

УДК 531.55:521.1

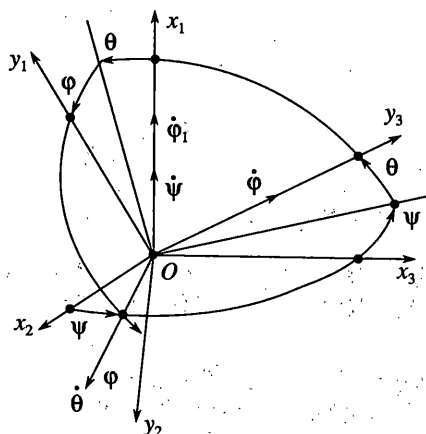
© 2004 г. М.К. НАБИУЛЛИН

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ОРБИТАЛЬНОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача стабилизации положений равновесия космической орбитальной тросовой системы (ОТС). ОТС состоит из тела-носителя с маховиками и присоединенного к нему на длинном весомере тросе зонда-спутника. Зонд-спутник считается материальной точкой, трос – гибкой нитью, не испытывающей сопротивления на изгиб и кручение. Предполагается, что центр масс тела-носителя с маховиками совершает движение по известной кеплеровской круговой орбите в ньютоновском центральном поле сил. Найдены частные решения нелинейных дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными производными, соответствующие положениям равновесия ОТС в орбитальной системе осей координат. Главные центральные оси ОТС коллинеарны осям орбитальной системы осей координат. Трос с зондом расположен вдоль радиуса орбиты и направлен в сторону притягивающего центра. Трос с зондом расположен вдоль радиуса орбиты и направлен в сторону противоположную от притягивающего центра. Трос с зондом направлен по касательной к орбите. Методом функционалов Ляпунова получены достаточные условия устойчивости положений равновесия ОТС и проведен их анализ.

Вопросы нелинейной динамики, устойчивости, либрационных колебаний и управления различных типов орбитальных тросовых систем на круговой и эллиптической орбитах под воздействием аэродинамических, магнитных сил, а также сил тяги, приложенных к телу-носителю, изучались многими авторами [1–8]. В [9–11] исследовалась устойчивость положения равновесия ОТС. Результаты сопоставлены с известными.

1. Уравнения движения. Введем следующие системы осей координат (фиг. 1): $O_a X_a Y_a Z_a$ – неподвижная система осей координат с началом в центре притяжения O_a ; $Ox_1 x_2 x_3$ – орбитальная система осей координат с началом в центре масс O спутника с маховиками (спутника-гиростата); ось x_2 направлена вдоль радиуса орбиты; ось x_1 – по нормали к плоскости орбиты; ось x_3 – ортогональна к осям x_1 и x_2 и направлена в сторону движения центра масс O ; $Oy_1 y_2 y_3$ – система осей координат, неизменно связанная с корпусом несущего тела (оси y_1, y_2, y_3 являются главными центральными осями эллипсоида инерции, построенного для центра масс системы абсолютно твердых тел); $O_k x_k y_k z_k$ – системы осей координат, жестко связанные с маховиками, оси x_k, y_k, z_k ($k = 1, 2, \dots, N$) которых являются главными центральными осями эллипсоидов, построенных для их неподвижных центров O_k . Единичные векторы осей системы $Ox_1 x_2 x_3$ обозначим через e_s^0 , а осей $Oy_1 y_2 y_3$ – e_s ($s = 1, 2, 3$). Их взаимное положение



Фиг. 1

определим направляющими косинусами $\alpha_{is} = \alpha_{si}(s, i = 1, 2, 3)$, зависящими известным образом от самолетных углов Крылова-Эйлера ψ, θ, φ [12]:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \cos\theta \cos\varphi, & \alpha_{12} &= -\cos\theta \sin\varphi, & \alpha_{13} &= \sin\theta \\
 \alpha_{21} &= \cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \sin\theta \cos\varphi \\
 \alpha_{22} &= -\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\theta \sin\varphi \\
 \alpha_{23} &= -\sin\psi \cos\theta, & \alpha_{33} &= \cos\psi \cos\theta \\
 \alpha_{31} &= \sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \sin\theta \cos\varphi \\
 \alpha_{32} &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\theta \sin\varphi
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

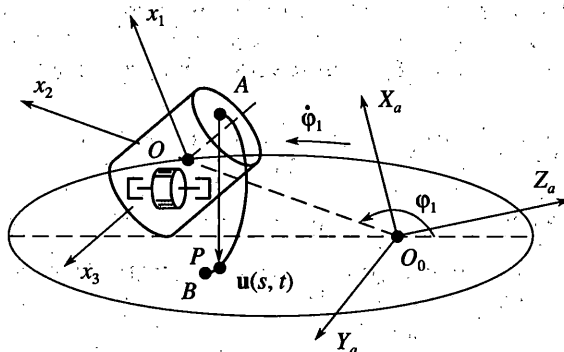
Углы ψ, θ, φ называются углами рысканья, тангажа, крена.

