

УДК 539.3:534.1

© 2004 г. Л.В. ВАХОНИНА, В.Г. ПОПОВ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ КРУГЛОГО ТОНКОГО АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОГО ОТСЛОИВШЕГОСЯ ВКЛЮЧЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ВОЛНОЙ КРУЧЕНИЯ

Исследуется концентрация напряжений вблизи тонкого кругового абсолютно жесткого отслоившегося включения, с которым взаимодействуют гармонические волны кручения. Метод решения состоит в том, что угловые перемещения, вызванные волнами, отраженными от включения, представляются в виде разрывного решения соответствующего уравнения теории упругости. Это разрывное решение выражает угловые перемещения среды через неизвестные скачки перемещений и напряжений на включении. Относительно последних, после реализации граничных условий на отслоившейся и сцепленной поверхностях включения, получена система сингулярных интегральных уравнений. Ее решение строится приближенно методом коллокаций с использованием специальных квадратурных формул для сингулярных интегралов. Полученное приближенное решение дало возможность численно исследовать зависимость коэффициента при особенности напряжений и угла поворота включения от параметров падающей волны.

1. Концентрация напряжений в упругих телах, приводящая к их разрушению, возникает не только при наличии в них трещин, но и тонких жестких включений. Известно также, что наиболее сильную концентрацию напряжений вызывают отслоившиеся включения [1]. Под ними понимаются включения, одна из сторон которых полностью сцеплена с внешней средой, а другая со средой не взаимодействует, т.е. отслоилась.

Целью настоящей работы является исследование напряженного состояния неограниченной упругой среды, в которой содержится тонкое жесткое круговое отслоившееся включение. Эта среда совершает крутильные колебания, вызванные распространяющимися в ней гармоническими волнами кручения. Ранее в [2] решена аналогичная задача в статической постановке о нагружении такого включения непосредственно приложенным к нему крутящим моментом.

2. Пусть в упругой среде в плоскости задача $z = 0$ на круге $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ расположено тонкое жесткое включение толщиной h . Одна из его сторон ($z = +0$) отслоилась и со средой не взаимодействует, на другой ($z = -0$) выполняются условия полного сцепления. В среде распространяется волна кручения [3], вызывающая в ней угловые перемещения

$$u_{\theta}^0 = \frac{A_0}{\beta a} J_1(\beta r) e^{\gamma z}, \quad \beta = \sqrt{\kappa_2^2 - \gamma^2}, \quad \kappa_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho} \quad (2.1)$$

где ω – частота колебаний, ρ – плотность, G – модуль сдвига среды. Множитель $e^{-i\omega t}$ в (2.1) и далее опущен.

Угловые перемещения среды удовлетворяют дифференциальному уравнению [3]:

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_\theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \kappa_2^2 u_\theta = 0 \quad (2.2)$$

Это уравнение рассматривается с граничными условиями на сцепленной и отслоившейся сторонах включения

$$u_\theta(r, -0) = \delta r, \quad \sigma_{\theta z}(r, +0) = G \frac{\partial u_\theta}{\partial z}(r, +0) = 0 \quad (2.3)$$

где δ – неизвестный угол поворота включения. Кроме того, на включении перемещения и напряжения терпят разрывы, для скачков которых вводятся обозначения

$$\sigma_{\theta z}(r, +0) - \sigma_{\theta z}(r, -0) = \chi_1(r), \quad u_\theta(r, +0) - u_\theta(r, -0) = \chi_2(r), \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.4)$$

Неизвестная амплитуда угла поворота включения δ , входящая в (2.3), находится из следующего равенства, полученного из уравнения движения включения:

$$2\pi \int_0^a r^2 \chi_1(r) dr = -J_z \omega^2 \delta \quad (2.5)$$

где J_z – момент инерции включения относительно оси z .

Требуется определить перемещения и напряжения внешней среды, вызванные наличием в ней включения.

