

УДК 539.214; 539.374

© 2004 г. А.И. АЛЕКСАНДРОВИЧ, П.А. КУВШИНОВ

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ОТРЕЗКА ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

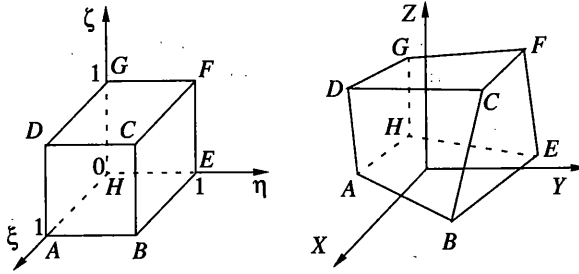
Строится решение трехмерной упругопластической задачи деформирования конечного отрезка толстостенной трубы с учетом больших деформаций. Процесс нагружения поверхности трубы разбивается на достаточно малые промежутки времени, и в каждый момент перехода к следующему промежутку времени вычисляются обобщенные силы, приведенные к узлам, находящимся в углах лагранжевых пространственных восьмиугольных элементов, на которые разбивается конечный отрезок трубы. Ребра элементов образуют в каждый момент времени замороженную лагранжеву координатную сетку. Координаты внутренних узлов в каждый переходный момент времени уточняются итерационным способом за счет их сдвига в направлении, противоположном действию обобщенных узловых сил, что обеспечивает минимизацию этих сил. На поверхности положение узлов уточняется исходя из минимизации невязки граничных условий, записываемых в обобщенном виде или с помощью вектора напряжений и соотношений между его компонентами в случае заданного закона трения. Кинематические условия реализуются с помощью фиксации координат узлов, а одно-сторонние связи с помощью сноса узлов на ограничивающую поверхность в случае их попадания в запрещенную область.

Реологическая модель материала трубы строится на основании модели transversально изотропно упрочняющегося тела с модификацией этой модели на случай больших деформаций. За основное берется пространство деформаций, и реологическая модель записывается в виде интегро-дифференциальных уравнений, решение которых методом Эйлера встраивается в алгоритм расчета изучаемого процесса нагружения конечного отрезка трубы. Выбор пространства деформаций в качестве основного диктуется применением численным методом.

Данный метод применялся для расчета процесса упругопластического деформирования тонких пластин в осесимметричной постановке [1,2] и показал хорошее совпадение результатов расчета с экспериментальными данными.

1. Внутриэлементная аппроксимация. Рассмотрим произвольный восьмиугольный пространственный элемент (фиг. 1) с вершинами $ABCDEFGH$, координаты которых будем считать известными, и построим трилинейное отображение единичного куба в координатах ξ, η, ζ на этот элемент

$$\begin{aligned}x &= P_x + P_{x1}\xi + P_{x2}\eta + P_{x3}\zeta + P_{x12}\xi\eta + P_{x23}\eta\zeta + P_{x13}\xi\zeta + P_{x123}\xi\eta\zeta \\y &= P_y + P_{y1}\xi + P_{y2}\eta + P_{y3}\zeta + P_{y12}\xi\eta + P_{y23}\eta\zeta + P_{y13}\xi\zeta + P_{y123}\xi\eta\zeta \\z &= P_z + P_{z1}\xi + P_{z2}\eta + P_{z3}\zeta + P_{z12}\xi\eta + P_{z23}\eta\zeta + P_{z13}\xi\zeta + P_{z123}\xi\eta\zeta\end{aligned}\quad (1.1)$$



Фиг. 1

Коэффициенты трилинейной аппроксимации (1.1) однозначно определяются по координатам вершин восьмиугольного элемента

