi = -\psi_w$. Подставляя (23) в (19) и применяя стандартную процедуру, можно показать, что одно из линейно независимых решений уравнения (19) имеет вид

$$g_1(\psi) = (\psi_w \mp \psi)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\psi_w \mp \psi)^n, \quad c_0 \neq 0 \quad (24)$$

Коэффициенты c_n зависят от того, вблизи какой точки строится решение. Из (19) следует, что второе линейно независимое решение имеет вид

$$g_2(\psi) = g_1(\psi) \int \frac{(\cos 2\psi + \sin \varphi)}{g_1^2(\psi) [m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\cos 2\psi + \sin \varphi)]} d\psi \quad (25)$$

Раскладывая подынтегральное выражение, с использованием (24), в ряд Тейлора вблизи особой точки $\psi = \psi_w$, получим, что решение $g_2(\psi)$ должно содержать член $p(\psi)$ вида

$$p(\psi) = (\psi - \psi_w)^2 \ln(\psi_w - \psi) \quad (26)$$

коэффициент при котором не равен нулю. Из (17) и (26) следует, что в выражение для сдвиговой скорости деформации $\xi_{r\theta}$ будет входить слагаемое

$$\xi_{r\theta} = \frac{u_0}{r} \left[\frac{d^2 p}{d\psi^2} \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 + \frac{dp}{d\psi} \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} \right] + \dots \quad (27)$$

Подставляя (26) в (27) и используя (13), найдем, что скорость деформации $\xi_{r\theta}$ вблизи точки $\psi = \psi_w$ (или $\theta = \alpha$) имеет порядок

$$\xi_{r\theta} = O[1/(\theta - \alpha)] \quad (28)$$

Так как $\sigma_{r\theta} \neq 0$ при $\theta = \alpha$, то выражение для мощности также будет иметь неинтегрируемую особенность вида (28). Следовательно, решение $g_2(\psi)$ не имеет физического смысла. Таким образом, вблизи точки $\psi = \psi_w$ решение уравнения (19) представимо в форме

$$g = c_0 (\psi_w - \psi)^2 + o[(\psi_w - \psi)^2] \quad (29)$$

Очевидно, что (29) удовлетворяет краевому условию (10) при любом значении c_0 . Используя (12), (24) и (25), полностью аналогичный анализ можно выполнить вблизи точки $\psi = -\psi_w$ и показать, что решение вида $g_2(\psi)$ не имеет физического смысла в окрестности этой точки при любой величине γ . Однако, решение вида $g_1(\psi)$ вблизи точки $\psi = -\psi_w$ не может удовлетворять краевому условию (21), которое имеет силу

как для непрерывного, так и для разрывного решения. Отсюда следует, что $\psi_\gamma > -\psi_w$ и особая точка $\psi = -\psi_w$ находится вне области определения решения уравнения (19). Таким образом, как следует из (29), решение уравнения (19) можно представить в виде

$$g = c_0(\psi_w - \psi)^2 \quad \text{при } \psi_w \leq \psi \leq \psi_w(1 - \delta), \quad 0 < \delta \leq 1 \quad (30)$$

В области $\psi_w(1 - \delta) \leq \psi \leq \psi_\gamma$, в которой нет особых точек, решение должно быть найдено численным методом при условиях (21) и (22). Условия непрерывности решения и его производной в точке $\psi = \psi_w(1 - \delta)$ дают еще два уравнения, для выполнения которых имеются три постоянных: c_0 , m и γ . Причем, из (16) следует, что m , γ и ψ_γ связаны соотношением

$$\gamma = \alpha + 2 \sin \varphi \int_{\psi_w}^{\psi_\gamma} \frac{\sin \varphi + \cos 2\psi}{[m \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)]} d\psi \quad (31)$$

Таким образом, имеет место неединственность решения. Отметим, что неединственность также имеет место для решения, основанного на модели идеального жестко-пластического материала. В последнем случае положение линии разрыва скорости не определяется однозначно. Чтобы получить единственное решение, обычно используются некоторые искусственные приемы [8].