Ориентацию оси динамической симметрии z_k k -го маховика в системе осей координат $Oy_1y_2y_3$ зададим направляющими косинусами $\beta_{13}^k, \beta_{23}^k, \beta_{33}^k$. Угол собственного вращения маховика вокруг оси z_k обозначим через γ_k ($k = 1, 2, \dots, N$).

Обозначим через $A(a_1^0, a_2^0, a_3^0)$ точку крепления к корпусу тяжелого весомого троса плотности ρ и длины l . Положение произвольной точки P троса и зонда B массы m_β в системе осей координат $Oy_1y_2y_3$ определим векторами (фиг. 2):

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \sum_{j=1}^3 r_j \mathbf{e}_j, \quad r_j = a_j^0 + u_j(s, t) \tag{1.2}$$

$$\mathbf{r}_\beta = \mathbf{OB} = \sum_{j=1}^3 r_{j\beta} \mathbf{e}_j, \quad r_{j\beta} = a_j^0 + u_{j\beta}(l, t) \quad (j = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$



Фиг. 2

Компоненты тензора инерции ОТС, построенного для точки O , вычисляются по формулам

$$A_{ii} = A_i + \int_0^l \rho \left(\sum_{j=1}^3 r_j^2 - r_i^2 \right) ds + m_\beta \left(\sum_{j=1}^3 r_{j\beta}^2 - r_{i\beta}^2 \right) \quad (1.4)$$

$$A_{ij} = - \int_0^l \rho r_i r_j ds - m_\beta r_{i\beta} r_{j\beta} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) \quad (1.5)$$

где моменты инерции спутника-гиростата A_i ($i = 1, 2, 3$) определяются равенствами

$$A_i = A_i^0 + \sum_{k=1}^N [A_k + (C_k - A_k) \beta_{i3}^{(k)^2}] \quad (1.6)$$

Здесь A_i^0 – компоненты тензора инерции, построенного для центра масс спутника-гиростата с присоединенными к корпусу массами, равными массам маховиков и сосредоточенными в их центрах масс O_k ($k = 1, 2, \dots, N$); C_k, A_k – осевой и экваториальный моменты инерции k -го маховика.

Дифференциальные уравнения движения тросовой системы выводятся на основе обобщенного принципа Гамильтона–Остроградского с учетом нерастяжимости троса

$$W = r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 - 1 = 0 \quad ({}' = \partial/\partial s) \quad (1.7)$$

Составим кинетический потенциал системы. С точностью до постоянных слагаемых $\mu M/R_0 + \omega_0^2 MR_0$ будем иметь

$$L_a = L + L_{\alpha\beta}, \quad L = T + U \quad (1.8)$$

Здесь кинетическая энергия T вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A_i \Omega_i^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}})^2 ds + \frac{1}{2} m_\beta (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_\beta + \dot{\mathbf{r}}_\beta)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N C_k \dot{\gamma}_k^2 + \sum_{i=1}^3 k_i \Omega_i \quad (1.9)$$

где A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции спутника-гиростата для центра O ; Ω – вектор абсолютной угловой скорости корпуса ОТС, у которого проекции на оси y_1, y_2, y_3 равны $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. Вектор Ω можно записать в следующем виде:

$$\Omega = \omega + e_1^0 \omega_0, \quad \omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i e_i, \quad e_i^0 = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} e_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.10)$$

$$\omega_1 = \psi \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_2 = -\psi \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \psi \sin \theta + \dot{\varphi} \quad (1.11)$$

где ω – вектор угловой скорости корпуса относительно орбитальной системы осей координат $Ox_1x_2x_3$. Величины

$$k_i = \sum_{k=1}^N C_k \dot{\gamma}_k \beta_{i3}^k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.12)$$

есть проекции суммы относительных кинетических моментов маховиков на оси y_1, y_2, y_3 . Сила функция гравитационных сил записывается в виде

$$U = \frac{1}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 A_{ii} - \frac{3}{2} \omega_0^2 \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \alpha_{2i} \alpha_{2j} \quad (1.13)$$

Слагаемое $L_{\alpha\beta}$, входящее в кинетический потенциал (1.8), определяется выражением

$$L_{\alpha\beta} = \omega_0 R_0 e_3^0 \left[\int \rho (\omega \times r + \dot{r}) ds + m_\beta (\omega \times r_\beta + \dot{r}_\beta) \right] \quad (1.14)$$

и обусловлено наличием линейной скорости $\omega_0 R_0 e_3^0$ полюса O . Путем надлежащих выкладок можно показать, что линейная скорость $\omega_0 R_0$ центра масс спутника-гиростата не влияет на вращательное движение тросовой системы относительно полюса O . Уравнения движения записываются с кинетическим потенциалом L и имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k+3; k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.15)$$

$$q = \{\psi, \theta, \varphi, \gamma_k\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T^0 \frac{\partial r_i}{\partial s} \right) \quad (0 < s < l) \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{r}_{i\beta}} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial r_{i\beta}} = - \left(T^0 \frac{\partial r_i}{\partial s} \right)_{s=l} \quad (1.17)$$

где Λ – плотность лагранжиана $L = T + U$; $T^0(s, t)$ – натяжение троса.