$$P_x = H_x, \quad P_y = H_y, \quad P_z = H_z$$

$$P_{x1} = A_x - H_x, \quad P_{y1} = A_y - H_y, \quad P_{z1} = A_z - H_z$$

$$P_{x2} = E_x - H_x, \quad P_{y2} = E_y - H_y, \quad P_{z2} = E_z - H_z$$

$$P_{x3} = G_x - H_x, \quad P_{y3} = G_y - H_y, \quad P_{z3} = G_z - H_z$$

$$P_{x12} = B_x - A_x - E_x + H_x$$

$$P_{y12} = B_y - A_y - E_y + H_y$$

$$P_{z12} = B_z - A_z - E_z + H_z$$

$$P_{x23} = F_x - E_x - G_x + H_x, \quad P_{x13} = D_x - A_x - G_x + H_x$$

$$P_{y23} = F_y - E_y - G_y + H_y, \quad P_{y13} = D_y - A_y - G_y + H_y$$

$$P_{z23} = F_z - E_z - G_z + H_z, \quad P_{z13} = D_z - A_z - G_z + H_z$$

$$P_{x123} = C_x + A_x - B_x - D_x + E_x - F_x + G_x - H_x$$

$$P_{y123} = C_y + A_y - B_y - D_y + E_y - F_y + G_y - H_y$$

$$P_{z123} = C_z + A_z - B_z - D_z + E_z - F_z + G_z - H_z$$

Построенная трилинейная аппроксимация обеспечивает непрерывность поля смещений при переходе через границу соседних элементов. Координаты ξ , η , ζ можно рассматривать как локальные координаты в каждом элементе.

Распределение деформаций, напряжений и других физических величин внутри восьмиугольного пространственного элемента будем также искать по их угловым значениям в виде трилинейной аппроксимации. Общий вид любой из этих аппроксимаций содержит восемь коэффициентов

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \Phi_0 + \Phi_1\xi + \Phi_2\eta + \Phi_3\zeta + \Phi_{12}\xi\eta + \Phi_{23}\eta\zeta + \Phi_{13}\xi\zeta + \Phi_{123}\xi\eta\zeta \quad (1.2)$$

Эти коэффициенты, как и для зависимости (1.1), определяются по угловым значениям скалярных компонент соответствующих векторных или тензорных полей

$$\Phi_0 = \Phi(H), \quad \Phi_1 = \Phi(A) - \Phi(H), \quad \Phi_2 = \Phi(E) - \Phi(H), \quad \Phi_3 = \Phi(G) - \Phi(H)$$

$$\Phi_{12} = \Phi(B) - \Phi(A) - \Phi(E) + \Phi(H)$$

$$\Phi_{23} = \Phi(F) - \Phi(E) - \Phi(G) + \Phi(H)$$

$$\Phi_{13} = \Phi(D) - \Phi(A) - \Phi(G) + \Phi(H)$$

$$\Phi_{123} = \Phi(C) + \Phi(A) - \Phi(B) - \Phi(D) + \Phi(E) - \Phi(F) + \Phi(G) - \Phi(H)$$

Поскольку в определение многих физических объектов входят производные по физическим координатам x, y, z , а поля задаются внутри элемента в виде функции локальных координат ξ, η, ζ , опишем процедуру вычисления производных по физическим координатам x, y, z компонент физических полей, на примере функции $\Phi = \Phi(\xi, \eta, \zeta)$. Эта процедура будет применяться, например, для вычисления угловых значений виртуальных деформаций, соответствующих единичному смещению какого-либо узла рассматриваемого элемента. По правилу дифференцирования сложных функций будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Производные $\partial \Phi / \partial \xi, \partial \Phi / \partial \eta, \partial \Phi / \partial \zeta$ находятся по аппроксимации (1.2), а производные локальных координат ξ, η, ζ по физическим координатам x, y, z определяются с помощью производных физических координат по локальным координатам. Производные x, y, z по локальным координатам определяются по формуле (1.1), а связь этих производных с производными, входящими в формулы (1.3), устанавливается следующим стандартным способом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} / \det, & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{vmatrix} / \det, & \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{vmatrix} / \det \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{vmatrix} / \det, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} / \det, & \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{vmatrix} / \det \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} / \det, & \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{vmatrix} / \det, & \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} / \det \\ \det &= \begin{vmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \zeta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta & \partial y / \partial \zeta \\ \partial z / \partial \xi & \partial z / \partial \eta & \partial z / \partial \zeta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2. Вычисление деформаций. Алгоритм вычисления деформаций в углах восьмиугольного пространственного элемента проиллюстрируем на примере вычисления этих деформаций в окрестности вершины A (фиг. 1). Ребра элемента, прилегающие к данной вершине, образуют координатные линии замороженной лагранжевой системы координат. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ изменяется вдоль ребер элемента, в силу трилинейности аппроксимации (1.1), линейно, поэтому производную $d\mathbf{r}/d\xi_i$ ($\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$, $\xi_3 = \zeta$) можно заменить на отношения приращений $\Delta\mathbf{r}/\Delta\xi_i$, при $\Delta\xi_i = 1$. Поэтому компоненты векторов локального базиса выражаются через координаты прилегающих к углу вершин (фиг. 1) следующим образом:

$$\mathbf{e}_1(A, t) = [x(B, t) - x(A, t)]\mathbf{i} + [y(B, t) - y(A, t)]\mathbf{j} + [z(B, t) - z(A, t)]\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_2(A, t) = [x(H, t) - x(A, t)]\mathbf{i} + [y(H, t) - y(A, t)]\mathbf{j} + [z(H, t) - z(A, t)]\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_3(A, t) = [x(D, t) - x(A, t)]\mathbf{i} + [y(D, t) - y(A, t)]\mathbf{j} + [z(D, t) - z(A, t)]\mathbf{k}$$

По аналогичным формулам вычисляются векторы локального базиса $\mathbf{e}_1(A, t)$, $\mathbf{e}_2(A, t)$, $\mathbf{e}_3(A, t)$ в начальный момент времени t_0 .

Ковариантные компоненты метрического тензора $g_{ij}(A, t)$ являются скалярными произведениями векторов локального базиса. Контравариантные компоненты метрического тензора $g^{ij}(A, t)$ находятся с помощью вычисления обратной матрицы для матрицы, составленной из ковариантных компонент метрического тензора $g_{ij}(A, t)$.

Так как в материале отрезка трубы в момент потери его несущей способности возникают конечные деформации и конечные повороты частиц материала, то необходимо использование индеферентной меры деформаций. Эта особенность задачи является причиной использования меры Фингера для характеристики деформированного состояния в металле конечного отрезка трубы.

Индеферентная мера деформации Фингера в угле A пространственного восьмиугольника вычисляется следующим образом

$$\hat{F}(A, t) = g^{ij}(A, t_0)\mathbf{e}_i(A, t)\mathbf{e}_j(A, t)$$

Наряду с мерой Фингера используется тензор деформаций

$$\hat{E}(A, t) = (\hat{F}(A, t) - \hat{G}(A, t))/2 = \varepsilon^{ij}(A, t)\mathbf{e}_i(A, t)\mathbf{e}_j(A, t) = \varepsilon_{ij}(A, t)\mathbf{e}^i(A, t)\mathbf{e}^j(A, t)$$

контравариантные компоненты которого вычисляются по формуле $\varepsilon^{ij}(A, t) = (g^{ij}(A, t_0) - g^{ij}(A, t))/2$.

Компоненты деватора тензора деформаций, которые входят в соотношения теории пластичности, вычисляются по формуле $e^{ij}(A, t) = \varepsilon^{ij}(A, t) - (g_{kn}(A, t)\varepsilon^{kn}(A, t)g^{ij}(A, t))/3$.

Для оценки процесса деформирования частиц металла в случае малых упругопластических деформаций применяется изображение этого процесса в виде пятимерной траектории в пространстве деватора деформации. По предложению А.А. Ильюшина пятимерный вектор деформаций строится по компонентам деватора деформаций в ортонормированном базисе.

В случае больших деформаций предлагается ввести ортонормированный репер, сопровождающий замороженную лагранжеву систему координат следующим образом:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3|}, \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$$

Тогда после пересчета компонент деватора $e^{ij}(A, t)$ в этом базисе можно использовать формулы А.А. Ильюшина для построения траектории деформаций и в случае больших деформаций.

Для изображения процесса упругопластического деформирования частиц металла изучаемой трубы аналогичным способом строится пятимерный вектор, соответствующий девиатору тензора истинных напряжений Коши.

3. Реологическая модель упругопластической среды. Напряженное состояние, возникающее в материале трубы в процессе ее нагружения, описывается тензором истинных напряжений Коши.

