

УДК 539.3

© 2004 г. Д.А. ПОЖАРСКИЙ

КОНТАКТ СО СЦЕПЛЕНИЕМ ГИБКИХ НАКЛАДОК И УПРУГОГО КЛИНА

Рассматривается трехмерная задача о равновесии упругого клина, грани которого армированы (с полным сцеплением) тонкими жесткими на растяжение, но абсолютно гибкими пластинками (накладками). Задача симметрична относительно биссекторной полуплоскости клина. К пластинкам приложены известные касательные сдвигающие силы, искомыми являются касательные напряжения в области контакта, поступательное перемещение и угол поворота пластинки. Приводятся формулы, позволяющие рассчитать полностью вектор перемещений и тензор напряжений в трехмерном упругом клине, на гранях которого действуют симметричные произвольно направленные касательные нагрузки. Эти формулы обобщают решения [1–3], где касательная нагрузка перпендикулярна ребру клина. При помощи полученных функций Грина контактная задача сводится к системе двух интегральных уравнений относительно касательных напряжений. Для решения этой системы в случае эллиптических накладок применяется регулярный асимптотический метод. При этом в качестве нулевого члена асимптотики берется точное решение аналогичной задачи о накладке на упругом полупространстве [4]. Даются численные примеры.

Для плоских контактных задач с трением и сцеплением асимптотические методы использовались в [5, 6].

1. Касательные силы на гранях клина. В цилиндрических координатах r, φ, z рассмотрим трехмерный упругий клин ($0 \leq r < \infty, -\alpha \leq \varphi \leq \alpha, |z| < \infty$) с упругими характеристиками G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона). Направим ось z по ребру клина так, чтобы система координат была правой. Пусть на гранях $\varphi = \pm\alpha$ в точках $r = x, z = y$ действуют одинаковые касательные сосредоточенные силы $\mathbf{T} = (T_r, T_z)$. Ввиду симметрии задачи по α будем рассматривать область $0 \leq \varphi \leq \alpha$ (фиг. 1, а), граничные условия в которой запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha: \sigma_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = T_r \delta(r-x) \delta(z-y), \quad \tau_{\varphi z} = T_z \delta(r-x) \delta(z-y) \\ \varphi = 0: u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Кроме того, на бесконечности напряжения в клине исчезают. Выразим перемещения в цилиндрических координатах через три гармонические функции Папковича–Нейбера $\Phi_n = \Phi_n(r, \varphi, z)$ ($n = 0, 1, 2$) по формулам (1.2) [2], а напряжения затем – при помощи закона Гука.

Гармонические функции Φ_n ($n = 1, 2$) будем разыскивать в форме интеграла Фурье по z и комплексного интеграла Конторовича–Лебедева. Апостериорный анализ решения показывает, что для функции Φ_0 такой интеграл расходится, поэтому следует разлагать только ее частные производные, входящие в формулы (1.2) [2]. Применяя известную технику [1–3], решение задачи (1.1) найдем в виде (1.2) [2], где (перехо-

дим к вещественным интегралам Конторовича–Лебедева, содержащим вещественную модифицированную функцию Бесселя $\mathcal{H}_{it}(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_0(r, \varphi, z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_0^*(r, \varphi, z, \tau, t) d\tau dt, \quad \xi = r, \varphi, z$$

$$\Phi_n(r, \varphi, n) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi_n^*(r, \varphi, z, \tau, t) d\tau dt \quad (n = 1, 2)$$

$$\Phi_n^*(r, \varphi, z, \tau, t) = \frac{2 \operatorname{sh}(\pi \tau)}{\pi^3 G} \mathcal{H}_{it}(tr) \{ T_z \cos(t(z-y)) [A_n^+(\tau, t) \operatorname{ch}(\varphi \tau) + B_n^+(\tau, t) \operatorname{sh}(\varphi \tau)] + T_z \frac{\sin(t(z-y))}{tx} [A_n^-(\tau, t) \operatorname{ch}(\varphi \tau) + B_n^-(\tau, t) \operatorname{ch}(\varphi \tau)] \}$$

$$A_1^\pm(\tau, t) = B_0^\pm(\tau, t) = B_2^\pm(\tau, t) = 0$$

$$A_0^\pm(\tau, t) = \frac{1-2\nu}{t \operatorname{sh}(\alpha \tau)} \int_0^{\infty} \frac{W(u, \alpha) \Psi^\pm(u, t) \operatorname{sh}(\pi u/2) du}{\operatorname{ch}(\pi u) + \operatorname{ch}(\pi \tau)}$$

$$B_1^+(\tau, t) = R(\tau, \alpha) C^+(\tau, t) - 2 \mathcal{H}'_{it}(tx) \left[\frac{\tau R(\tau, \alpha)}{1-2\nu} + S(\tau, \alpha) \right] \tag{1.2}$$

$$A_2^+(\tau, t) = S(\tau, \alpha) C^+(\tau, t) - 2 \mathcal{H}'_{it}(tx) \left[\frac{\tau S(\tau, \alpha)}{1-2\nu} - R(\tau, \alpha) \right]$$

$$B_1^-(\tau, t) = R(\tau, \alpha) \left[C^-(\tau, t) - \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} \tau \mathcal{H}_{it}(tx) \right] - 2x \mathcal{H}'_{it}(tx) \left[\frac{\tau R(\tau, \alpha)}{1-2\nu} + S(\tau, \alpha) \right]$$