Уравнения (1.15), соответствующие обобщенным координатам $q_1 = \psi, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$, могут быть преобразованы и записаны в квазискоростях $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

Вращательное движение ОТС относительно центра масс спутника-гиростата описывается уравнениями

$$\begin{aligned} & A_{11} \dot{\Omega}_1 + A_{12} \dot{\Omega}_2 + A_{13} \dot{\Omega}_3 + \dot{A}_{11} \Omega_1 + \dot{A}_{12} \Omega_2 + \dot{A}_{13} \Omega_3 + (A_{33} - A_{22}) \Omega_2 \Omega_3 - A_{12} \Omega_1 \Omega_3 + \\ & + A_{13} \Omega_1 \Omega_2 + A_{23} (\Omega_2^2 - \Omega_3^2) + \dot{v}^{(1)} + \Omega_2 v^{(3)} - \Omega_3 v^{(2)} = - (k_1 + k_3 \Omega_2 - k_2 \Omega_3) + \\ & + 3 \omega_0^2 [(A_{33} - A_{22}) \alpha_{22} \alpha_{23} - A_{12} \alpha_{21} \alpha_{23} + A_{13} \alpha_{21} \alpha_{22} + A_{23} (\alpha_{22}^2 - \alpha_{23}^2)] \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$A_{12}\dot{\Omega}_1 + A_{22}\dot{\Omega}_2 + A_{23}\dot{\Omega}_3 + \dot{A}_{12}\Omega_1 + \dot{A}_{22}\Omega_2 + \dot{A}_{23}\Omega_3 + (A_{11} - A_{33})\Omega_1\Omega_3 + A_{12}\Omega_2\Omega_3 + \\ + A_{13}(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) - A_{23}\Omega_1\Omega_2 + \dot{v}^{(2)} + \Omega_3 v^{(1)} - \Omega_1 v^{(3)} = -(k_2 + k_1\Omega_3 - k_3\Omega_1) + \quad (1.19) \\ + 3\omega_0^2[(A_{11} - A_{33})\alpha_{21}\alpha_{23} + A_{12}\alpha_{22}\alpha_{23} + A_{13}(\alpha_{23}^2 - \alpha_{21}^2) - A_{23}\alpha_{21}\alpha_{22}]$$

$$A_{13}\dot{\Omega}_1 + A_{23}\dot{\Omega}_2 + A_{33}\dot{\Omega}_3 + \dot{A}_{13}\Omega_1 + \dot{A}_{23}\Omega_2 + \dot{A}_{33}\Omega_3 + (A_{22} - A_{11})\Omega_1\Omega_2 + \\ + A_{12}(\Omega_1^2 - \Omega_2^2) + A_{13}\Omega_2\Omega_3 + A_{23}\Omega_1\Omega_3 + \dot{v}^{(3)} + \Omega_1 v^{(2)} - \Omega_2 v^{(1)} = \quad (1.20) \\ = -(k_3 + k_2\Omega_1 - k_1\Omega_2) + 3\omega_0^2[(A_{22} - A_{11})\alpha_{21}\alpha_{22} + A_{12}(\alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2) - A_{13}\alpha_{22}\alpha_{23} + A_{23}\alpha_{21}\alpha_{23}]$$

$$v^{(1)} = \int \rho(\dot{r}_3 r_2 - \dot{r}_2 r_3) ds + m_\beta(\dot{r}_{3\beta} r_{2\beta} - \dot{r}_{2\beta} r_{3\beta})$$

$$v^{(2)} = \int \rho(\dot{r}_1 r_3 - \dot{r}_3 r_1) ds + m_\beta(\dot{r}_{1\beta} r_{3\beta} - \dot{r}_{3\beta} r_{1\beta})$$

$$v^{(3)} = \int \rho(\dot{r}_2 r_1 - \dot{r}_1 r_2) ds + m_\beta(\dot{r}_{2\beta} r_{1\beta} - \dot{r}_{1\beta} r_{2\beta})$$

К этим уравнениям (1.18)–(1.20) нужно присоединить кинематические формулы Эйлера (1.10), (1.11), либо кинематические соотношения Пуассона

$$\dot{e}_i^{(0)} + (\Omega - \omega_0) \times e_i^{(0)} = 0, \quad \omega_0 = \omega_0 e_1^0 = \omega_0(\alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \alpha_{13} e_3) \quad (1.21)$$

Уравнения движения маховиков вокруг оси их динамической симметрии имеют вид

$$C_k \frac{d}{dt} \left(\dot{\gamma}_k + \sum_{s=1}^2 \Omega_s \beta_{s3}^k \right) = Q_k \quad (1.22)$$

где Q_k ($k = 1, \dots, N$) – моменты сил, приложенных к маховикам.