Постулируется, что компоненты тензора истинных напряжений $\hat{\Sigma}(t) = \sigma^{ij}(t)e_i(t)e_j(t) = \sigma_{ij}(t)e^i(t)e^j(t)$ определяются через компоненты введенного тензора деформации и тензора пластической деформации следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma^{ij}(t) &= K \frac{\sqrt{g(t)} - \sqrt{g(t_0)}}{\min(\sqrt{g(t)}, \sqrt{g(t_0)})} g^{ij}(t) + \frac{2\Phi 3(E_p, E_u)}{3E_u} (e^{ij}(t) - e_p^{ij}(t)) \\ g(t) &= \det(g_{ij}(t)) \\ E_u(t) &= \sqrt{2g_{in}(t)g_{jk}(t)(e^{ij}(t) - e_p^{ij}(t))(e^{nk}(t) - e_p^{nk}(t))}/3} \\ E_p(t) &= \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} g_{in}(t)g_{jk}(t) \frac{de_p^{ij}}{dt} \frac{de_p^{nk}}{dt} dt\end{aligned}\tag{3.1}$$

Первое слагаемое формулы (3.1), в которое входит модуль объемной упругости K , определяет сферическую часть тензора напряжений, а второе слагаемое определяет девиатор этого тензора. Функция $\Phi 3(E_p, E_u)$ определяет зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, которые отсчитываются от пластических деформаций, достигнутых к данному моменту нагружения. Эта экспериментально устанавливаемая функция может быть построена по результатам экспериментов с одноосным растяжением образцов, так как в этих процессах накопленная пластическая деформация совпадает с интенсивностью пластической деформации. В пакете программ, составленном по данной методике, предполагается, что зависимость интенсивности напряжений к интенсивности деформаций в одноосном процессе растяжения определяется трехзвенной ломаной, первый участок которой определяется упругим модулем сдвига.

Для формирования кинетических уравнений, определяющих приращение компонент тензора пластических деформаций, будем предполагать, что для каждых достигнутых пластических деформаций имеется область в пространстве деформаций, определяемая неравенством $E_u(e^{ij}, e_p^{ij}(t)) < \Phi 1(E_p(t))$, в которой приращение компонент тензора пластических деформаций равно нулю. В другой части пространства приращение пластических деформаций определяется зависимостью

$$de_p^{ij} = \frac{e^{ij}(t) - e_p^{ij}(t)}{E_u} \Phi 2(E_p + \Phi 1(E_p)) V_u dt$$

$$V_u(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} g_{in}(t)g_{jk}(t) \frac{de^{ij}}{dt} \frac{de^{nk}}{dt}$$

Сформулированное кинетическое соотношение преобразуется в систему интегродифференциальных уравнений, относительно составляющих тензора пластических деформаций, при задании процесса изменения метрического тензора лагранжевой системы координат или при задании процесса изменения деформаций, учитывая что

метрический тензор в начальный момент времени определяется по лагранжевой сетке методом, описанным в п. 2, и не изменяется в процессе нагружения трубы.

Функция $\Phi 1(E_p)$ для малых деформаций определяет радиус сферической поверхности в пятимерном пространстве девiatorа деформаций. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в процессе одноосного растяжения образцов задается следующей функцией $\Phi(E_u)$, которая определяет кривую упрочнения, аппроксимированную трехзвенной ломаной $E_u = \Phi(E_u)$.

Функция $\Phi 1(E_p)$ определяется из алгебраического уравнения

$$(3G)\Phi 1 = \Phi(E_p + \Phi 1), \quad G = \frac{1}{3} \frac{d\Phi}{dE_u} \Big|_{E_u=0}$$

где G – упругий модуль сдвига.

Значение функции $\Phi 2$ определяет отношение приращения интенсивности пластических деформаций к приращению интенсивности деформации и может быть найдено по базовой функции $\Phi(E_u)$, если отсутствуют специальные эксперименты.

Для проверки предложенной упругопластической модели металла трубы задавался процесс деформации $\epsilon^{ij}(t)$ при условии $g_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ – символ Кронекера. Для простых процессов и, в частности, для процесса одноосного растяжения зависимость интенсивности напряжения от интенсивности деформаций совпадают с базовой функцией $\Phi(E_u)$ и тензоры напряжений и деформации соосны. Для сложных процессов деформаций компоненты тензоров были пересчитаны в ортонормированный базис I_r , описанный в п. 2, и связанный с лагранжевой системой координат e_r . На фиг. 2 показан процесс деформации и зависимость модуля девiatorа напряжений от длины траектории деформаций для следующего процесса:

$$\epsilon^{11}(t) = \begin{cases} \alpha t & (t < t_1) \\ \alpha t_1 + \beta(t - t_1) & (t \geq t_1) \end{cases}, \quad \epsilon^{12}(t) = \begin{cases} \gamma t & (t < t_1) \\ \epsilon^{12} = \gamma t_1 + \delta(t - t_1) & (t \geq t_1) \end{cases}$$