$$A_2^-(\tau, t) = S(\tau, \alpha) \left[C^-(\tau, t) - \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} \tau \mathcal{H}_{it}(tx) \right] - 2x \mathcal{H}'_{it}(tx) \left[\frac{\tau S(\tau, \alpha)}{1-2\nu} - R(\tau, \alpha) \right]$$

$$W(\tau, \alpha) = \frac{\operatorname{ch}(2\alpha \tau) - \cos(2\alpha)}{\operatorname{sh}(2\alpha \tau) + \tau \sin(2\alpha)}, \quad \mathcal{H}'_{it}(tx) := \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_{it}(tx)$$

$$R(\tau, \alpha) = \frac{\operatorname{sh}(\alpha \tau) \cos \alpha}{\operatorname{ch}(2\alpha \tau) - \cos(2\alpha)}, \quad S(\tau, \alpha) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha \tau) \sin \alpha}{\operatorname{ch}(2\alpha \tau) - \cos(2\alpha)}$$

$$C^\pm(\tau, t) = -4(1-\nu) \frac{W(\tau, \alpha) \Psi^\pm(\tau, t)}{\operatorname{ch}(\pi \tau/2)}, \quad \Psi^\pm(\tau, t) = \Psi_*^\pm(\tau, t) + F^\pm(\tau, t)$$

Функции $\Psi_*^\pm(\tau, t)$ при фиксированном значении t находятся из интегральных уравнений Фредгольма второго рода ($0 \leq \tau < \infty$):

$$\Psi_*^\pm(\tau, t) = (1-2\nu) \int_0^{\infty} L(\tau, u) [\Psi_*^\pm(u, t) + F^\pm(u, t)] du \tag{1.3}$$

$$L(\tau, u) = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi \tau}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W(u, \alpha) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\pi s) g(s, \alpha) ds}{[\operatorname{ch}(\pi s) + \operatorname{ch}(\pi \tau)][\operatorname{ch}(\pi s) + \operatorname{ch}(\pi u)]}$$

$$g(s, \alpha) = \sin^2(2\alpha) \operatorname{cth}(\alpha s) / [\operatorname{ch}(2\alpha s) - \cos(4\alpha)]$$

$$F^+(u, t) = -\operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \left[f_1(u, \alpha) \mathcal{H}_{iu}(tx) - \int_0^{\infty} \frac{h_1(s, \alpha) \mathcal{H}_{is}(tx) \operatorname{sh}(\pi s) ds}{\operatorname{ch}(\pi s) - \operatorname{ch}(\pi u)} \right]$$

$$F^-(u, t) = -\operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \left[f_2(u, \alpha) \mathcal{H}_{iu}(tx) + f_1(u, \alpha) x \mathcal{H}'_{iu}(tx) + \right. \quad (1.4)$$

$$\left. + \int_0^{\infty} \frac{h_2(s, \alpha) \mathcal{H}_{is}(tx) - h_1(s, \alpha) x \mathcal{H}'_{is}(tx)}{\operatorname{ch}(\pi s) - \operatorname{ch}(\pi u)} \operatorname{sh}(\pi s) ds \right]$$

$$f_1(u, \alpha) = \frac{u W^{-1}(u, \alpha)}{2(1-\nu)(1-2\nu)} + \frac{h_2(u, \alpha)}{u}, \quad h_1(u, \alpha) = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)W(u, \alpha)} - h_2(u, \alpha)$$

$$f_2(u, \alpha) = \frac{2(1-\nu)u}{(1-2\nu)W(u, \alpha)} - u h_2(u, \alpha), \quad h_2(u, \alpha) = \frac{u \sin(2\alpha)}{\operatorname{ch}(2\alpha u) - \cos(2\alpha)}$$

Дифференцирование под знаком интеграла в первой формуле (1.2) обеспечивает сходимость этого интеграла по переменной t . В итоге интегралы в первой и второй формулах (1.2) сходятся при всех $\varphi \in [0, \alpha]$.

Анализ интегрального уравнения Фредгольма типа (1.3) проведен в [1, 3]. Для его численного решения используем метод коллокации по гауссовским узлам.

На основе решения (1.2)–(1.4) и формул (1.2) [2], например при $2\alpha = \pi$, вычисляя интегралы [7], найдем касательные перемещения на грани $\varphi = \pi/2$ в виде

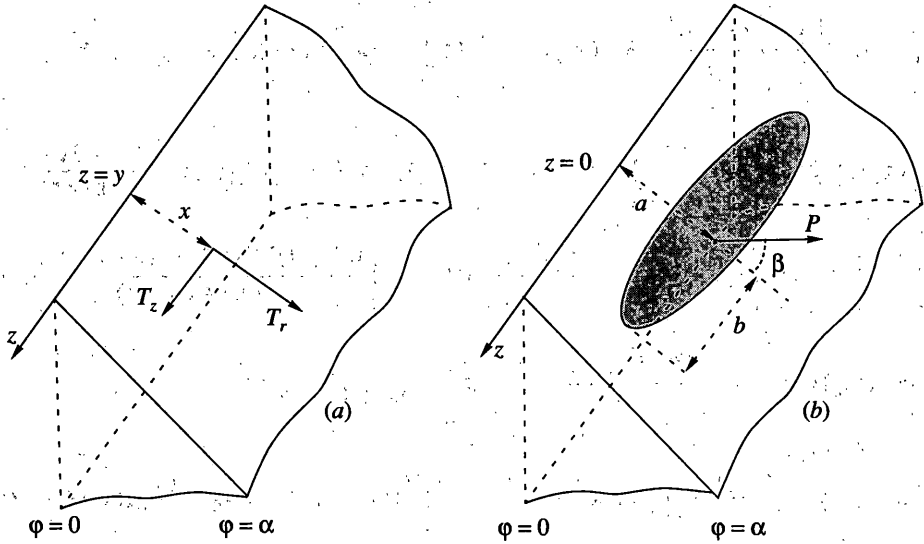
$$u_r(r, \pi/2, z) = \frac{T_r}{2\pi G} \left[\frac{1-\nu}{R_-} - \frac{1-\nu}{R_+} + \nu \left(\frac{(r-x)^2}{R_-^3} - \frac{(r+x)^2}{R_+^2} \right) \right] + \frac{T_z \nu(z-y)}{2\pi G} \left[\frac{r-x}{R_-^3} + \frac{r+x}{R_+^3} \right]$$

