МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2004

УДК 539.214; 539.374

© 2004 г. М.Я. БРОВМАН

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрена плоская деформация идеальной жесткопластической среды в криволинейных ортогональных координатах.

Методы решения уравнений пластического течения рассмотрены в работах [1–3].

В большинстве случаев такие задачи рассматриваются в традиционных системах координат: декартовых, цилиндрической и сферической.

Однако, в процессах обработки металлов давлением часто используют инструменты с другими, более сложными, криволинейными поверхностями, поэтому желательна разработка методов решения и таких задач.

В [4, 5] использованы криволинейные координаты, в которых линии тока совпадают с координатными линиями, однако получение точных решений для каждой координатной системы затруднительно.

В публикуемой работе плоская деформация рассмотрена в ортогональных координатах с введением новой функции коэффициентов первой квадратичной формы и их производных, что позволяет в ряде случаев получать решения для произвольной ортогональной системы координат.

Уравнения движения в криволинейных ортогональных координатах при плоской деформации имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+\frac{2\tau_{\alpha\beta}}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\frac{\sigma_\alpha-\sigma_\beta}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha} = \rho F_1 \\ &\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\beta}+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{2\tau_{\alpha\beta}}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+\frac{\sigma_\beta-\sigma_\alpha}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\beta} = \rho F_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$F_1 = H_1\frac{\partial v_\alpha}{\partial\tau}+v_\alpha\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{v_\beta H_1}{H_2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial\beta}-\frac{v_\beta^2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+\frac{v_\alpha v_\beta}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta} \tag{2}$$

где σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора напряжений в криволинейных координатах α, β; ρ – плотность материала, τ – время.

Выражение для F_2 аналогично (2) при замене H_1 на H_2, v_α на v_β α на β (и наоборот).

Для стационарных задач $\partial v_\alpha/\partial\tau = \partial v_\beta/\partial\tau = 0$, а в статических задачах принимают $F_1 = F_2 = 0$, т.е. рассматривают (1), как уравнения равновесия.

В уравнениях (1), (2) H_1 и H_2 – коэффициенты первой квадратичной формы, определяющей элемент длины дуги $ds = \sqrt{H_1^2 d\alpha^2 + H_2^2 d\beta^2}$, поэтому первая квадратичная форма определяет метрические характеристики системы координат.

Решение системы двух уравнений (1) совместно с условием текучести

$$(\sigma_\alpha-\sigma_\beta)^2+4\tau_{\alpha\beta}^2 = 4k^2$$

где k – предел текучести при сдвиге, вызывает значительные затруднения.

Однако, можно получить некоторые простые решения для произвольной системы ортогональных координат, если ввести новую функцию коэффициентов H_1, H_2 и их производных.

Известно, что коэффициенты H_1 и H_2 не являются независимыми. Нельзя ввести любые функции H_1, H_2 переменных α, β и трактовать при этом α, β как некоторые криволинейные координаты в эвклидовом пространстве, для которых H_1 и H_2 являются коэффициентами первой дифференциальной формы.

При этом могут быть нарушены условия связности [6]. Для того, чтобы переменные α, β можно было трактовать, как криволинейные координаты, для которых имеется инвариантная дифференциальная форма с коэффициентами H_1, H_2 эти функции (H_1, H_2) должны удовлетворять определенной системе уравнений с частными производными второго порядка [6, 7].

Для плоской (двумерной) задачи необходимо выполнение одного уравнения (Ламе):

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right) = 0 \tag{3}$$

Если компоненты вектора скорости связаны некоторым соотношением (условием несжимаемости), то можно ввести функцию тока, обеспечивающую выполнение этой связи. Наличие связи (3) между величинами H_1, H_2 позволяет ввести новую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$ координат α, β согласно формулам

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta} \tag{4}$$

что обеспечивает выполнение (3).

Назовем функцию $\Phi(\alpha, \beta)$ метрической, поскольку она определена коэффициентами первой дифференциальной (метрической) формы и их производными.

Использование функции Φ может в некоторых случаях оказаться полезным, поскольку существуют простые решения уравнений равновесия, удовлетворяющие также и условию текучести, причем напряжения зависят только от функции Φ.