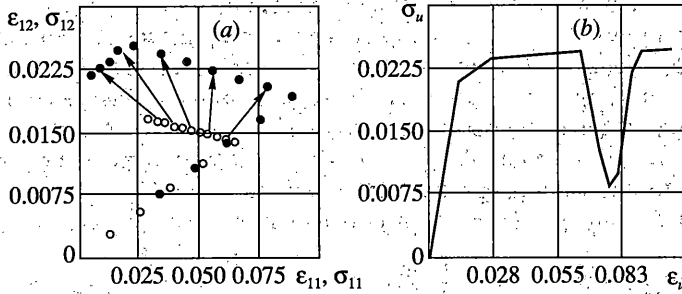
$$\epsilon^{22}(t) = \epsilon^{33}(t) = -\nu \epsilon^{11}(t), \quad \epsilon^{23}(t) = \epsilon^{13}(t) = 0, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Для численного расчета, показанного на фиг. 2, использованы следующие значения параметров: $t_1 = 1$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.0135$, $\gamma = 0.01$, $\delta = 0.001$, $K = 250000$ (светлые точки соответствуют деформациям, а темные – напряжениям). Координаты первого излома функции $\Phi(E_u)$ имеют значения $\epsilon_0 = 0.0075$, $\sigma_0 = 250$. Координаты второго излома имеют значения $\epsilon_1 = 0.025$, $\sigma_1 = 300$. На третьем участке упрочнения коэффициент пропорциональности приращения напряжений к приращениям деформаций имеет значение $U_{pr} = 400$.

Упругий модуль сдвига определяется через введенные параметры по формуле $G = \sigma_0 / (3\epsilon_0)$.

Уменьшение модуля девiatorа напряжений на некотором участке процесса деформирования объясняется тем, что заданная траектория деформации проходит внутри поверхности текучести. Необходимо также отметить, что сформулированная модель металла в случае малых деформаций ничем не отличается от трансверсально-изотропно упрочняющейся упругопластической среды со сферической поверхностью текучести в пятимерном пространстве девiatorа деформаций. Необычная запись этой модели среды объясняется применяемым численным методом решения рассматриваемой технической задачи.



Фиг. 2

4. Вычисление обобщенных сил в углах элемента. Вычисление обобщенных сил в углах восьмиугольного пространственного элемента опишем на примере угла А (фиг. 1). Проекция обобщенной силы $Q^x(A, t)$ вычисляется с помощью формулы

$$Q^x(A, t) = \int \int \int_{V(\xi, \eta, \zeta)} \sigma^{ij}(\xi, \eta, \zeta) \delta \epsilon_{ij}^x(\xi, \eta, \zeta) J(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

где интегрирование проводится аналитическим способом по стандартному кубу $V(\xi, \eta, \zeta)$. Подынтегральное выражение определяется сверткой тензора напряжений $\sigma^{ij}(\xi, \eta, \zeta)$ с тензором виртуальных деформаций $\delta \epsilon_{ij}^x(\xi, \eta, \zeta)$. Компоненты этих тензоров представляют собой трилинейные функции локальных координат ξ, η, ζ . Якобиан $J(\xi, \eta, \zeta)$ определяется с помощью формул п. 1. Он входит в знаменатель свертки $\sigma^{ij}(\xi, \eta, \zeta) \delta \epsilon_{ij}^x(\xi, \eta, \zeta)$ и поэтому его наличие в подынтегральном выражении не осложняет вычисление интеграла. Компоненты тензора виртуальных деформаций $\delta \epsilon_{ij}^x(\xi, \eta, \zeta)$ определяются по формулам Коши $\delta \epsilon_{ij}^x = (\nabla_j \delta u_i + \nabla_i \delta u_j)/2$.

Так как свертка $\sigma^{ij}(\xi, \eta, \zeta) \delta \epsilon_{ij}^x(\xi, \eta, \zeta)$ является инвариантом и имеет одинаковые значения в любой системе координат, то при ее вычислении использовалась Эйлерова декартова ортогональная система координат x, y, z .