Движения троса и зонда описываются следующими уравнениями:

$$\rho[\ddot{r}_1 + 2(\Omega_2 \dot{r}_3 - \Omega_3 \dot{r}_2) + \dot{\Omega}_2 r_3 - \dot{\Omega}_3 r_2 - r_1(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + r_2 \Omega_1 \Omega_2 + r_3 \Omega_1 \Omega_3] = \\ = \frac{\partial}{\partial s} \left(T^0 \frac{\partial r_1}{\partial s} \right) - \rho \omega_0^2 r_1 + 3\omega_0^2 \rho \alpha_{21} \sum_{i=1}^3 r_i \alpha_{2i} \quad (0 < s < l) \quad (1.23)$$

$$m_\beta[\ddot{r}_{1\beta} + 2(\Omega_2 \dot{r}_{3\beta} - \Omega_3 \dot{r}_{2\beta}) + \dot{\Omega}_2 r_{3\beta} - \dot{\Omega}_3 r_{2\beta} - r_{1\beta}(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + r_{2\beta} \Omega_1 \Omega_2 + r_{3\beta} \Omega_1 \Omega_3] = \\ = -T^0 \frac{\partial r_1}{\partial s} \Big|_{s=l} - m_\beta \omega_0^2 r_{1\beta} + 3\omega_0^2 m_\beta \alpha_{21} \sum_{i=1}^3 r_{i\beta} \alpha_{2i} \quad (1.24)$$

$$\rho[\ddot{r}_2 + 2(\Omega_3 \dot{r}_1 - \Omega_1 \dot{r}_3) + \dot{\Omega}_3 r_1 - \dot{\Omega}_1 r_3 - r_2(\Omega_3^2 + \Omega_1^2) + r_3 \Omega_2 \Omega_3 + r_1 \Omega_2 \Omega_1] = \\ = \frac{\partial}{\partial s} \left(T^0 \frac{\partial r_2}{\partial s} \right) - \rho \omega_0^2 r_2 + 3\omega_0^2 \rho \alpha_{22} \sum_{i=1}^3 r_i \alpha_{2i} \quad (0 < s < l) \quad (1.25)$$

$$m_\beta[\ddot{r}_{2\beta} + 2(\Omega_3 \dot{r}_{1\beta} - \Omega_1 \dot{r}_{3\beta}) + \dot{\Omega}_3 r_{1\beta} - \dot{\Omega}_1 r_{3\beta} - r_{2\beta}(\Omega_3^2 + \Omega_1^2) + r_{3\beta} \Omega_2 \Omega_3 + r_{1\beta} \Omega_2 \Omega_1] = \\ = -T^0 \frac{\partial r_2}{\partial s} \Big|_{s=l} - m_\beta \omega_0^2 r_{2\beta} + 3\omega_0^2 m_\beta \alpha_{22} \sum_{i=1}^3 r_{i\beta} \alpha_{2i} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} & \rho[\ddot{r}_3 + 2(\Omega_1 \dot{r}_2 - \Omega_2 \dot{r}_1) + \dot{\Omega}_1 r_2 - \dot{\Omega}_2 r_1 - r_3(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + r_1 \Omega_3 \Omega_1 + r_2 \Omega_3 \Omega_2] = \\ & = \frac{\partial}{\partial s} \left(T^0 \frac{\partial r_3}{\partial s} \right) + \rho \omega_0^2 r_3 + 3 \omega_0^2 \rho \alpha_{23} \sum_{i=1}^3 r_i \alpha_{2i} \quad (0 < s < l) \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} & m_\beta[\ddot{r}_{3\beta} + 2(\Omega_1 \dot{r}_{2\beta} - \Omega_2 \dot{r}_{1\beta}) + \dot{\Omega}_1 r_{2\beta} - \dot{\Omega}_2 r_{1\beta} - r_{3\beta}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + r_{1\beta} \Omega_3 \Omega_1 + r_{2\beta} \Omega_3 \Omega_2] = \\ & = -T^0 \frac{\partial r_3}{\partial s} \Big|_{s=l} - m_\beta \omega_0^2 r_{3\beta} + 3 \omega_0^2 m_\beta \alpha_{23} \sum_{i=1}^3 r_{i\beta} \alpha_{2i} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Уравнения (1.23)–(1.28) необходимо рассматривать совместно с условием нерастяжимости троса (1.7) и кинематическими граничными условиями

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = u_3(0, t) = 0 \quad (1.29)$$

2. Стационарные движения. Предположим $k_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда из дифференциальных уравнений (1.18)–(1.28) при краевых условиях (1.29) получим три класса решений, когда главные центральные оси y_1, y_2, y_3 спутника-гиростата коллинеарны осям орбитальной системы осей координат x_1, x_2, x_3 .

Решение 1.

$$\begin{aligned} & \psi_0 = \theta_0 = \varphi_0 = 0, \quad \alpha_{11}^0 = \alpha_{22}^0 = \alpha_{33}^0 = 1, \quad \alpha_{ij}^0 = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) \\ & r_1^0 = r_3^0 = 0, \quad r_2^0 = a_2^0 + u_2^0 = \mp(a + s), \quad \Omega_2^0 = \Omega_3^0 = 0, \quad \Omega_1^0 = \omega_0 \\ & k_2 = k_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Натяжение троса определяется формулой

$$T^0 = \frac{3}{2} \omega_0^2 \rho [(a^0 + l)^2 - (a^0 + s)^2] + 3 \omega_0^2 m_\beta (a^0 + l) > 0 \quad (2.2)$$

Величина k_1 остается произвольной величиной.