Если принять в (1) $F_1 = F_2 = 0$, то очевидно, что статически допустимыми решениями являются:

$$\tau_{\alpha\beta} = k\sin(2\Phi), \quad \sigma_\alpha = C_1 - k\cos(2\Phi), \quad \sigma_\beta = C_1 + k\cos(2\Phi) \tag{5}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = k\cos(2\Phi), \quad \sigma_\alpha = C_1 + k\sin(2\Phi), \quad \sigma_\beta = C_1 - k\sin(2\Phi) \tag{6}$$

где C_1 – постоянная.

Если удается также найти такую функцию $\sigma_0(\alpha, \beta)$, что

$$\partial\sigma_0/\partial\alpha = \rho F_1, \quad \partial\sigma_0/\partial\beta = \rho F_2$$

то добавив σ_0 к σ_α и σ_β в формулах (5) или (6), получим решение (1) с учетом динамики. Эти универсальные (т.е. применимые для любой системы ортогональных координат) решения позволяют в ряде случаев получать результаты, полезные при рассмотрении прикладных задач.

Отметим, что универсальные решения (5) и (6) применимы и при плоской упругой деформации, если заменить в них величину k на некоторую постоянную, меньшую по модулю, чем k.

В плоской задаче теории упругости, если не учитывать инерционные и массовые силы, то должны быть выполнены два уравнения равновесия и условие совместности деформаций [8]. Последнее, записанное в напряжениях, требует, чтобы величина $(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$ была гармонической функцией координат. Видно, что системы (5) и (6) всем этим трем условиям удовлетворяют, что позволяет применять их для некоторых упругих и упругопластических задач. Однако, в данной работе ограничимся только задачами о деформации жесткопластической среды.

Необходимо найти скорости, согласующиеся с напряжениями (5) или (6). Поле скоростей с компонентами v_α, v_β определяется условием несжимаемости и соотношением (для решения (5)):

$$\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{4\varepsilon_\alpha} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} = -0.5\,\mathrm{tg}(2\Phi) \tag{7}$$

где ε_α, $\gamma_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора скорости деформации, определяемые по обычным формулам [1, 2].

Если ввести функцию тока $F(\alpha, \beta)$ (см. [5])

$$v_\alpha = \frac{1}{H_2}\frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad v_\beta = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial F}{\partial \alpha} \tag{8}$$

обеспечивающую выполнение условия несжимаемости, то для F получаем уравнение

$$\begin{gathered}\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{2\,\mathrm{tg}(2\Phi)}{H_1 H_2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial F}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - \frac{2\,\mathrm{tg}(2\Phi)}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta}\right] - \\ - \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial F}{\partial \beta}\left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{2\,\mathrm{tg}(2\Phi)}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha}\right] = 0\end{gathered} \tag{9}$$

Любое, согласующееся с краевыми условиями для скоростей, решение (9) определяет поле скоростей для универсального решения (5).

Используя формулы (4), можно записать уравнение (9) в виде:

$$\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\ln\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)\frac{\cos(2\Phi)}{H_1 H_2}\right]\right\} - \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\ln\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)\frac{\cos(2\Phi)}{H_1 H_2}\right]\right\} + \frac{2\,\mathrm{tg}(2\Phi)}{H_1 H_2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} = 0 \tag{10}$$

Если использовать второе универсальное решение (6), то в (7) следует вместо $0.5\,\mathrm{tg}(2\Phi)$ подставить – $0.5\,\mathrm{ctg}(2\Phi)$, и при $\gamma_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_\alpha \mathrm{ctg}(2\Phi)$ получаем вместо (10) уравнение

$$\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\ln\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)\frac{\sin(2\Phi)}{H_1 H_2}\right]\right\} - \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\ln\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)\frac{\sin(2\Phi)}{H_1 H_2}\right]\right\} - \frac{2\,\mathrm{ctg}(2\Phi)}{H_1 H_2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta} = 0 \tag{11}$$

При решении некоторых задач, имеющих практическое применение, следует обратить внимание на входящие в формулы (10) и (11), выражения $\sin(2\Phi)/(H_1H_2)$ или $\cos(2\Phi)/(H_1H_2)$.

Если они являются произведением функций α и β, то их логарифм является суммой некоторых функций α и β, т.е. $\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta)$.

В этих случаях (10) или (11) имеют простые решения, например:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = v_\beta = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = \mathrm{const} \neq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = C_1 \exp[-\varphi_2(\beta)]$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = v_\alpha = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \mathrm{const} \neq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = C_2 \exp[-\varphi_1(\alpha)]$$

где C_1, C_2 – постоянные, определяемые краевыми условиями.