Виртуальные деформации $\delta \epsilon_{ij}^x(\xi, \eta, \zeta)$ определяются по полю смещений, аппроксимированному внутри элемента с помощью трилинейной аппроксимации с нулевыми узловыми значениями во всех углах, кроме угла А. В этом угле виртуальные смещения δu_i задавались компонентами $\delta u_x = 1, \delta u_y = 0, \delta u_z = 0$.

Аналогичным образом вычисляются компоненты обобщенной силы $Q^y(A, t), Q^z(A, t)$, приравняв единице компоненту виртуального смещения, соответственно, вдоль оси y и вдоль оси z . Точно так же вычисляются обобщенные силы в остальных углах восьмиугольного пространственного элемента.

5. Итерационная процедура решения задач. В начале процесса расчета в исходном теле (конечном отрезке толстостенной трубы) задается система пространственных восьмиугольных элементов, вершины (узлы) которых лежат на координатных линиях цилиндрической системы координат. Каждому элементу присваивается порядковый номер. Для идентификации узлов применяется одномерная глобальная нумерация, и декартовы координаты узлов записываются в виде трех массивов. Вычисляет-

ся матрица инцидентности, связывающая глобальный номер узла, номер элемента и номер угла элемента.

Процесс нагружения тела разбивается на мелкие по времени шаги Δt . В соответствии с заданным процессом нагружения, на каждом шаге Δt задается либо смещение узла, лежащего на части поверхности с кинематическими условиями, либо, если он находится на части поверхности, где заданы силовые условия, вычисляется обобщенная сила, соответствующая заданному вектору напряжений на поверхности. Аналогичным образом можно реализовывать и более сложные граничные условия, например контактного типа, задавая в соответствующем поверхностном узле соотношение между нормальной и касательной составляющими вектора напряжений. В случае односторонних связей, например, условия непроникания частиц металла в инструмент, осуществляющий воздействие на тело, предусматривается процедура сноса узла на поверхность инструмента, если он оказывается внутри инструмента.

В начале каждого шага по времени Δt , в связи с описанной процедурой задания обобщенных сил или смещений на границе, в граничных узлах, и, как следствие, во внутренних узлах возникает невязка вычисляемых и задаваемых обобщенных сил. Эта невязка зависит от координат узла, в котором она вычислена, и координат соседних узлов. Для минимизации этой невязки предлагается итерационная процедура, состоящая в том, что на каждой итерации производится смещение узла в направлении, противоположном вычисляемой невязке, а на границе со сложными граничными условиями – в направлении, минимизирующем невязку, вычисленную с помощью компонент вектора напряжений. Для определения коэффициентов пропорциональности итерационных сдвигов и невязок используется численный эксперимент. Практика расчетов для конечного отрезка толстостенной металлической трубы показала, что уже при десяти итерациях получаются удовлетворительные результаты. Шаг по времени Δt также выбирается в соответствии со сложностью процесса нагружения и требуемой точности расчета.

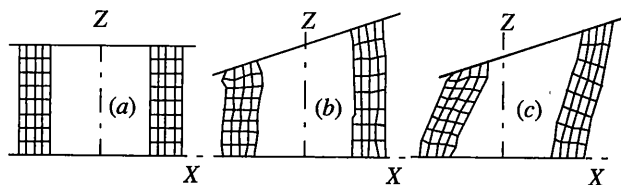
Для ускорения процесса расчета на каждом шаге Δt перед итерационной процедурой применяется начальное смещение узлов. Удачный выбор этого начального приближения также значительно увеличивает скорость расчета.

6. Пример расчета. По данному методу создан пакет программ расчета процесса нагружения конечного отрезка толстостенной трубы. Для иллюстрации возможностей пакета приведем пример расчета упругопластического процесса нагружения трубы, внутренняя и внешняя поверхность которой предполагалась свободной от нагрузки. Торцы трубы предполагались приваренными к жестким плитам, нижняя из которых остается неподвижной. Верхняя плита в начале процесса поворачивается на угол $\varphi = \pi/100$ вокруг точки, являющейся центром верхнего торца (фиг. 3, а, б), а затем перемещается вдоль оси X на величину равную начальной толщине стенки трубы (фиг. 3, б, в).