Трос с зондом расположен вдоль радиуса орбиты и направлен в сторону притягивающего центра ($r_2^0 = -a - s$) и направлен от него ($r_2^0 = a + s$).

Решение 2.

$$\begin{aligned} & \psi_0 = \theta_0 = \varphi_0 = 0, \quad \alpha_{11}^0 = \alpha_{22}^0 = \alpha_{33}^0 = 1, \quad \alpha_{ij}^0 = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) \\ & r_1^0 = r_2^0 = 0, \quad r_3^0 = a_3^0 + u_3^0 = \pm(a^0 + s), \quad \Omega_2^0 = \Omega_3^0 = 0, \quad \Omega_1^0 = \omega_0 \\ & k_2 = k_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Проекция кинетического момента маховиков k_1 на нормаль к плоскости орбиты остается произвольной величиной. Натяжение троса равно нулю ($T^0 = 0$).

Решению соответствуют два положения равновесия, когда трос с зондом направлен по касательной к орбите вдоль вектора скорости центра масс системы O ($r_3^0 = a^0 + s$) и противоположно к нему ($r_3^0 = -a^0 - s$).

Решение 3.

$$\begin{aligned} & \psi_0 = \theta_0 = \varphi_0 = 0, \quad \alpha_{11}^0 = \alpha_{22}^0 = \alpha_{33}^0 = 1, \quad \alpha_{ij}^0 = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) \\ & k_2 = k_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Кинетический момент k_1 остается произвольной величиной.

Трос с зондом ортогонален к плоскости орбиты, однако натяжение троса в области $0 \leq s \leq l$:

$$T^0 = -\frac{1}{2}\omega_0^2\rho[(a+s)^2 - (a+l)^2] - \omega_0^2 m_\beta(a+l) < 0. \quad (2.5)$$

в этом случае получается отрицательным. Данное положение равновесия заведомо неустойчиво.

Краевая задача (1.15)–(1.17), (1.10)–(1.11) и (1.18)–(1.29) допускает обобщенный интеграл типа Якоби

$$H = T_r + \Pi = \text{const} \quad (2.6)$$

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A_i \omega_i^2 + \frac{1}{2} \int \rho v_i^2 ds + \frac{1}{2} m_\beta v_\beta^2 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}_\beta = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\beta + \dot{\mathbf{r}}_\beta = \sum_{i=1}^3 v_{i\beta} \mathbf{e}_i \quad (2.8)$$

$$\Pi = -\frac{1}{2}\omega_0^2 \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \alpha_{1i} \alpha_{1j} - \frac{1}{2}\omega_0^2 \sum_{i=1}^3 A_{ii} + \frac{3}{2}\omega_0^2 \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \alpha_{2i} \alpha_{2j} - \omega_0 \sum_{i=1}^3 k_i \alpha_{1i} \quad (2.9)$$

3. Достаточные условия устойчивости. Для исследования устойчивости положений равновесия (2.1), (2.2) построим модифицированный функционал Ляпунова–Четаева

$$V = H - H_0 + \frac{1}{2} \int T^0 \sum_{i=1}^3 r_i^2 ds + \frac{1}{8} \lambda \int \rho W^2 ds \quad (3.1)$$

где H_0 – значение интеграла H вдоль решений (2.1) и (2.2), W дается соотношением (1.7), λ – положительный множитель Лагранжа, имеющий размерность квадрата угловой скорости.

Очевидно, что $V(0) = 0$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что первая вариация (3.1) равна нулю в силу решения (2.1), (2.2). Следовательно, установление знакоопределенности и непрерывности функционала (3.1) сводится к исследованию его второй вариации $\delta^2 V$.

Сохраним прежние обозначения для отклонений переменных от их значений в невозмущенном движении (2.1), (2.2). Тогда будем иметь

$$V_2 = 2T_r + \Pi_2 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & a_{11}^0 \psi^2 + a_{22}^0 \theta^2 + a_{33}^0 \varphi^2 + 6\omega_0^2 \psi (\int \rho r_2^0 r_3 ds + m_\beta r_{2\beta}^0 r_{3\beta}) - \\ & - 8\omega_0^2 \varphi (\int \rho r_2^0 r_1 ds + m_\beta r_{2\beta}^0 r_{1\beta}) + \omega_0^2 \int \rho (r_1^2 - 3r_2^2) ds + \\ & + m_\beta \omega_0^2 (r_{1\beta}^2 - 3r_{2\beta}^2) + \sum_{i=1}^3 \int T^0 r_i^2 ds + \lambda \int \rho r_2^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(r_i = u_i, r_{i\beta} = u_{i\beta}; i = 1, 2, 3)$$

$$a_{11}^0 = 3\omega_0^2 (A_{33}^0 - A_{22}^0), \quad a_{22}^0 = \omega_0^2 (A_{11}^0 - A_{33}^0) + \omega_0 k_1 \quad (3.4)$$

$$a_{33}^0 = 4\omega_0^2 (A_{11}^0 - A_{22}^0) + \omega_0 k_1$$

$$A_{11}^0 = A_1 + I_0, \quad A_{22}^0 = A_2, \quad A_{33}^0 = A_3 + I_0 \quad (3.5)$$

$$I_0 = \int_0^l \rho r_2^0{}^2 ds + m_\beta r_{2\beta}^0{}^2 = \int_0^l \rho (a+s)^2 ds + m_\beta (a+l)^2 \quad (3.6)$$