Приведем примеры некоторых систем ортогональных координат, в которых были получены решения плоской задачи теории пластичности.

1. Для декартовых координат $\alpha = x$, $\beta = y$: $H_1 = H_2 = 1$, $\Phi = \mathrm{const}$. Кривизна координат равна нулю.

2. Для полярных координат $x = \alpha\cos\beta$, $y = \alpha\sin\beta$: $H_1 = 1$, $H_2 = \alpha$, $\Phi = \beta$.

3. Если оба семейства координатных линий – логарифмические спирали, то

$$x = \sqrt{\alpha\beta}\cos\left[0.5\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right], \quad y = \sqrt{\alpha\beta}\sin\left[0.5\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$$

$$H_1 = \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}, \quad H_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}, \quad \Phi = 0.5\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

4. Для параболических координат, (когда оба семейства координатных линий – параболы):

$$x = \alpha\beta, \quad y = 0.5(\beta^2-\alpha^2)$$

$$H_1 = H_2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \Phi = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

5. Если оба семейства координатных линий – гиперболы, см. [4], то

$$\alpha = 0.5(x^2-y^2), \quad \beta = xy, \quad H_1 = H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^2+\beta^2)^{-0.25}, \quad \Phi = -0.5\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

6. Если координатными линиями являются эллипсы и гиперболы

$$x = \mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta, \quad y = \mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta$$

$$H_1 = H_2 = \sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha-\cos^2\beta}, \quad \Phi = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\beta/\mathrm{tg}\,\alpha)$$

7. Для координатных линий в форме циклоид

$$\alpha = x-\sqrt{1-y^2}-\arcsin y, \quad \beta = x-\sqrt{1-y^2}+\arcsin y$$

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}$$

$$\Phi = \frac{1}{4}(\beta-\alpha)$$

8. Для биполярных координат

$$x = \mathrm{sh}\,\beta(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{-1}, \quad y = \sin\alpha(\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{-1}$$

$$H_1 = H_2 = (\mathrm{ch}\,\beta-\cos\alpha)^{-1}, \quad \Phi(\alpha,\beta) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{(1+\mathrm{ch}\,\beta)\,\mathrm{tg}(0.5\alpha)}{\mathrm{sh}\,\beta}\right]$$

9. Если одно из семейств координатных линий – астроиды, то при координатах

$$x = \left(\frac{\alpha^2-\beta}{2\alpha}\right)^{1.5}, \quad y = \left(\frac{\alpha^2+\beta}{2\alpha}\right)^{1.5}$$

$$H_1 = \frac{3}{4\alpha\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha^4-\beta^2}, \quad H_2 = \frac{3}{4\sqrt{\alpha}}, \quad \Phi = -0.5\arcsin\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)$$

10. Если одно из семейств координатных линий – параболы, полученные сдвигом одной из них вдоль оси y, а второе – логарифмические кривые, то

$$\alpha = y - x^2, \quad \beta = y + \ln\sqrt{x}, \quad H_1 = (1+4x^2)^{-0.5}, \quad H_2 = 2x(1+4x^2)^{-0.5}$$

$$\Phi = -\operatorname{arctg}(2x)$$

11. Для криволинейных ортогональных координат

$$\alpha = yx^{\frac{1}{m}}, \quad \beta = 0.5(m^2x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = myx^{1-\frac{1}{m}}(m^2x^2+y^2)^{-1}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = mx(m^2x^2+y^2)^{-1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = m^2x^{2-\frac{1}{m}}(m^2x^2+y^2)^{-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = -y(m^2x^2+y^2)^{-1}$$

будем иметь

$$H_1 = mx^{1-\frac{1}{m}}(m^2x^2+y^2)^{-0.5}, \quad H_2 = (m^2x^2+y^2)^{-0.5}, \quad \Phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{mx}{y}\right)$$

где m – постоянная, выбором которой можно варьировать форму координатных линий. Использование x, y в этом случае не означает перехода к декартовым координатам компоненты напряжений σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ определяются в криволинейных координатах α, β, а x, y необходимо рассматривать, как функции α, β.

В ряде случаев это упрощает расчеты, например, в системе координат *10* прямые x = const являются линиями постоянных напряжений. В таком виде упрощаются и расчеты для системы координат *11*.

Функция Φ является существенной характеристикой координатных систем. Так в системах *3*, *4*, *5* и *7* переменные α, β входят в $\Phi(\alpha, \beta)$ симметричным образом и оба семейства координатных линий относятся к одному классу, (т.е. оба семейства – логарифмические спирали, параболы либо гиперболы, а для системы *7* оба семейства координатных линий – циклоиды).