$$u_z(r, \pi/2, z) = \frac{T_r \nu(z-y)}{2\pi G} \left[\frac{r-x}{R_-^3} + \frac{r+x}{R_+^3} \right] + \frac{T_z}{2\pi G} \left[\frac{1-\nu}{R_-} + \frac{1-\nu}{R_+} + \nu(z-y)^2 \left(\frac{1}{R_-^3} + \frac{1}{R_+^3} \right) \right] \quad (1.5)$$

$$R_{\pm} = [(r \pm x)^2 + (z-y)^2]^{1/2}$$

Формулы (1.5) совпадают с известным решением Черрути [8] для симметричного нагружения упругого полупространства.

2. Сцепленные с клином накладки. Применим полученные выше формулы к симметричной задаче о двух одинаковых тонких жестких на растяжение, но абсолютно гибких пластинках (накладках), сцепленных с гранями упругого клина. Ввиду симметрии задачи по φ далее рассматриваем область клина $0 \leq \varphi \leq \alpha$ с одной накладкой (фиг. 1, б). Пусть накладка занимает эллиптическую область $\Omega: (r-a)^2/c^2 + z^2/b^2 \leq 1$, $a > c$, $b \geq c$. К накладке приложена сдвигающая касательная сила P , действующая под углом β к положительному направлению полуоси r . Предположим, что при этом накладка смещается на величину δ под углом γ к положительному направлению полуоси r . При заданных величинах P и β требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_{r\varphi}(r, \alpha, z) = \tau_1(r, z)$, $\tau_{\varphi z}(r, \alpha, z) = \tau_2(r, z)$, $(r, z) \in \Omega$, а также величины δ и γ .



Фиг. 1

Граничные условия контактной задачи при $\varphi = 0$ совпадают с соответствующими условиями (1.1), при $\varphi = \alpha$ граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_r &= \delta \cos \gamma, \quad u_z = \delta \sin \gamma, \quad \sigma_\varphi = 0 \quad (r, z) \in \Omega \\ \sigma_\varphi &= \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0, \quad (r, z) \notin \Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

Используя формулы (1.2) [2], (1.2)–(1.4), выразим перемещения $u_r(r, \alpha, z)$ и $u_z(r, \alpha, z)$. Заменяя в этих выражениях T_r на $\tau_1(x, y)$ и T_z на $\tau_2(x, y)$, интегрируя по области Ω по переменным x, y и удовлетворяя первым двум условиям (2.1), получаем систему двух интегральных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений $\tau_n(x, y)$ ($n = 1, 2$) $(x, y) \in \Omega$.

Вводя безразмерные обозначения

$$\begin{aligned} r_* &= \frac{r-a}{b}, \quad x_* = \frac{x-a}{b}, \quad z_* = \frac{z}{b}, \quad y_* = \frac{y}{b}, \quad \delta_* = \frac{\delta}{b}, \quad \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b} \\ R &= R_b^{-1}, \quad r_0 = r_* + \lambda, \quad x_0 = x_* + \lambda, \quad q = \nu(1-\nu)^{-1}, \quad \kappa = 3-4\nu \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\tau_n^*(r_*, z_*) = \frac{\tau_n(r, z)(1-\nu)}{G}, \quad n = 1, 2, \quad P_* = \frac{P(1-\nu)}{Gb^2}, \quad \Omega_*: \frac{r_*^2}{\varepsilon^2} + z_*^2 \leq 1$$