Установление определенно-положительности функционала Π_2 нетривиально, так как в функционал (3.3) входят отрицательные слагаемые $-3\omega_0^2 \int \rho r_2^2 ds$, $-3\omega_0^2 m_\beta r_{2\beta}^2$ и зависит от конечномерных переменных ψ , θ , ϕ , $r_{1\beta}$, $r_{2\beta}$, $r_{3\beta}$ и распределенных параметров $r_i(s, t)$, $r'_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$). Наличие указанных членов требует дальнейшего преобразования этого функционала и решения ряда вариационных задач. В противном случае определенно-положительность (3.3) не может быть установлена.

Для того, чтобы в функционале (3.3) появились члены типа $\int \rho r_i^2 ds$, $m_\beta r_{i\beta}^2$ ($i = 1, 2, 3$) с положительными знаками, рассмотрим вспомогательные вариационные задачи. Найти минимумы функционалов

$$\Phi_1 = T_{11} f_{11}^{-1}, \quad f_{11} = \sum_{i=1}^3 \int \rho r_i^2 ds, \quad T_{11} = \frac{3}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 \int \rho (r_{2\beta}^0{}^2 - r_2^0{}^2) r_i^2 ds \quad (3.7)$$

$$\Phi_2 = T_{22} f_{22}^{-1}, \quad f_{22} = \sum_{i=1}^2 m_\beta r_{i\beta}^2, \quad T_{22} = 3\omega_0^2 r_{2\beta}^0 \sum_{i=1}^2 \int r_i^2 ds m_\beta \quad (3.8)$$

$$\Phi_3 = T_{33} f_{33}^{-1}, \quad f_{33} = \int \rho r_3^2 ds + m_\beta r_{3\beta}^2, \quad T_{33} = \int r_3^2 ds \quad (3.9)$$

в пространстве C_2 , состоящем из всех функций в области $0 \leq s \leq l$, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно по переменной s , удовлетворяющих условиям (1.29).

Приравнявая нулю первую вариацию функционалов Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , получим дифференциальные уравнения и естественные граничные условия для отыскания собственных значений и собственных функций.

Из $\delta\Phi_1 = 0$ будем иметь уравнение Лежандра первого рода и естественное граничное условие

$$\frac{3}{2} \omega_0^2 \frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{dr_i}{dz} \right] + \kappa^2 r_i = 0, \quad z = \frac{r_2^0}{r_{2\beta}^0} = \frac{a^0 + s}{a^0 + l} \quad (3.10)$$

$$(0 < z < l)$$

$$\left[(1-z^2) \frac{dr_i}{dz} \right]_{z=1} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.11)$$

Здесь κ^2 – квадрат частоты колебаний троса.

Из кинематических граничных условий $u_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) следует $a^0 = 0$ и в результате получим $z = s/l$.

Краевая задача (3.10), (3.11) имеет решение

$$\kappa_n^2 = 3\omega_0^2(2n-1), \quad u_n = P_n = \frac{1}{2^n n! dz^n} (z^2 - 1)^n \quad (3.12)$$

где P_n – стандартизированные многочлены Лежандра для нечетных степеней $n = 1, 3, 5, \dots$

При $n = 1$ получаем $\kappa_1 = 3\omega_0^2$, $u_1 = z = s/l$, и из (3.7) будем иметь оценку

$$z_{11}^2 = T_{11} - \kappa_1^2 f_{11} = T_{11} - 3\omega_0^2 f_{11} \geq 0. \quad (3.13)$$

Приравнявая нулю первую вариацию (3.8), получаем следующую краевую задачу:

$$3\omega_0^2 l \frac{d^2 r_i}{ds^2} = 0, \quad 3m_\beta \omega_0^2 l \left(\frac{dr_i}{ds} \right)_{s=1} - \kappa^2 m_\beta r_{i\beta} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.14)$$

Решение задачи (3.14) имеет вид

$$r_i = u_i = c_1 s, \quad \kappa = 3\omega_0^2 \quad (i = 1, 2) \quad (3.15)$$

где c_1 – постоянная интегрирования.

На основе (3.15) из (3.18) получим оценку

$$z_{22}^2 = T_{22} - \kappa f_{22} = T_{22} - 3\omega_0^2 f_{22} \geq 0 \quad (3.16)$$

Из равенства $\delta\Phi_3 = 0$ получаем краевую задачу вида

$$\frac{d^2 r_3}{dt^2} + k^2 r_3 = 0, \quad 3\omega_0^2 l \left(\frac{dr_3}{ds} \right)_{s=l} - \kappa^2 r_{3\beta} = 0 \quad (3.17)$$

Задача (3.17) допускает решение

$$r_3 = u_3 = A \sin ks \quad (0 < s < l) \quad (3.18)$$

$$k = \kappa(\rho)^{1/2}, \quad \kappa = k/(\rho)^{1/2} \quad (3.19)$$

где A – произвольная постоянная интегрирования.