Для координатной системы *2* функция $\Phi(\alpha, \beta)$ зависит только от одной координаты β и вдоль линии α (т.е. при β = const) кривизна постоянна (равна нулю); а именно линии β определяют кривизну данной системы координат.

Отметим, что для всех координат, в которых $H_1 = H_2 = H$, формулы (4) можно рассматривать, как условия Коши–Римана и следовательно, существует дифференцируемая функция $\ln H + i\Phi$ комплексного переменного $\alpha + \beta i$, $i = \sqrt{-1}$.

Рассмотрим далее более узкий класс скоростей таких, в которых две компоненты вектора скорости связаны между собой функциональной зависимостью, в простейшем случае линейной (c – постоянная):

$$v_\beta = cv_\alpha \tag{12}$$

Совместно с условием несжимаемости (12) определяет поле скоростей, а в ряде систем координат и точные решения.

Функция тока в этом случае должна быть функцией инварианта – решения уравнения

$$H_1 d\alpha = \frac{H_2}{c}d\beta \tag{13}$$

В частности, для всех систем координат, в которых $H_1 = H_2$, это решение $u = \alpha - \beta/c$. Приведем несколько примеров.

Для декартовых координат получаем решение (C_1 – постоянная):

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{k(c^2-1)}{\sqrt{c^2+1}}, \quad \sigma_\alpha = C_1 + \frac{4ck}{\sqrt{c^2+1}}, \quad \sigma_\beta = C_1$$

Решение, удовлетворяющее условию (12), существует и для полярных координат: $\upsilon_\alpha = f(u)/\alpha$, $\upsilon_\beta = cf(u)/\alpha$, где инвариант $u = c\ln\alpha - \beta$ определен решением уравнения (13), а напряжения можно выразить через функцию $f(u)$:

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta} &= \frac{k}{\sqrt{\delta}}\left[(c^2-1)\frac{df}{du} - 2cf(u)\right] \\
\sigma_\alpha &= C_1 - C_2\ln\alpha + \frac{k}{\sqrt{\delta}}\left[c(c^2+3)\frac{df}{du} - 2(c^2+2)f(u)\right] + 2k\int\left[(c^2-1)\frac{df}{du} - 2cf(u)\right]\frac{du}{\sqrt{\delta}} \\
\sigma_\beta &= \sigma_\alpha - \frac{4k}{\sqrt{\delta}}\left[c\frac{df}{du} - f(u)\right] \\
\delta &= (c^2+1)\left[(c^2+1)\left(\frac{df}{du}\right)^2 - 4cf(u)\frac{df}{du} + 4f^2(u)\right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Сама функция $f(u)$ определена уравнением

$$k(c^2+1)\left\{\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left[(c^2+1)\frac{df}{du} - 2cf(u)\right] + \frac{2}{\sqrt{\delta}}\left[c\frac{df}{du} - 2f(u)\right]\right]\right\} = C_2$$

где $C_1 C_2$ – постоянные.

Приведенные формулы дают обобщение известного решения А. Надаи (которое получим при $c = 0$) [1]:

Если $\tau_{\alpha\beta} = 0$, то получаем

$$\frac{1}{f(u)}\frac{df}{du} = \text{const} = \frac{2c}{c^2-1}, \quad f(u) = \exp\left(\frac{2cu}{c^2-1}\right)$$

$$\sigma_\alpha = C_1 - 2k\ln\alpha, \quad \sigma_\beta = C_1 - 2k - 2k\ln\alpha$$

Решением является и функция $f(u) = \text{const}$, при которой $\tau_{\alpha\beta}$, $(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)$ – величины постоянные.

Если для данной задачи добавить к напряжениям σ_α и σ_β функцию $\sigma_0 = \rho f^2/(2\alpha^2)$ ($f = \text{const}$), то получим решение более сложной, динамической задачи.