3. Для решения сформулированной задачи угловое перемещение среды представляется в виде

$$u_\theta = u_\theta^0 + u_\theta^1 \quad (3.1)$$

В (3.1) через u_θ^1 обозначены перемещения, вызванные волнами, отраженными от включения. Оно представляется в виде разрывного решения уравнения (2.1) со скачками (2.4). Это представление [4] имеет вид

$$u_\theta^1(r, \theta) = \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{G} G_2^1(\eta, r, z) d\eta + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^a \eta \chi_2(\eta) G_2^1(\eta, r, z) d\eta \quad (3.2)$$

$$G_2^1(\eta, r, z) = - \int_0^\infty \frac{\lambda J_1(\lambda \eta) J_1(\lambda r)}{2\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}} e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2} |z|} d\lambda$$

Формулы (3.1), (3.2) дают возможность получить из (2.3) систему интегральных уравнений относительно неизвестных скачков (2.4):

$$\begin{aligned} \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{G} K_2^0(\eta, r) d\eta + \int_0^a \eta \chi_2(\eta) K_2^1(\eta, r) d\eta &= -\delta r + p_1(\eta) \\ \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{G} K_2^1(\eta, r) d\eta - \int_0^a \eta \chi_2(\eta) K_2^2(\eta, r) d\eta &= p_2(\eta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$K_2^j(\eta, r) = \int_0^\infty \frac{1}{2} (\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2})^{j-1} J_1(\lambda r) J_1(\lambda \eta) d\lambda \quad (j = 0, 1, 2)$$

$$p_1(r) = \frac{A}{\beta a} J_1(\beta r), \quad p_2(r) = -i \frac{A\gamma}{\beta a} J_1(\beta r)$$

С целью приведения системы (3.3) к виду, удобному для численного решения и выделения из ядер интегральных операторов сингулярной составляющей, над ней необходимо проделать преобразования, аналогичные изложенным в [2].

Для этого сначала в интегралах с функцией $\chi_2(\eta)$ выполняется интегрирование по частям и вводится новая функция

$$\psi_2(\eta) = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta \chi_2(\eta)) \quad (3.4)$$

В результате (3.3) примет вид

$$\int_0^{\infty} \frac{T_1(\lambda) \lambda J_1(\lambda r)}{2G \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}} d\lambda + \int_0^{\infty} T_2(\lambda) \frac{1}{2} J_1(\lambda r) d\lambda = -\delta r + p_1(r) \quad (3.5)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{T_1(\lambda)}{2G} \lambda J_1(\lambda r) d\lambda - \int_0^{\infty} \frac{T_2(\lambda)}{2} \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2} J_1(\lambda r) d\lambda = p_2(r)$$

$$T_1(\lambda) = \int_0^a \eta \chi_1(\eta) J_1(\lambda \eta) d\eta, \quad T_2(\lambda) = \int_0^a \eta \psi_2(\eta) J_0(\lambda \eta) d\eta \quad (3.6)$$

К первому и второму уравнениям системы (3.6) соответственно применяются операторы

$$D_1[f] = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y f(r) dr, \quad D_2[f] = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y f(r) dr$$

а неизвестные функции представляются в виде интегралов

$$T_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi_1(\tau) \sin \lambda \tau d\tau, \quad T_2(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi_2(\tau) \cos \lambda \tau d\tau \quad (3.7)$$

Если воспользоваться формулами обратных синус- и косинус-преобразований Фурье, то из формул (3.6) и (3.7) будет найдено

$$\chi_1(r) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^a \frac{\Phi_1(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\tau, \quad \psi_2(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^a \Phi_2(\tau) \frac{d}{d\tau} (\sqrt{\tau^2 - r^2})^{-1} d\tau \quad (3.8)$$

$$\Phi_1(\tau) = \Phi_2(\tau) \equiv 0, \quad \tau > 1$$

После всех этих преобразований система (3.5) окончательно примет вид

$$\begin{aligned} q_1(z) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_2(y) \frac{dy}{y-z} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_1(y) R_1(y-z) dy &= -4\delta z + f_1(z) \\ q_2(z) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_1(y) \frac{dy}{y-z} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_2(y) R_2(y-z) dy - \\ - q_2(0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_2(y) \frac{dy}{y} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_2(y) R_2(y) dy &= f_2(z) \end{aligned} \quad (3.9)$$