Подставим решение (3.18) в естественное краевое условие. С учетом (3.19) будем иметь трансцендентное уравнение частот

$$\operatorname{ctg} v - n_1 v = 0, \quad n_1 = m_\beta / m_T, \quad v = kl \quad (3.20)$$

Корни уравнения частот (3.20) могут быть найдены, например, как пересечение пучка прямых с тригонометрической функцией, т.е.

$$y = n_1 v, \quad y = \operatorname{ctg} v \quad (3.21)$$

Если построить графики функций (3.21), то заметим, что уравнение частот (3.20) имеет счетное множество корней. Обозначим наименьший из них через v_1 , а соответствующий ему k через κ_1 .

Тогда из (3.9) будем иметь соотношение

$$\int u_3^2 ds - \kappa_1^2 \left(\int \rho u_3^2 ds + m_\beta u_{3\beta}^2 \right) \geq 0 \quad (3.22)$$

$$\kappa_1^2 = v_1^2 / (m_T l) \quad (3.23)$$

Аналогично, будем иметь

$$z_{44} = \lambda \left[\int u_2^2 ds - \kappa_1^2 \left(\int \rho u_3^2 ds + m_\beta u_{3\beta}^2 \right) \right] \geq 0$$

Умножим (3.22) на $3\omega_0^2 m_\beta l$. С учетом (3.23) получим

$$3\omega_0^2 m_\beta l \int u_3'^2 ds - 3\omega_0^2 m_\beta l \kappa_1^2 (\int u_3^2 ds + m_\beta u_{3\beta}^2) \geq 0 \quad (3.24)$$

Обозначив эту разность переменной z_3 , перепишем (3.24) в виде

$$z_3^2 = 3\omega_0^2 m_\beta l \int u_3'^2 ds - 3\omega_0^2 m_\beta n_1 (\int u_3^2 ds + m_\beta u_{3\beta}^2) \geq 0 \quad (3.25)$$

Далее, как и в [9–11], введем интегральные характеристики формулами

$$y_{23} = \int \rho s u_3 ds, \quad y_{21} = \int \rho s u_1 ds \quad (3.26)$$

Эти характеристики можно трактовать как некоторые центробежные моменты инерции в орбитальной системе осей координат $Ox_1x_2x_3$, поскольку их структура и размерность соответствуют таковым центробежных моментов инерции. Однако называть их моментами инерции в обычном смысле, принятом в механике, нельзя.

Применим к (3.26) неравенство Коши–Буняковского. Будем иметь

$$y_{21}^2 - I_{01} \int \rho u_1^2 ds \leq 0, \quad y_{23}^2 - I_{01} \int \rho u_3^2 ds \leq 0, \quad I_{01} = \frac{1}{3} m_T l^2 \quad (3.27)$$

Момент инерции троса относительно осей x_1, x_3 в положении равновесия ОТС.

Умножим неравенства (3.27) на минус единицу и обозначим полученные разности новыми переменными z_1^2, z_3^2 :

$$z_1^2 = I_{01} \int \rho u_1^2 ds - y_{21}^2 \geq 0, \quad z_3^2 = I_{01} \int \rho u_3^2 ds - y_{23}^2 \geq 0 \quad (3.28)$$

Пусть

$$z_2 = (\int \rho u_2^2 ds)^{1/2} \quad (3.29)$$

Тогда функционал (3.3) в переменных $\psi, \theta, \varphi, z_i, y_{21}, y_{23}, u_{i\beta}, z_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$) запишется в виде квадратичной формы

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & a_{11}^0 \psi^2 + a_{22}^0 \theta^2 + a_{33}^0 \varphi^2 + 3\omega_0^2 v_1 n_1 I_{01}^{-1} y_{23}^2 - 6\omega_0^2 \psi y_{23} + 3\omega_0^2 m_\beta (n_1 v_1^2 - 1) u_{3\beta}^2 - \\ & - 6\omega_0^2 m_\beta l \psi u_{3\beta} + 3\omega_0^2 n_1 v_1^2 z_3^2 + 4\omega_0^2 I_{01}^{-1} z_1^2 + 4\omega_0^2 I_{01}^{-1} y_{21}^2 + 8\omega_0^2 \varphi y_{21} + 4\omega_0^2 m_\beta (u_{1\beta}^2 + 2l \varphi u_{1\beta}) + \\ & + \lambda \kappa_1^2 z_2^2 + \lambda m_\beta \kappa_1^2 u_{2\beta}^2 + \sum_{i=1}^4 z_{ii}^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Согласно критерию Сильвестра, условия определенно-положительности квадратичной формы приводят к выполнению неравенств

$$a_{11}^0 - 3\omega_0^2 I_{01} \frac{1}{v_1 n_1} I_{01} - 3\omega_0^2 I_{02} \frac{1}{n_1 v_1 - 1} > 0 \quad (3.31)$$