Для иллюстрации полученного результата при численном решении задавалась величина ψ_γ , а остальные постоянные определялись из краевых условий. Это решение показывает, что $|m|$ уменьшается с уменьшением $|\psi_\gamma|$ и существует предельное значение $\psi_\gamma = \psi_m$, при котором m обращается в ноль. Из (14) следует, что решение не может быть продолжено в область $|\psi_\gamma| < |\psi_m|$. Случай $m = 0$ должен быть исследован отдельно, так как при таком m меняется характер поведения решения вблизи особой точки. Действительно, при $m = 0$ уравнение (19) принимает вид

$$(\cos 2\psi + \sin \varphi) d^2 g / d\psi^2 + (\cos 2\psi + 3 \sin \varphi) g = 0 \quad (32)$$

Интегрирование в (12), с учетом (7), дает

$$\psi - \psi_w = \alpha - \theta \quad (33)$$

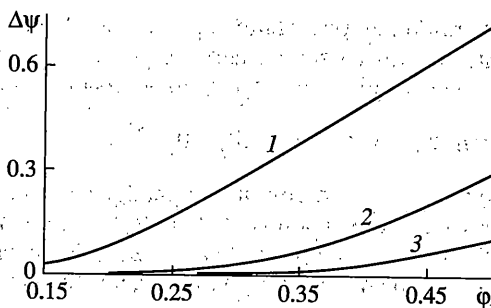
По-прежнему, $\psi = \psi_w$ является особой точкой уравнения (32). Однако, в отличие от (24), одно из линейно независимых решений этого уравнения будет

$$g_1(\psi) = (\psi_w - \psi) \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\psi_w - \psi)^n, \quad b_0 \neq 0 \quad (34)$$

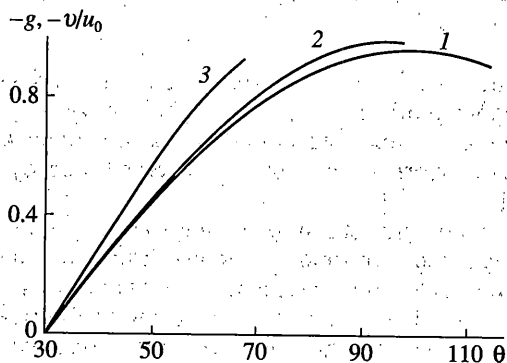
Как и в общем случае, $m \neq 0$, можно показать, что второе линейно независимое решение не имеет физического смысла. Таким образом, из (34) следует, что решение уравнения (32) можно представить в виде

$$g = b_0(\psi - \psi_w) \quad \text{при } \psi_w \leq \psi \leq \psi_w(1 - \delta) \quad (35)$$

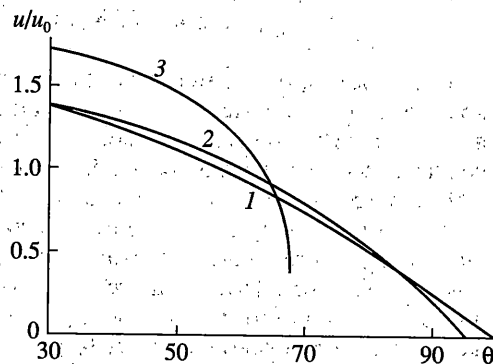
В области $\psi_w(1 - \delta) \leq \psi \leq \psi_\gamma$, в которой нет особых точек, решение должно быть найдено численным методом при тех же условиях, которые были использованы при решении уравнения (19). Однако, в данном случае четыре произвольных постоянных определяются из четырех условий, давая единственное решение (если оно существует). В частности, из этого решения определяется величина ψ_m . Однако, больший интерес для понимания особенностей решения представляет величина $\Delta\psi = |-\psi_w| - |\psi_m| = \psi_w + \psi_m$, показывающая, насколько предельный угол ψ_m отличается от угла $-\psi_w$, соот-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ветствующего особой точке, в которой решение не имеет физического смысла. Зависимость $\Delta\psi$ от ϕ показана на фиг. 2 ($1 - \alpha = 30^\circ$, $2 - \alpha = 45^\circ$, $3 - \alpha = 50^\circ$). Из этого рисунка видно, что с уменьшением угла ϕ и увеличением α область, в которой существует решение, уменьшается, и ее размер приближается к нулю. Причем, эта тонкая область локализуется вблизи особой точки уравнения (19), в которой решение не имеет физического смысла. Такое поведение решения может создавать значительные трудности при численном решении аналогичных задач. Максимально возможный угол раствора пластической зоны определяется из (33) при $\psi = \psi_m$. Зависимость g от θ для некоторых значений ψ_γ из интервала $-\psi_w \approx -0.985 < \psi_\gamma \leq \psi_m$, полученная из численного решения уравнений (16), (19) и (32) при $\phi = 0.4$ и $\alpha = \pi/6$, показана на фиг. 3 ($1 - \psi_\gamma = \psi_m \approx -0.49$, $2 - \psi_\gamma = -0.7$, $3 - \psi_\gamma = -0.9$). Как следует из (17), эта зависимость также демонстрирует распределение скорости v . Распределение радиальной скорости, определенное из (17) с использованием решения для g и уравнения (12), приводится на фиг. 4 ($1 - \psi_\gamma = \psi_m \approx -0.49$, $2 - \psi_\gamma = -0.7$, $3 - \psi_\gamma = -0.9$). Распределение напряжений может быть найдено из (6), (15) и (16).