При получении (3.9) функция $\varphi_1(\tau)$ была продлена нечетным, а $\varphi_2(\tau)$ четным образом на $[-a, a]$. Также были введены новые обозначения $\tau = ay$, $r = az$, $q_1(z) = a^{-1}G^{-1}\varphi_1(az)$, $q_2(z) = a^{-1}G^{-1}\varphi_2(az)$.

Ядра и правые части в (1.13) определяются по формулам

$$R_1(t) = -\frac{\pi\kappa_0}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \kappa_0^{2k+1} |t|^{2k+1} + i\kappa_0 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \kappa_0^{2k} t^{2k}$$

$$R_2(t) = -\frac{\pi\kappa_0}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \kappa_0^{2k+1} |t|^{2k+1} + \frac{\pi\kappa_0}{2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \kappa_0^{2k+1} |t|^{2k+1} + i\kappa_0 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\kappa_0 t)^{2k+2}$$

$$\beta_k = \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!2^{2k+1}}, \quad \gamma_k = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!(2k+1)!}$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)!(2k+3)!}, \quad d_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}(2k+1)}$$

$$f_1(z) = \frac{2\alpha_0}{\beta_0 \kappa_0} \sin(\kappa_0 \beta_0 z), \quad f_2(z) = -\frac{2i\alpha_0 \delta_0}{\kappa_0 \beta_0^2} (1 - \cos(\kappa_0 \beta_0 z))$$

$$\kappa_0 = a\kappa_2, \quad \alpha_0 = a^{-1}A, \quad \delta_0 = \gamma\kappa_2^{-1}, \quad \beta_0 = \sqrt{1 - \delta_0^2}$$

К системе (3.9) необходимо добавить равенство (2.5), которое после введения новых обозначений преобразуется к виду

$$\delta = -\frac{8}{\varepsilon \pi \bar{\rho} \kappa_{0-1}} \int_0^1 x q_1(x) dx, \quad \bar{\rho} = \rho_0 \rho^{-1}, \quad \varepsilon = ha^{-1} \quad (3.10)$$

Для решения (3.9) предварительно уравнения заменяются их суммой и разностью, а также вводятся новые неизвестные функции по формулам

$$q_1(z) = \frac{1}{2}(g_1(z) - g_2(z)), \quad q_2(z) = \frac{1}{2}(g_1(z) + g_2(z)) \quad (3.11)$$

В результате найдено

$$g_1(z) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) \frac{dy}{y-z} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) G^+(y-z) dy + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) G^-(y-z) dy -$$

$$-\frac{1}{2} \left[g_1(0) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_1(y) dy}{y} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) R_2(y) dy \right] - \frac{1}{2} \left[g_2(0) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_2(y) dy}{y} + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^1 g_2(y) R_2(y) dy \right] = f^+(z) - 4\delta z$$

$$g_2(z) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) \frac{dy}{y-z} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) G^-(y-z) dy + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) G^+(y-z) dy - \quad (3.12)$$

$$-\frac{1}{2} \left[g_1(0) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_1(y) dy}{y} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) R_2(y) dy \right] - \frac{1}{2} \left[g_2(0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_2(y) dy}{y} + \int_{-1}^1 g_2(y) R_2(y) dy \right] = f^-(z) + 4\delta z$$

$$G^\pm = 1/2[R_2 \pm R_1], \quad f^\pm = f_2 \pm f_1$$

Как показано в [2], для того чтобы напряжения вблизи концов включения имели интегрируемую особенность, решения системы (3.12) необходимо разыскивать в виде

$$g_j(z) = (1-z)^{\alpha_j} (1+z)^{-\alpha_j} \psi_j(z) \quad (j = 1, 2), \quad \alpha_1 = 1/4, \quad \alpha_2 = -1/4 \quad (3.13)$$

Функции $\psi_j(z)$ принадлежат классу $H[-1, 1]$.