Для логарифмических спиралей *3* помимо универсальных решений (5) и (6), можно получить и решение, удовлетворяющее условию (12):

$$\upsilon_\alpha = f(u)\alpha^{0.5(c+1)}, \quad u = \frac{\alpha^c}{\beta}, \quad \tau_{\alpha\beta} = -\frac{k(c+1)}{\sqrt{c^2+2c+2}}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{k}{\sqrt{c^2+2c+2}}[C_1 + (c+2)\ln\alpha + c\ln\beta]$$

$$\sigma_\beta = \frac{k}{\sqrt{c^2+2c+2}}[C_1 + 2 + (c+2)\ln\alpha + c\ln\beta]$$

Анализ величин H_1, H_2 и Φ для циклоид показывает, что существует решение, для которого все компоненты скоростей и напряжений функции только переменной $u = 0.5(\beta - \alpha) = 2\Phi$ и уравнения равновесия выполнены, если $\tau_{\alpha\beta}$ удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\left(\sin u - \frac{\tau_{\alpha\beta}\cos u}{\sqrt{k^2 - \tau_{\alpha\beta}^2}}\right)\frac{d\tau_{\alpha\beta}}{du} + \tau_{\alpha\beta}\cos u - \sin u\sqrt{k^2 - \tau_{\alpha\beta}^2} = 0 \qquad (15)$$

При допущении (12) условие несжимаемости определяет поле скоростей

$$v_\alpha = f(\sqrt{1 - \sin u} - c\sqrt{1 + \sin u})^{-1}, \quad v_\beta = cv_\alpha$$

где f – постоянная.

Компоненты тензора скорости деформации и интенсивность этого тензора T при этом равны

$$\varepsilon_\alpha = -0.25\sqrt{2}f(c^2 + 1)(\sqrt{1 - \sin u} - c\sqrt{1 + \sin u})^{-2}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{f\sqrt{2}(c^2 + 1)}{\cos u}(\sqrt{1 - \sin u} - c\sqrt{1 + \sin u})^{-2}$$

$$T = \frac{f(c^2 + 1)}{\sqrt{2}\cos u}(\sqrt{1 - \sin u} - c\sqrt{1 + \sin u})^{-2}$$

Это определяет девиатор напряжений $\tau_{\alpha\beta} = k\sin u = k\sin(2\Phi)$, $\sigma_\alpha - \sigma_\beta = 2k\cos u$, причем $\tau_{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению (15).

В ряде случаев использование аналогичных полей скоростей позволяет получить точные решения задач, имеющих большое значение для практики, в частности, задачу обтекания жесткого клина пластическим материалом.

В последние годы получили применение машины импульсной резки (МИР), в которых реализуется деформация металла клиновым инструментом.

Использование таких машин позволяет в несколько раз уменьшить массу и стоимость оборудования по сравнению с обычными гидравлическими прессами.

Были использованы координаты *11* при $c = 0$ с линиями тока в форме гипербол и асимптот $y = \pm x\sqrt{m}$, когда

$$F_1 = 0.5c_0^2\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2^{-2}), \quad F_2 = -\frac{c_0^2}{H_2^2}\frac{\partial \ln H_1}{\partial\beta}$$

Полученное точное решение имеет вид

$$v_\alpha = c_0\sqrt{m^2x^2 + y^2} = \frac{c_0 y}{\cos\Phi}, \quad v_\beta = 0$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -k\cos(2\Phi) = -\frac{k(y^2 - m^2x^2)}{m^2x^2 + y^2} \qquad (16)$$

$$\sigma_{\alpha,\beta} = C_1 \pm \frac{2kmxy}{m^2x^2 + y^2} + 0.5\rho m c_0^2(x^2 + y^2)$$

где c_0, C_1, m – постоянные величины, знак плюс в (16) соответствует σ_α, а минус – σ_β.

В данной задаче функция $\sin(2\Phi)(H_1H_2)^{-1} = 2\alpha$ и поэтому существует решение (11):

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial\beta} = \mathrm{const} = v_0$$

а следовательно существует и поле скоростей при универсальном решении (6), т.е. точное решение, определяемое формулами (16).

В (16) x, y следует рассматривать, как функции координат α, β.

Можно записать нормальные напряжения в виде

$$\sigma_{\alpha,\beta} = 2k\left[C_1 \pm \frac{mxy}{m^2x^2+y^2} + \frac{0.5a(x^2+y^2)}{mx_0^2}\right], \quad a = \frac{\rho v_0^2}{2k}, \quad c_0 = \frac{v_0}{mx_0}$$

где a – безразмерный параметр, характеризующий влияние динамики, v_0 – скорость в точке с координатами $x = x_0$, $y = 0$.

Отметим, что обычно точные решения уравнений (1) (2) удавалось получить только для простейших задач при одноосном напряженном состоянии, но в данном случае оказалось возможным найти точное решение задачи обтекания жесткого клина, образованного асимптотами линий тока.