Сингулярный характер поля скоростей следует из (13), (17) и (24) при $c_1 \neq 0$. Действительно, из этих уравнений можно найти, что вблизи поверхности трения сдвиговая скорость деформации имеет порядок $\dot{\epsilon}_{\theta 0} = O[(\theta - \alpha)^{-1/2}]$. Подстановка (23) и (24) в (18) дает

$$c_1 = -c_0 \frac{2 \operatorname{tg} \phi (3m + 4)}{3m} \quad (36)$$

Однако сингулярность исчезает при $m = 0$, как видно из (17), (33) и (34). Из (36) следует, что сдвиговая скорость деформации также конечна при $m = -4/3$, так как в этом случае $c_1 = 0$. Численные расчеты показывают, что такое решение возможно. Отметим, что при произвольном m поле скорости, принятое в настоящем решении, было исключено из анализа, выполненного в [4], так как в этой работе предполагалось, что нормальная скорость деформации ξ_{rr} (в обозначениях публикуемой работы) не равна нулю на поверхности трения. Как видно из (17), при $G = 0$ это условие не выполняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00419 и 03-01-06318) и гранта Президента РФ НШ-1849.2003.1 для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, а также Фонда содействия отечественной науке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spencer A.J.M.* Deformation of ideal granular materials. *Mechanics of Solids. The Rodney Hill 60th Anniversary Volume* Eds H.G. Hopkins and M.J. Sewell, Oxford: Pergamon Press, 1982. P. 607–652.
2. *Pemberton C.S.* Flow of imponderable granular materials in wedge – shaped channels // *J. Mech. and Phys. Solids*. 1965. V. 13. № 6. P. 351–360.
3. *Marshall E.A.* The compression of a slab of ideal soil between rough plates // *Acta mech.* 1967. V. 3. № 2. P. 82–92.
4. *Александров С.Е., Лямина Е.А.* Сингулярные решения при плоском пластическом течении материалов, чувствительных к среднему напряжению // *Докл. РАН*. 2002. Т. 383. № 4. С. 492–495.
5. *Alexandrov S., Richmond O.* Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // *Intern J. Non-Linear Mech.* 2001. V. 36. № 1. P. 1–11.
6. *Fleck N.A., Durban D.* Steady penetration of a rigid cone with a rough wall into a power-law viscous solid // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1991. V. 58. № 4. P. 872–880.
7. *Durban D., Rand O.* Singular fields in plane-strain penetration // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1991. V. 58. № 4. P. 910–915.
8. *Durban D., Fleck N.A.* Singular plastic fields in steady penetration of a rigid cone // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1992. V. 59. № 4. P. 706–710.
9. *Durban D.* Friction and singularities in steady penetration // *Proc. IUTAM Symp. on Non-Linear Singularities in Deformation and Flow / Eds. D. Durban, J.R.A. Pearson.* Dordrecht: Kluwer, 1999. P. 141–154.
10. *Балашов Д.Б., Зволинский Н.В.* Об обтекании конуса жесткопластической средой // *Изв. РАН. МТТ*. 1996. № 3. P. 46–53.
11. *Spencer A. J. M.* Plastic flow past a smooth cone // *Acta mech.* 1984. V. 54. № 1–2. P. 63–74.
12. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.08.2002