Введем в рассмотрение сингулярные интегральные операторы

$$S[g_k](z) = g_k(z) + \frac{(-1)^k}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_k(y) dy}{y-z} \quad (k = 1, 2) \quad (3.14)$$

Функции $\psi_j(z)$ приблизим интерполяционными многочленами вида

$$\Psi_k(z) = \sum_{m=1}^n \Psi(y_{km}) \frac{P_n^{\alpha_k, -\alpha_k}(z)}{(z-y_{km}) [P_n^{\alpha_k, -\alpha_k}(y_{km})]'} \quad (k = 1, 2) \quad (3.15)$$

где $P_n^{\alpha_k, -\alpha_k}(z)$ – многочлены Якоби, y_{km} – корни этих многочленов. Если в (18) подставить (17), (19), то будут получены приближенные формулы [5]:

$$S_1[g_1](y_{2j}) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n A_m^{(1)} \frac{\Psi_1(y_{1m})}{y_{1m} - y_{2j}}, \quad S_2[g_2](y_{1j}) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n A_m^{(2)} \frac{\Psi_2(y_{2m})}{y_{2m} - y_{1j}}$$

$$A_m^{(1)} = -\frac{\pi \sqrt{2} P_n^{\alpha_2, -\alpha_2}(y_{1m})}{[P_n^{\alpha_1, -\alpha_1}(y_{1m})]'}, \quad A_m^{(2)} = \frac{\pi \sqrt{2} P_n^{\alpha_1, -\alpha_1}(y_{2m})}{[P_n^{\alpha_2, -\alpha_2}(y_{2m})]'}$$
(3.16)

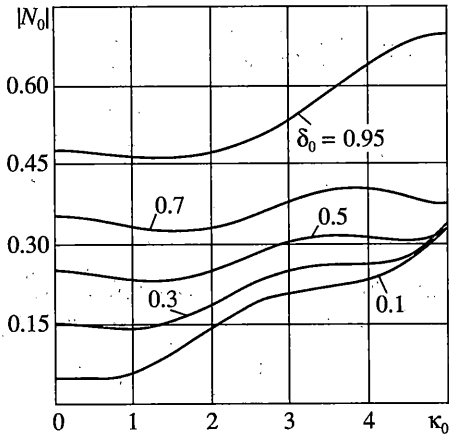
$$S_k[g_k](0) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n b_m^{(k)} \Psi_k(y_{km}) \quad (k = 1, 2)$$

$$b_m^{(1)} = \frac{P_n^{\alpha_2, -\alpha_2}(y_{1m}) - P_n^{\alpha_2, -\alpha_2}(0)}{(\pi \sqrt{2})^{-1} [P_n^{\alpha_1, -\alpha_1}(y_{1m})]'}, \quad b_m^{(2)} = \frac{P_n^{\alpha_1, -\alpha_1}(y_{2m}) - P_n^{\alpha_1, -\alpha_1}(0)}{(\pi \sqrt{2})^{-1} [P_n^{\alpha_2, -\alpha_2}(y_{2m})]'}$$