и опуская далее звездочки, эту систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tau_1(x, y) \left[\frac{1}{R} + q \frac{(r-x)^2}{R^3} + K_{11}(x, y, r, z) \right] d\Omega_{xy} + \\ & + \int_{\Omega} \tau_2(x, y) \left[q \frac{(r-x)(z-y)}{R^3} + K_{12}(x, y, r, z) \right] d\Omega_{xy} = 2\pi\delta \cos \gamma \quad (r, z) \in \Omega_{rz} \\ & \int_{\Omega} \tau_1(x, y) \left[q \frac{(r-x)(z-y)}{R^3} + K_{21}(x, y, r, z) \right] d\Omega_{xy} + \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Omega} \tau_2(x, y) \left[\frac{1}{R} + q \frac{(z-y)^2}{R^3} + K_{22}(x, y, r, z) \right] d\Omega_{xy} = 2\pi\delta \sin \gamma (r, z) \in \Omega_{rz} \\
 K_{11}(x, y, r, z) & = \frac{(1-\nu)^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi\tau) \cos(t(z-y)) \left\{ \left[x_0 \mathcal{H}_{i\tau}(tx_0) W_1(\tau, \alpha) - \frac{(1-2\nu)^2}{t \text{sh}(\pi\tau)} \times \right. \right. \\
 & \times \int_0^{\infty} S(\alpha, \tau, u, s) \mathcal{H}_{is}(tx_0) dsdu - \frac{4(1-\nu)}{(1-2\nu)^{-1}t} \text{cth}(\alpha\tau) \int_0^{\infty} \frac{W(u, \alpha) \Psi_0^+(u, t) \text{sh}(\pi u/2) du}{\text{ch}(\pi u) + \text{ch}(\pi\tau)} \left. \right] \frac{\partial}{\partial r} + \\
 & + \left[\mathcal{H}_{i\tau}(tx_0) W_2(\tau, \alpha) + \frac{\Psi^+(\tau, t) W_3(\tau, \alpha)}{\text{ch}(\pi\tau/2)} \right] \left(\kappa - r_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) \left. \right\} \mathcal{H}_{i\tau}(tr_0) d\tau dt \\
 K_{12}(x, y, r, z) & = \frac{(1-\nu)^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi\tau) \frac{\sin(t(z-y))}{t} \left\{ \left[\left(4(1-\nu)^2 + 1 + x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{H}_{i\tau}(tx_0) W_1(\tau, \alpha) - \right. \right. \\
 & - \frac{(1-2\nu)^2}{t \text{sh}(\pi\tau)} \int_0^{\infty} S(\alpha, \tau, u, s) \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_{is}(tx_0) dsdu - \frac{4(1-\nu)}{(1-2\nu)^{-1}tx_0} \text{cth}(\alpha\tau) \times \\
 & \times \int_0^{\infty} \frac{W(u, \alpha) \Psi_0^-(u, t) \text{sh}(\pi u/2) du}{\text{ch}(\pi u) + \text{ch}(\pi\tau)} \left. \right] \frac{\partial}{\partial r} + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} W_2(\tau, \alpha) + \frac{W_4(\tau, \alpha)}{x_0} \right) \mathcal{H}_{i\tau}(tx_0) + \frac{\Psi^-(\tau, t) W_3(\tau, \alpha)}{x_0 \text{ch}(\pi\tau/2)} \right] \times \\
 & \times \left(\kappa - r_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) \left. \right\} \mathcal{H}_{i\tau}(tr_0) d\tau dt \tag{2.4} \\
 K_{21}(x, y, r, z) & = \frac{(1-\nu)^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi\tau) t \sin(t(z-y)) \left\{ \mathcal{H}_{i\tau}(tx_0) [r_0 W_2(\tau, \alpha) - x_0 W_1(\tau, \alpha)] + \right. \\
 & + \frac{(1-2\nu)^2}{t \text{sh}(\pi\tau)} \int_0^{\infty} S(\alpha, \tau, u, s) \mathcal{H}_{is}(tx_0) dsdu + \frac{4(1-\nu)}{(1-2\nu)^{-1}t} \text{cth}(\alpha\tau) \times \\
 & \times \int_0^{\infty} \frac{W(u, \alpha) \Psi_0^+(u, t) \text{sh}(\pi u/2) du}{\text{ch}(\pi u) + \text{ch}(\pi\tau)} + \frac{r_0 \Psi^+(\tau, t) W_3(\tau, \alpha)}{\text{ch}(\pi\tau/2)} \left. \right\} \mathcal{H}_{i\tau}(tr_0) d\tau dt \\
 K_{22}(x, y, r, z) & = \frac{(1-\nu)^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi\tau) \cos(t(z-y)) \left\{ \left[\left(4(1-\nu)^2 + 1 + x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) W_1(\tau, \alpha) - \right. \right. \\
 & - r_0 \frac{\partial}{\partial x} W_2(\tau, \alpha) \left. \right] \mathcal{H}_{i\tau}(tx_0) - \frac{(1-2\nu)^2}{t \text{sh}(\pi\tau)} \int_0^{\infty} S(\alpha, \tau, u, s) \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_{is}(tx_0) dsdu - \frac{4(1-\nu)}{(1-2\nu)^{-1}tx_0} \text{cth}(\alpha\tau) \times \\
 & \times \int_0^{\infty} \frac{W(u, \alpha) \Psi_0^-(u, t) \text{sh}(\pi u/2) du}{\text{ch}(\pi u) + \text{ch}(\pi\tau)} - \frac{r_0}{x_0} \left[\mathcal{H}_{i\tau}(tx_0) W_4(\tau, \alpha) + \frac{\Psi^-(\tau, t) W_3(\tau, \alpha)}{\text{ch}(\pi\tau/2)} \right] \left. \right\} \mathcal{H}_{i\tau}(tr_0) d\tau dt
 \end{aligned}$$

$$\Psi_0^\pm(\tau, t) = \Psi_*^\pm(\tau, t) + F_0^\pm(\tau, t)$$

$$F_0^+(u, t) = -\operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \left[\frac{h_2(u, \alpha)}{u} \mathcal{H}_{iu}(tx) + \int_0^\infty \frac{h_2(s, \alpha) \mathcal{H}_{is}(tx) \operatorname{sh}(\pi s) ds}{\operatorname{ch}(\pi s) - \operatorname{ch}(\pi u)} \right]$$