На фиг. 1 представлены результаты расчетов при $m = 13.92$, $\sqrt{m} = 3.73$, т.е. при угле клина FAD:30°, а также при $\rho = 7800$ кг/м^3; $2k = 300$ МПа; $a = 0.4$; $v_0 = 124$ м/с. Зона деформации ограничена линиями EG, BG, где $\beta = \mathrm{const} = 28$ и FA, DA, где $\beta = 0$ (линейные размеры даны в [м]). На линиях CD и CF (при $\alpha = 5.7$) суммарное усилие равно нулю, и из этого условия определена постоянная C_1.

На фиг. 1 показаны линии тока $\beta = 0$, 1.74, 10 и 28, а также эпюры скоростей течения на EA и CF. В точках E и B $v_\alpha = v_0$. На линии EG приведена эпюра безразмерных напряжений $\tau'_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}/(2k)$, на AB – $\sigma'_\alpha = \dfrac{\sigma_\alpha}{2k}$ и на BC – $\sigma'_\beta = \sigma_\beta/(2k)$.

Нормальное давление на поверхности клина $1.8k$, а касательное напряжение здесь равно $0.92\,k$, что близко к экспериментальным данным для стальных заготовок, когда $\tau_{\alpha\beta}$ близко по модулю к величине k, а $\sigma_\beta = -(1.7–2.2)k$. Приведенные формулы были использованы для расчетов трех агрегатов импульсной резки заготовок углеродистых сталей (Ст 3, Ст 5) при 1000–1100°С.

Для волочения через криволинейные матрицы было использовано точное решение для системы 9 (астроид) при $c = 0$. Оно имеет вид

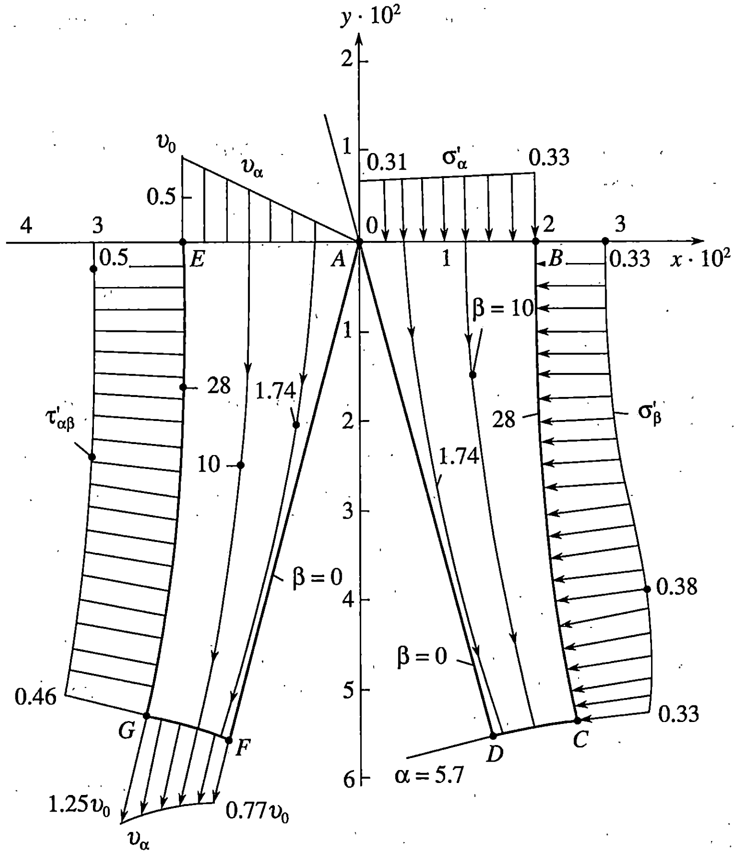
$$v_\alpha = f\sqrt{\alpha}, \quad v_\beta = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = -k\sin(2\Phi) = k\frac{\beta}{\alpha^2}$$

$$\sigma_{\alpha,\beta} = C_1 \pm \frac{k}{\alpha^2}\sqrt{\alpha^4-\beta^2} + 0.5\rho f^2(\alpha+\beta)$$

где f, C_1 – постоянные величины (знак плюс для σ_α, минус для σ_β).

В данной системе координат $\cos(2\Phi)(H_1H_2)^{-1} = \mathrm{const} = 16/9$, и сразу можно сделать вывод, что применима формула (5), причем легко определяется и функция σ_0, т.е. решение динамических уравнений (1).