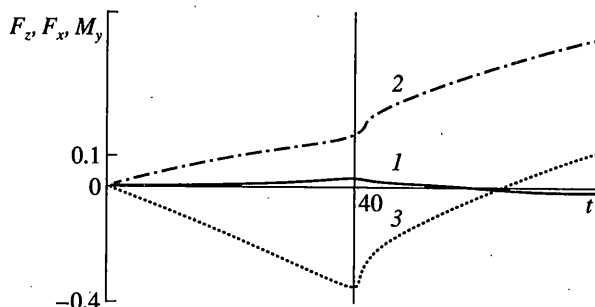
Геометрические размеры принимались в условных единицах e следующими. Высота трубы $H = 2e$, внутренний диаметр $D = 1.8e$, толщина стенки $\delta = 0.6e$. Труба разбивалась на восьмиугольные пространственные элементы (по высоте – на восемь элементов, по радиусу – на четыре элемента, по углу на десять элементов). На фиг. 3, а показано сечение трубы в исходном состоянии при $Y = 0$.

Материал трубы предполагался подчиняющимся реологическим соотношениям п. 3 со следующими значениями констант в условных единицах напряжений p . Универсальная функция $\Phi(E_u)$ полагалась трехзвенной ломаной, точки излома которой имеют следующие значения.

Координаты первого излома функции имеют значения $e_0 = 0.25$, $\sigma_0 = 250$. Координаты второго излома имеют значения $e_1 = 0.75$, $\sigma_1 = 300$. На третьем участке упрочнения коэффициент пропорциональности приращения напряжений к приращениям



Фиг. 3



Фиг. 4

деформаций имеет значение $U_{gr} = 3000p$. Коэффициент Пуассона выбирался равным $\nu = 0.3$.

Каждый этап процесса нагружения конечного отрезка толстостенной трубы разбивался на 40 шагов. На каждом шаге вычислялись главный вектор F и главный момент M возникающих на верхнем торце сил. На каждом этапе главный момент вычислялся относительно текущего центра верхнего торца. На фиг. 4 графически изображены результаты расчета этих величин.

Кривая 1 отображает проекцию силы F отнесенной к модулю Юнга, действующей на верхний торец трубы, на ось Z , а кривая 2 — на ось X . Кривая 3 соответствует проекции момента сил M , отнесенных к модулю Юнга, относительно центра верхнего торца, на ось Y . Модуль Юнга вычисляется по первому участку трехзвенной ломаной $\Phi(E_{II})$.

По оси абсцисс откладывается номер шага, а по оси ординат величины указанных сил в условных единицах e^2 и момент в условных единицах e^3 .

Часть частиц конечного отрезка толстостенной трубы в рассматриваемом процессе нагружения испытывают промежуточную упругопластическую разгрузку, которая автоматически отслеживается предлагаемым пакетом программ. В случае добавления третьего этапа нагружения, соответствующего освобождению торцов от жестких плит пакет программ вычисляет распределение остаточных напряжений в материале толстостенной трубы. Модульный характер предлагаемого пакета программ позволяет достаточно легко изменять как начальную конфигурацию упругопластического тела, так и реологические соотношения для материала рассматриваемого тела. Не представляет большого труда расчет конечного отрезка толстостенной трубы при наличии как внешнего, так и внутреннего давления.

7. Вывод. Предлагаемый метод локальных функционалов позволяет решать пространственные упругопластические задачи квазистатических процессов нагружения

в широком диапазоне конфигураций тел, их физико-механических свойств и граничных условий при больших деформациях. Однако следует отметить, что указанные возможности решения сложных задач сопровождаются снижением скорости расчета и, поэтому, данный метод рекомендуется применять для тех задач, которые не решаются другими методами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00473).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александрович А.И., Корноухов А.К., Попиелас Ф. Математическое моделирование процесса осесимметричной штамповки кольцевой пластины с тонким резиноподобным покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 4. С. 61–68.
2. Alexandrovich A.I., Kornouchov A.K., Popielas F., Weis A. Lösung axialsymmetrischer elastisch-plastischer aufgaben bei der deformation dünner bleche mit hilfe der methode der lokalen funktionale. Moskau: Rechen Zentrum ADW, 1999. 39 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.03.2002