$$F_0^-(u, t) = -\operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \left[h_2(u, \alpha) \left(-u \mathcal{H}_{iu}(tx) + \frac{x}{u} \mathcal{H}'_{iu}(tx) \right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \frac{h_2(s, \alpha) [\mathcal{H}_{is}(tx) + x \mathcal{H}'_{is}(tx)]}{\operatorname{ch}(\pi s) - \operatorname{ch}(\pi u)} \operatorname{sh}(\pi s) ds \right]$$

$$S(\alpha, \tau, u, s) = \left[\operatorname{cth}(\alpha\tau) W(u, \alpha) W^{-1}(s, \alpha) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi u}{2} \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} + \operatorname{th} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{th} \frac{\pi u}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi s}{2} \right) \right] \times \quad (2.5)$$

$$\times \frac{\operatorname{sh}(\pi\tau) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi s)}{[\operatorname{ch}(\pi\tau) + \operatorname{ch}(\pi u)][\operatorname{ch}(\pi s) + \operatorname{ch}(\pi u)]}$$

$$W_1(\tau, \alpha) = \operatorname{cth}(\alpha\tau) - \operatorname{cth}(\pi\tau)$$

$$W_2(\tau, \alpha) = \frac{(1 - 2\nu) \operatorname{sh}(2\alpha\tau) - \tau \sin(2\alpha)}{(1 - 2\nu)[\operatorname{ch}(2\alpha\tau) - \cos(2\alpha)]} - \operatorname{cth}(\pi\tau)$$

$$W_3(\tau, \alpha) = \frac{2(1 - \nu) \sin(2\alpha)}{\operatorname{sh}(2\alpha\tau) + \tau \sin(2\alpha)}$$

$$W_4(\tau, \alpha) = \frac{2(1 - \nu) \tau \sin(2\alpha)}{(1 - 2\nu)[\operatorname{ch}(2\alpha\tau) - \cos(2\alpha)]}$$

Заметим, что $W_m(\alpha, \tau) = O(\exp[-2\alpha\tau])$, $u \rightarrow +\infty$ ($m = 1, \dots, 4$) при фиксированном значении $\alpha \in (0, \pi)$.

В ядрах интегральных уравнений (2.3) выделены главные части, соответствующие накладке на упругом полупространстве (см. уравнения (1.6) [4]). При этом использовано значение интеграла

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\operatorname{cth} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi u}{2} \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} + \operatorname{th} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{th} \frac{\pi u}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi s}{2} \right] \times \\ & \times \frac{\operatorname{sh}(\pi\tau) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi s) \mathcal{H}_{iu}(tx) \mathcal{H}_{it}(tr) du ds d\tau}{[\operatorname{ch}(\pi\tau) + \operatorname{ch}(\pi u)][\operatorname{ch}(\pi s) - \operatorname{ch}(\pi u)]} = \pi t(x - r) \mathcal{H}_0(t|x - r|) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введенный в (2.2) безразмерный параметр λ характеризует относительную удаленность накладки от ребра клина; функции $K_{mn}(x, y, r, z) \rightarrow 0$ ($m, n = 1, 2$) при $\lambda \rightarrow +\infty$. Для решения системы интегральных уравнений (2.3) при относительно больших значениях λ применим регулярный асимптотический метод [3, 4], беря в нулевом приближении точное решение задачи о накладке на полупространстве (формулы (1.10) [4]). Метод основан на следующей лемме.

Лемма 1. *Функции $K_{mn}(x, y, r, z)$ ($m, n = 1, 2$) вида (2.4) непрерывны вместе со всеми своими производными при $(x, y), (r, z) \in \Omega$. При $\lambda > \max(\varepsilon, \alpha^{-1})$ функции $K_{mn}(x, y, r, z)$, $(x, y), (r, z) \in \Omega$, могут быть представлены абсолютно сходящимися рядами*

$$K_{mn}(x, y, r, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{k_l^{mn}(x, y, r, z)}{\lambda^{l+|m-n|}} \quad (m, n = 1, 2) \quad (2.7)$$

где $k_l^{mn}(x, y, r, z)$ – некоторые полиномы.

Таблица 1

2α	$-C_0^{11}$	$-C_1^{11}$	C_2^{11}	$-C_0^{12}$	$-C_0^{21}$	C_0^{22}	$-C_1^{22}$	$-C_2^{22}$
90°	0.200	0.396	0.0590	0.975	0.736	2.79	2.10	1.14
180°	1.00	-0.250	0.500	0	0	0.500	0.250	0.500
270°	0.167	$5.25 \cdot 10^{-5}$	0.120	0.0644	0.0263	0.180	0.0938	0.138

Для получения разложений (2.7) следует разложить в ряды тригонометрические функции в формулах (2.4). При этом возникают интегралы вида

$$\int_0^\infty \mathcal{H}_{it}(tx_0) \mathcal{H}_{is}(tr_0) r^j dt = \frac{j!}{\lambda^{j+1}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(\tau u) \cos(sp) dudp}{[(1+x/\lambda) \operatorname{ch} u + (1+r/\lambda) \operatorname{ch} p]^{j+1}} \quad (j = 0, 1, \dots) \quad (2.8)$$