$$a_{22}^0 > 0, \quad a_{33}^0 - 4\omega_0^2 I_0 > 0 \quad (3.32)$$

Подставим в коэффициенты (3.4) $a_{11}^0, a_{22}^0, a_{33}^0$ значения моментов инерции (3.5), (3.6). Получим следующие неравенства:

$$A_3 - A_2 + I_{01} \frac{n_1 v_1^2 - 1}{n_1 v_1^2} + I_{02} \frac{n_1 v_1^2 - 2}{n_1 v_1^2 - 1} > 0 \quad (3.33)$$

$$A_1 - A_3 + \frac{k_1}{\omega_0} > 0, \quad A_1 - A_2 + \frac{k_1}{4\omega_0} > 0 \quad (3.34)$$

$$I_{01} = \frac{m_T l^2}{3}, \quad I_{02} = \frac{m_\beta l^2}{2}, \quad n_1 = \frac{m_\beta}{m_T} \quad (3.35)$$

Для реальных параметров троса и зонда масса зонда m_β значительно больше массы троса и величина $n_1 \gg 1$. Разности $n_1 v_1^2 - 1$ и $n_1 v_2^2 - 2$ всегда будут положительными.

При выполнении неравенств (3.33), (3.34) с учетом формул (3.35) функционал Ляпунова-Четаева (3.1) определенно-положителен и непрерывен по метрикам

$$\rho_1 = P_1 + P_2, \quad \rho_0 = P_1 + P_3 \quad (3.36)$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^3 \left(\omega_s^2 + \int_0^l \rho u_i^2 ds + \dot{u}_{i\beta}^2 \right) \quad (3.37)$$

$$P_2 = \psi^2 + \theta^2 + \varphi^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\int_0^l \rho u_i^2 ds + u_{i\beta}^2 \right) \quad (3.38)$$

$$P_3 = P_2 + \int_0^l (l^2 - s^2) \sum_{i=1}^3 u_i^2 ds \quad (3.39)$$

На основе теорем [9, 13–15] делаем вывод, что неравенства (3.33), (3.34) являются достаточными условиями устойчивости положений равновесия (2.1), (2.2) космической орбитальной тросовой системы по метрикам ρ_1 и ρ_0 . Метрики ρ_1, ρ_0 определяются равенствами (3.36)–(3.39).

4. Заключение. Трос с зондом, расположенный вдоль радиуса орбиты, оказывает гравитационно-стабилизирующее влияние на положения равновесия. Параметры троса и зонда (3.35) входят в неравенство (3.33) и, как нетрудно заметить, могут существенно увеличивать момент инерции космической тросовой системы относительно касательной к орбите и расширяют область устойчивости.

При $I_{01} \equiv 0, I_{02} \equiv 0$ неравенства (3.33), (3.34) переходят в критерии устойчивости положения равновесия спутника-гиростата и спутника без маховиков ($k_1 = k_2 = k_3$), полученные в [16, 17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарычев В.А. Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. 223 с.
2. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
3. Misra A.K., Modi V.J. A survey on the dynamics and control of tether Satellite systems // Tethers in Space: Proc. Int. Conf. Arlington. Va. Sept. 17–19. 1986. – San Diego (Calif.). 1987. P. 667–719.

4. Сарычев В.А., Садов Ю.А., Петров А.Л., Галактионова О.О. Некоторые особенности нелинейных колебаний нерастяжимой нити в плоскости круговой орбиты: Препринт № 35. М.: ИПМат, 1989. 26 с.
5. Болотина Н.Е., Вильке В.Г. Об устойчивости положений равновесия гибкой тяжелой нити, привязанной к спутнику на круговой орбите // Космические исследования. 1978. Т. 16. Вып. 4. С. 621–626.
6. Климов С.И., Пивоваров М.Л., Алексеева Е.Н., Прудкогляд А.В., Родин В.Г. Использование тросовых систем для фундаментальных исследований магнитосферы. Динамика раскрытия и функционирования тросовой системы // Космические исследования. 1996. Т. 1. Вып. 34. С. 106–109.
7. Сидоренко В.В. Эволюция быстрых вращений орбитальной тросовой системы // Космические исследования. 1995. Т. 33. С. 36–39.
8. Садов Ю.А. Равновесные конфигурации орбитальной тросовой системы с учетом сопротивления атмосферы // Космические исследования. 1996. Т. 1. Вып. 34. С. 73–80.
9. Набиуллин М.К. Стационарные движение и устойчивость упругих спутников. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. 217 с.
10. Набиуллин М.К. Вращательное движение и устойчивость положения равновесия орбитальной тросовой системы // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 6. С. 3–12.
11. Nabiullin M.K. Stationary Motions and Stability of Flexible Satellites. Advanced Series in Mathematical Science and Engineering. World Federation Publishers Company, USA, Atlanta.: 1995, 1996. 290 p.
12. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
13. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.С. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
14. Мовчан А.А. Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.
15. Румянцев В.В. О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 946–957.
16. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. 231 с.
17. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1967. 142 с.
18. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.

Иркутск

Поступила в редакцию
4.07.2001