Пример численного расчета для волочения через криволинейную матрицу иллюстрируется фиг. 2, на которой показана зона деформации, ограниченная астроидами $\alpha = x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ и $\alpha = 3$, а также линиями $\beta = \pm 1$, близкими по форме к поверхности матриц, используемых при волочении.



Фиг. 1

При скорости волочения 5 м/с влияние динамики очень мало и было принято $\rho F_1 \approx \rho F_2 \approx 0$.

На фиг. 2 показаны линии тока $\beta = 0$, $\beta = \pm 0.5$ и $\beta = \pm 1.0$, а также напряжения σ'_α при $\alpha = 3$ и $\alpha = 1$ (на линии $\alpha = 1$ равно нулю суммарное усилие, что позволило определить постоянную C_1).

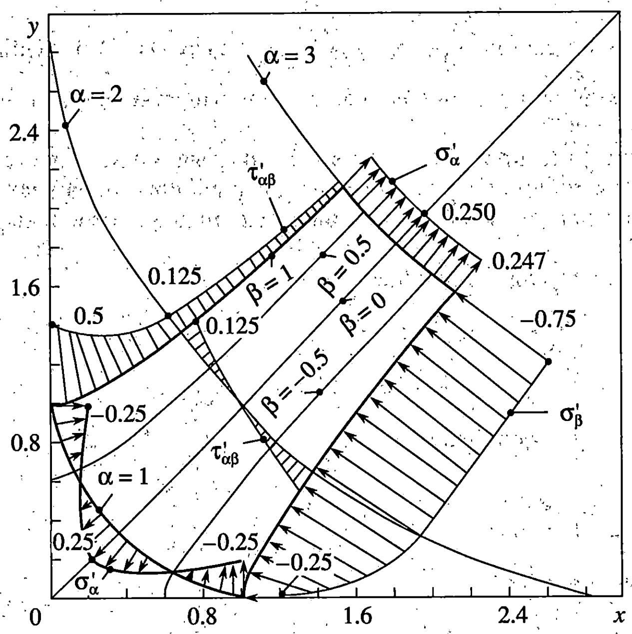
Также на фиг. 2 приведена эпюра σ'_β на линии $\beta = -1$ и $\tau'_{\alpha\beta}$ на линиях $\beta = 1$ и $\alpha = 2$.

Рассмотрим далее более узкий класс полей скоростей, в котором компоненты вектора v_α и v_β являются постоянными величинами. В декартовых координатах такое условие соответствует движению жесткого тела без деформации. В общем же случае из условия несжимаемости

$$\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_\beta}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + \frac{v_\alpha}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} = 0$$

следует, что постоянство v_α и v_β возможно только при выполнении условия

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta}\left(\frac{\partial H_2}{\partial \alpha}\right)^{-1} = -\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right)^{-1} = -\frac{v_\alpha}{v_\beta} = \text{const} = \gamma \qquad (17)$$



Фиг. 2

Если это условие выполнено, то определив компоненты тензора скорости деформации, определяем компоненты девиатора напряжений

$$\tau_{\alpha\beta} = k\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2+1}, \quad \sigma_\alpha - \sigma_\beta = \frac{4k\gamma}{1+\gamma^2}$$

и из уравнений равновесия напряжения

$$\sigma_\alpha = \varphi_2(\beta) - 2k\gamma\ln H_2, \quad \sigma_\beta = \varphi_1(\alpha) + \frac{2k}{\gamma}\ln H_1$$

$$\varphi_2(\beta) - \varphi_1(\alpha) - 2k\ln\left(H_1^{\frac{1}{\gamma}}H_2^{\gamma}\right) = \frac{4k\gamma}{2+\gamma^2} = \text{const}$$

Выполнить это равенство возможно только в том случае, если величина $H_1^{\frac{1}{\gamma}}H_2^{\gamma}$ является произведением функций α и β, что определяет выбор дифференцируемых функций $\varphi_1(\alpha)$ и $\varphi_2(\beta)$. Необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left[\ln\left(H_1^{\frac{1}{\gamma}}H_2^{\gamma}\right)\right] = 0 \tag{18}$$

но нетрудно показать, что оно действительно будет выполнено, если только выполнено равенство (17). Можно, используя формулу (17), заменить в формуле (3) $\dfrac{\partial H_2}{\partial\alpha}$

на $\frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_1}{\partial \beta}$, а во второй скобке $\frac{\partial H_1}{\partial \beta}$ на $\gamma\frac{\partial H_2}{\partial \alpha}$. При этом из (3) получим формулу (18), т.е. условие (17), если оно выполнено, означает и существование статически допустимого поля напряжений.