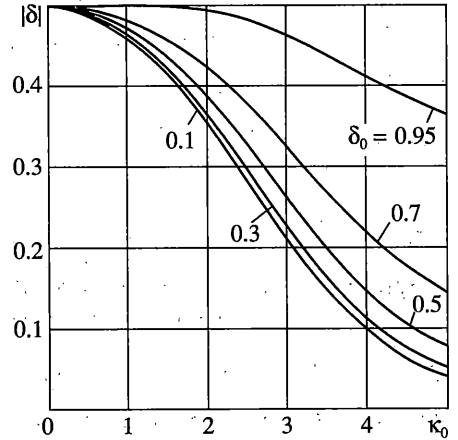
При помощи формул (3.16), а также соответствующих квадратурных формул Гаусса – Якоби [6] из (3.12) и (3.10) может быть получена следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_1(y_{1m}) \left[-\frac{A_m^{(1)}}{y_{1m} - y_{2j}} + A_m^{(1)} G^+(y_{1m} - y_{2j}) + \frac{1}{2} b_m^{(1)} - \frac{1}{2} A_m^{(1)} R_2(y_{1m}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_2(y_{2m}) \left[A_m^{(2)} G^-(y_{2m} - y_{2j}) - \frac{1}{2} b_m^{(2)} - \frac{1}{2} A_m^{(2)} R_2(y_{2m}) \right] = f^+(y_{2j}) - 4\delta y_{2j}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_1(y_{1m}) \left[A_m^{(2)} G^-(y_{1m} - y_{1j}) + \frac{1}{2} b_m^{(1)} - \frac{1}{2} A_m^{(1)} R_2(y_{1m}) \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_2(y_{2m}) \left[-\frac{A_m^{(2)}}{y_{2m} - y_{1j}} + A_m^{(2)} G^+(y_{2m} - y_{1j}) - \frac{1}{2} b_m^{(2)} - \frac{1}{2} A_m^{(2)} R_2(y_{2m}) \right] = \\ & = f^-(y_{1j}) - 4\delta y_{1j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\delta = \frac{4}{\pi \kappa_0 \varepsilon \bar{\rho}} \left[\sum_{m=1}^n (A_m^{(2)} y_{2m} \Psi_2(y_{2m}) - A_m^{(1)} y_{1m} \Psi_1(y_{1m})) - 2M_0 \right]$$

После решения системы (3.17) сами неизвестные функции приближенно определяются по формулам (3.13), (3.15).

В качестве меры концентрации напряжений вблизи рассматриваемого дефекта, как и в [2], принимается коэффициент при особенности скачка напряжений

$$N = \lim_{r \rightarrow a-0} (a-r)^{3/4} \chi_1(r) \quad (3.18)$$

После подстановки в (3.18) значения $\chi_1(r)$ из (3.8), учета формул (3.11), (3.13), (3.14) и выполнения предельного перехода найдем

$$N = a^{3/4} \sigma_0 N_0, \quad N_0 = -\frac{\pi}{2^4 \sqrt{2}} \sum_{m=1}^n \Psi_2(y_{2m}) \frac{P_n^{\alpha_2, -\alpha_2}(1)}{(1-y_{2m}) [P_n^{\alpha_2, -\alpha_2}(y_{2m})]'} \quad (3.19)$$

4. Полученные приближенные формулы дали возможность численно исследовать зависимость концентрации напряжений и угла поворота от параметров падающей волны. Результаты этих исследований приведены в виде графиков на фиг. 1, 2. На них показаны графики зависимости абсолютных величин коэффициента N_0 (фиг. 1) и амплитуды угла поворота включения δ (фиг. 2) от безразмерного волнового числа κ_0 при различных значениях отношения постоянных распространения δ_0 . Анализ этих

графиков показывает, что значения N_0 и амплитуды угла поворота увеличиваются при $\delta_0 \rightarrow 1$. С ростом безразмерного волнового числа величина N_0 возрастает до достижения ею некоторого максимального значения, а для амплитуды угла поворота характерно монотонное убывание.

Исследование практической сходимости приближенного решения показало, что для достижения относительной погрешности менее 1% для всего рассмотренного диапазона изменения k_0 в формулах (3.15), (3.19) достаточно использовать от 5 до 20 узлов интерполяции. С увеличением k_0 имеет место ухудшение сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
2. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко Н.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 308 с.
4. Попов Г.Я. Построение разрывного решения динамических уравнений теории упругости для слоистой среды с межфазными дефектами // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 6. С. 769–763.
5. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1967. 500 с.
6. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

Одесса

Поступила в редакцию
31.01.2002