где использовано интегральное представление модифицированной функции Бесселя. Двойной интеграл (2.8) разлагается в двойной ряд Тейлора по степеням x/λ и r/λ . Для вычисления интегральных коэффициентов в таких разложениях применяется формула 2.16.33.2 [7]. В результате получим

$$K_{mm}(x, y, r, z) = \frac{C_0^{mm}}{\lambda} + \frac{C_1^{mm} x + C_2^{mm} r}{\lambda^2} + \frac{C_3^{mm} x^2 + C_4^{mm} xr + C_5^{mm} r^2 + C_6^{mm} (z-y)^2}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \quad (m = 1, 2) \quad (2.9)$$

$$K_{mn}(x, y, r, z) = \frac{C_0^{mn}}{\lambda^2} (z-y) + \frac{C_1^{mn} x + C_2^{mn} r}{\lambda^3} (z-y) + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \quad (m \neq n)$$

Значения нескольких первых коэффициентов в разложениях (2.9) при $\nu = 0.5$ и разных углах клина 2α приведены в табл. 1.

Разыскивая теперь решение системы (2.3) с учетом (2.9) в форме

$$\tau_n(x, y) = \sum_{l=0}^\infty \frac{\tau_{nl}(x, y)}{\lambda^l} \quad (n = 1, 2) \quad (2.10)$$

и приравнявая члены при одинаковых степенях параметра λ , получим цепочку систем двух интегральных уравнений для последовательного определения функций $\tau_{nl}(x, y)$. Каждая система имеет вид

$$\int_{\Omega} \tau_{1l}(x, y) \left[\frac{1}{R} + q \frac{(r-x)^2}{R^3} \right] d\Omega_{xy} + \int_{\Omega} \tau_{2l}(x, y) q \frac{(r-x)(z-y)}{R^3} d\Omega_{xy} = F_{1l}(r, z), \quad (r, z) \in \Omega_{rz} \quad (2.11)$$

$$\int_{\Omega} \tau_{1l}(x, y) q \frac{(r-x)(z-y)}{R^3} d\Omega_{xy} + \int_{\Omega} \tau_{2l}(x, y) \left[\frac{1}{R} + q \frac{(z-y)^2}{R^3} \right] d\Omega_{xy} = F_{2l}(r, z), \quad (r, z) \in \Omega_{rz}$$

где $F_{nl}(r, z)$ – известные полиномы ($n = 1, 2; l = 0, 1, \dots$). Решение системы уравнений (2.11) при фиксированном значении l базируется на следующей лемме [4].

Лемма 2. Если наибольшая степень двух полиномов $F_{1l}(r, z)$, $F_{2l}(r, z)$ при фиксированном значении l равна j , то решение системы (2.11) представимо в виде

$$\tau_{nl}(r, z) = \frac{Q_{nl}(r, z)}{L(r, z)}, \quad L(r, z) = \left(1 - \frac{r^2}{\epsilon^2} - z^2\right)^{1/2} \quad (n = 1, 2) \quad (2.12)$$

где $Q_{nl}(r, z)$ – полиномы степени j .

Заметим, что $F_{10}(r, z) = 2\pi\delta\cos\gamma$, $F_{20}(r, z) = 2\pi\delta\sin\gamma$, а коэффициенты последующих полиномов $F_{nl}(r, z)$ ($n = 1, 2; l = 1, 2, \dots$) при каждом фиксированном значении l являются интегралами, содержащими уже определенные при помощи леммы 2 функции $\tau_{nm}(r, z)$ ($n = 1, 2, m = 0, \dots, l-1$). Для определения неизвестных коэффициентов полиномов $Q_{nl}(r, z)$ в формуле (2.12) используются формулы (1.7) [4]. В итоге, отбрасывая члены порядка λ^{-3} , получим

$$\begin{aligned} \tau_1(r, z) &= \frac{\delta}{\epsilon L(r, z)} \left[\left(T_{10} + \frac{T_{11}}{\lambda} \right) \cos\gamma + \frac{(T_{12} + T_{13}r) \cos\gamma + T_{14}z \sin\gamma}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right] \\ \tau_2(r, z) &= \frac{\delta}{\epsilon L(r, z)} \left[\left(T_{20} + \frac{T_{21}}{\lambda} \right) \sin\gamma + \frac{(T_{22} + T_{23}r) \sin\gamma + T_{24}z \cos\gamma}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$T_{10} = \frac{1}{D_0}, \quad T_{20} = \frac{1}{D_1}, \quad D_0 = S_{00} + q\epsilon^2 S_{01}, \quad D_1 = S_{00} + qS_{10}$$

$$T_{11} = -\frac{C_0^{11}}{D_0} T_{10}, \quad T_{12} = -\frac{C_0^{11}}{D_0} T_{11}, \quad T_{21} = -\frac{C_0^{22}}{D_1} T_{20}, \quad T_{22} = -\frac{C_0^{22}}{D_1} T_{21}$$

$$T_{13} = \frac{1}{\epsilon^2 D_0 D_2} \{ C_0^{21} q (3\epsilon^2 S_{11} - S_{10}) - C_2^{11} [S_{10} + q(2S_{20} - \epsilon^2 S_{11} - S_{10})] \}$$

$$T_{24} = \frac{1}{D_0 D_2} \{ C_0^{11} q (3S_{11} - S_{01}) - C_0^{21} [S_{01} + q(2\epsilon^2 S_{02} - S_{11} - S_{01})] \}$$