Можно отметить, что простое условие (17) аналогично всей системе пяти уравнений плоской задачи теории пластичности (т.е. его выполнение означает выполнение всех и кинематических, и статических условий задачи при постоянных компонентах v_α и v_β).

Например, для полярных координат

$$\partial H_1/\partial\beta = 0, \quad \partial H_2/\partial\alpha = 1, \quad \gamma = 0$$

$$v_\alpha = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = -k, \quad \sigma_\alpha = \sigma_\beta = C_1 + 2k\beta$$

Для логарифмических спиралей

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta} = \frac{\partial H_2}{\partial\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha\beta}}, \quad \gamma = 1$$

существует точное решение

$$\tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \sigma_\alpha = C_1 + 2k - k\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \sigma_\beta = C_1 - k\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Метрические характеристики системы координат в ряде случаев определяют без сложных расчетов возможности применения координатных линий в приложениях.

Если мы хотим определить какие линии могут являться линиями скольжения, то подставив в уравнения равновесия $\tau_{\alpha\beta} = k$, $\sigma_\alpha - \sigma_\beta = 0$ и заменив в первом уравнении (1) $(1/H_1)\partial H_2/\partial\alpha$ на $\partial\Phi/\partial\beta$, а во втором $(1/H_2)\partial H_1/\partial\beta$ – на $\partial\Phi/\partial\alpha$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sigma_\alpha - 2k\Phi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\beta}(\sigma_\beta + 2k\Phi) = 0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_\alpha = \varphi_2(\beta) + 2k\Phi, \quad \sigma_\beta = \varphi_1(\alpha) - 2k\Phi \\ &\varphi_1(\alpha) - \varphi_2(\beta) = 4k\Phi \end{aligned} \tag{20}$$

где $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\beta)$ – дифференцируемые функции α и β.

Условие (20) означает, что данное семейство кривых может быть линиями скольжения только тогда, когда метрическая функция может быть представлена, как алгебраическая сумма функций переменных α и β. В этом случае эта функция удовлетворяет уравнению $\partial^2\Phi/(\partial\alpha\partial\beta) = 0$.

Из рассмотренных выше одиннадцати координатных систем этому условию удовлетворяют только системы *1–3* и *7*, следовательно, линиями скольжения могут быть прямые линии, окружности, логарифмические спирали и циклоиды. Действительно, известны решения [1, 2, 5] с линиями скольжения в форме указанных кривых. В отношении других семи систем можно сделать вывод о неприемлемости их координатных линий, как линий скольжения. (Отметим, что формулы (19) совпадают с известными соотношениями Генки [1, 2], если рассматривать Φ, как угол наклона линии α к оси x.)

В [4] указано на то, что система координат α, β может соответствовать линиям главных напряжений, (когда $\tau_{\alpha\beta} = 0$, $\sigma_\alpha - \sigma_\beta = \pm 2k$), если выполнено условие (18) при $\gamma = 1$, т.е. когда величина H_1H_2 является произведением функций α и β.

По аналогии укажем, что в плоских задачах стационарного распределения температуры линии α и β могут быть изотермами, (и перпендикулярными к ним линиями тока тепла) только в том случае, если величина H_1/H_2 является произведением функций α и β, см. [9].

В ряде задач вид функций H_1, H_2, Φ определяет возможность получения решений в данной системе криволинейных координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
2. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
3. *Кийко И.А.* Теория пластического течения (в приложении к процессам обработки металлов давлением) // Вопросы прочности и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 53–64.
4. *Бровман М.Я.* О линиях тока при плоской пластической деформации // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 185–187.
5. *Бровман М.Я.* Применение теории пластичности в прокатке. М.: Металлургия, 1991. 265 с.
6. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964. 664 с.
7. *Васильев В.В.* Напряженное состояние твердых тел и некоторые геометрические эффекты // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 30–34.
8. *Гастев В.А.* Курс теории упругости и основ теории пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973. 180 с.
9. *Бровман М.Я.* Метод расчета процессов теплопереноса с применением изотермических координат // ИФЖ. 1995. Т. 68. № 4. С. 651–659.

Тверь

Поступила в редакцию
14.03.2002