$$D_2 = [S_{01} + q(2\epsilon^2 S_{02} - S_{11} - S_{01})][S_{10} + q(2S_{20} - \epsilon^2 S_{11} - S_{10})] - q^2(3S_{11} - S_{01})(3\epsilon^2 S_{11} - S_{10}) \quad (2.14)$$

$$T_{14} = \frac{1}{(1+q)D_1 D_3} [C_2^{22} q(3S_{11} - S_{01}) - C_0^{12}(S_{01} + 3qS_{11})]$$

$$T_{23} = \frac{1}{\epsilon^2(1+q)D_1 D_3} [C_0^{12} q(3\epsilon^2 S_{11} - S_{10}) - C_2^{22}(S_{10} + 3q\epsilon^2 S_{11})]$$

$$D_3 = (1-q)S_{01}S_{10} + 3q(\epsilon^2 S_{01} + S_{10})S_{11}$$

$$S_{mn} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m}\psi \sin^{2n}\psi d\psi}{(1 - e^2 \sin^2\psi)^{m+n+1/2}} \quad (e^2 = 1 - \epsilon^2) \quad (2.15)$$

Интегралы (2.15) могут быть выражены через полные эллиптические интегралы $\mathcal{K}(e)$ и $E(e)$:

$$\begin{aligned} S_{00} &= \mathcal{K}(e), \quad S_{10} = \frac{\mathcal{K}(e) - E(e)}{e^2}, \quad S_{01} = \frac{E(e) - (1 - e^2)\mathcal{K}(e)}{e^2(1 - e^2)} \\ S_{20} &= \frac{-2(1 + e^2)E(e) + (2 + e^2)\mathcal{K}(e)}{3e^4} \\ S_{11} &= \frac{(2 - e^2)E(e) - 2(1 - e^2)\mathcal{K}(e)}{3e^4(1 - e^2)} \\ S_{02} &= \frac{-2(1 - 2e^2)E(e) + (2 - 5e^2 + 3e^4)\mathcal{K}(e)}{3e^4(1 - e^2)^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Связь между силой P , приложенной к накладке, и ее перемещением δ , а также соотношение между углами β и γ находятся из условий равновесия

$$\int_{\Omega} \tau_1(x, y) d\Omega_{xy} = P \cos \beta, \quad \int_{\Omega} \tau_2(x, y) d\Omega_{xy} = P \sin \beta \quad (2.17)$$

которые для решения (2.13) принимают вид

$$\begin{aligned} 2\pi\delta \left[T_{10} + \frac{T_{11}}{\lambda} + \frac{T_{12}}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right] \cos \gamma &= P \cos \beta \\ 2\pi\delta \left[T_{20} + \frac{T_{21}}{\lambda} + \frac{T_{22}}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right] \sin \gamma &= P \sin \beta \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отсюда найдем

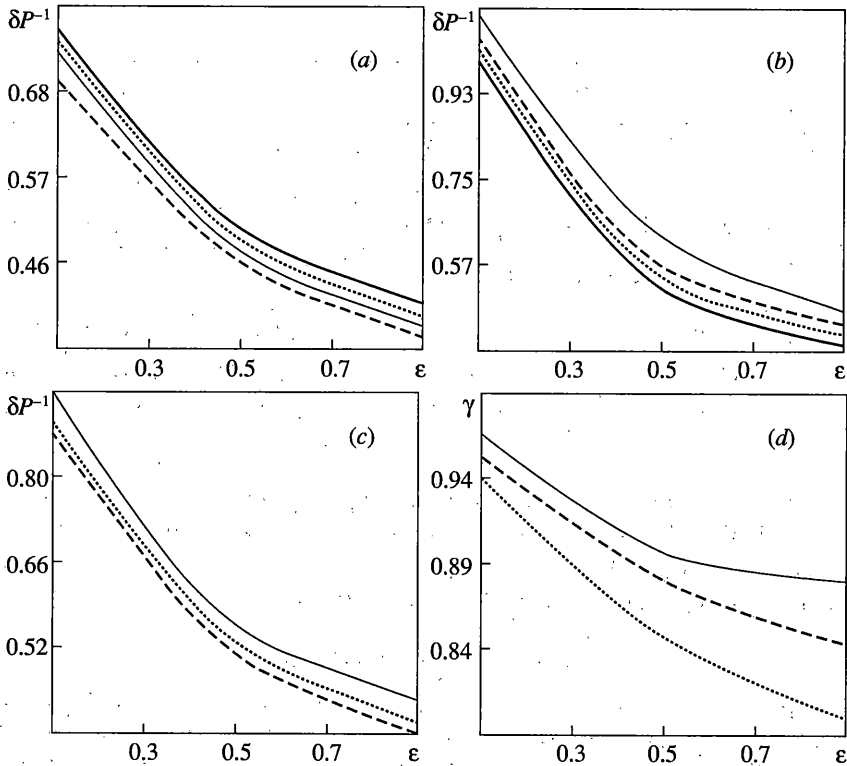
$$\begin{aligned} \delta &= \frac{P}{2\pi} \left(\left[T_{10} + \frac{T_{11}}{\lambda} + \frac{T_{12}}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right]^2 \cos^2 \gamma + \left[T_{20} + \frac{T_{21}}{\lambda} + \frac{T_{22}}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right]^2 \sin^2 \gamma \right)^{-1/2} \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{T_{10} + T_{11}\lambda^{-1} + T_{12}\lambda^{-2} + O(\lambda^{-3})}{T_{20} + T_{21}\lambda^{-1} + T_{22}\lambda^{-2} + O(\lambda^{-3})} \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для оценки границ применимости по λ решения (2.13)–(2.16), (2.19) возможно использование метода Бубнова–Галеркина [9], востребованного для этих целей в [10] при решении уравнения, аналогичного уравнениям (2.3). Отметим, что метод Бубнова–Галеркина применим также для прямоугольных, полуэллиптических и других накладок.

Расчеты по формулам (2.13)–(2.16), (2.19) произведены для несжимаемого материала ($\nu = 0.5$) и $\lambda = 6$. Графики зависимости δP^{-1} от ϵ показаны на фиг. 2, *a* ($\beta = \gamma = 0$), фиг. 2, *b* ($\beta = \gamma = \pi/2$) и фиг. 2, *c* ($\beta = \pi/4$). На фиг. 2, *d* даны графики зависимости γ от ϵ при $\beta = \pi/4$. Сплошные линии 1 отвечают значению $2\alpha = \pi/2$, штриховые 2 – $2\alpha = \pi$, пунктирные 3 – $2\alpha = 3\pi/2$. Для сравнения на фиг. 2, *a, b* жирными линиями даны соответствующие графики для предельных случаев $\lambda = \infty$.

Для объяснения результатов рассмотрим решение (1.2)–(1.4) краевой задачи (1.1) при $\nu = 0.5$, $x = y = T_z = 0$. Тогда, используя интеграл 2.16.14.4 [7], имеем

$$u_r(r, \alpha, z) = \frac{T_r \cos^2 \alpha}{2G2\alpha + \sin(2\alpha)} \frac{2r^2 + z^2}{R_0^3}, \quad R_0 = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (2.20)$$



Фиг. 2

Отсюда видно, что минимальное значение $u_z(r, \alpha, z)$ достигается при $2\alpha = \pi$ (полупространство), что объясняет нижнюю штриховую линию на фиг. 2, *a* (сдвиг накладки перпендикулярно ребру клина). При $\nu = 0.5, r = y = T_z = 0$ аналогично получим

$$u_z(0, \alpha, z) = \frac{T_z}{4G\alpha} \frac{z^2 + 2z^2}{R_1^3}, \quad R_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (2.21)$$

то есть, чем меньше α , тем больше $u_z(0, \alpha, z)$. Поэтому на фиг. 2, *b* (сдвиг накладки параллельно ребру) значения δP^{-1} возрастают с уменьшением угла клина. Известно [4], что при $\lambda = \infty$ для углов γ и β справедливо неравенство $\gamma \geq \beta$. Это неравенство остается в силе и для случаев, отраженных на фиг. 2, *d*. Чем ближе накладки друг к другу (чем меньше λ), тем большее усилие P требуется для смещения накладок на заданную величину δ перпендикулярно ребру; для смещения вдоль ребра, наоборот, требуется меньшее усилие. Круглые накладки ($\epsilon \rightarrow 1$) сдвинуть труднее, чем имеющие большой эксцентриситет.

В табл. 2 для разных углов клина 2α приведены значения коэффициентов интенсивности контактных напряжений $s_{\pm} = \lim(1 \pm r/\epsilon)^{1/2} \tau_1(r, 0) \delta^{-1}, r \rightarrow \mp \epsilon \pm 0$ и $s_0 = \lim(1-z)^{1/2} \tau_2(0, z) \delta^{-1}, z \rightarrow 1 - 0$. Как видно из этой таблицы, при сдвиге накладок перпендикулярно ребру упругого четвертьпространства ($2\alpha = \pi/2, \lambda = 6$) коэффициент при корневой особенности касательного контактного напряжения τ_{φ} немного меньше на той стороне накладки, которая ближе к ребру ($s_+ < s_-$). Противоположная ситуация имеет место для

Таблица 2

	$2\alpha = \pi/2, \lambda = 6$			$2\alpha = \pi, \lambda = 6$		
s_+	1.519	0.467	0.323	1.567	0.493	0.347
s_-	1.521	0.469	0.325	1.563	0.487	0.338
s_0	1.030	0.365	0.266	1.090	0.404	0.304
	$2\alpha = 3\pi/2, \lambda = 6$			$\lambda = \infty$		
s_+	1.519	0.468	0.324	1.509	0.463	0.319
s_-	1.518	0.467	0.322	1.509	0.463	0.319
s_0	1.099	0.410	0.310	1.104	0.414	0.314

упругого полупространства и трех четвертей пространства. Заметим также, что в случае $\beta = \gamma = 0$ для поперечного движения контактного касательного напряжения $\tau_{\varphi z}$ справедлива оценка $\tau_{\varphi z} = O(\tau_{r\varphi}/\lambda^2)$, $\lambda \rightarrow +\infty$.

Работа поддержана грантом Фонда Гумбольдта (Германия).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 58–62.
2. Пожарский Д.А. О трехмерной контактной задаче для упругого клина при учете сил трения // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 151–159.
3. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. Three-dimensional contact problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.
4. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 222 с.
5. Соловьев А.С. Об одном интегральном уравнении и его приложениях к контактным задачам теории упругости с учетом сил трения и сцепления // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 1042–1050.
6. Александров В.М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
8. Nahn H.G. Elastizitätstheorie. Stuttgart: Teubner, 1985. = Хан Х.Г. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
9. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 464 с.
10. Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Равновесие упругого слоя, ослабленного плоскими трещинами // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 1030–1038.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
21.05.2002