

УДК 539.3

© 2004 г. В.И. ОСТРИК, А.Ф. УЛИТКО

КОНТАКТ ДВУХ УПРУГИХ КОНУСОВ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

Рассматривается осесимметричная задача о фрикционном контакте двух упругих конусов. Предполагается, что до нагружения конусы соприкасаются своими вершинами. После нагружения поверхности конусов входят в контакт вблизи их общей вершины. Полученное интегральное уравнение на полуоси с разностным ядром решено точно путем сведения его к краевой задаче Римана для аналитических функций. Найдено явное выражение для контактных напряжений.

Аналогичная задача о фрикционном контакте двух упругих клиньев в случае плоской деформации изучена в работе [1].

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. Пусть два упругих конуса с полууглами в осевом сечении α_1 и α_2 , оси которых совпадают, касаются друг друга своими вершинами (фиг. 1). Конусы сжимаются под действием напряжений, приложенных на бесконечности, с главным вектором P , направленным к вершине конуса, и главным моментом, равным нулю, для каждого конуса. При таком нагружении конусы деформируются и их поверхности входят в контакт вблизи их общей вершины. Будем считать, что силы трения, возникающие в области контакта, следуют закону Амонтона (Кулона). Радиальный размер области контакта заранее неизвестен и может быть определен в процессе решения задачи. Для того, чтобы не выходить за рамки линейной теории упругости, будем также считать угол между конусами $\varepsilon = \pi - \alpha_1 - \alpha_2$ достаточно малым. Пусть, для определенности, $0 < \alpha_1 < \pi/2 - \varepsilon$, тогда $\alpha_2 > \pi/2$.

Для каждого конуса введем местную сферическую систему координат. Область k -го конуса зададим неравенствами $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta_k \leq \alpha_k$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ ($k = 1, 2$). Граничные условия на поверхностях конусов в области контакта ($0 \leq r \leq l$, l — радиальный размер области контакта) и вне ее ($r > l$) запишем в виде

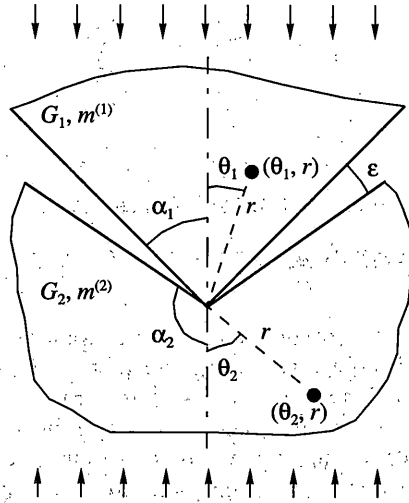
$$u_{\theta}^{(1)} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1} + u_{\theta}^{(2)} \Big|_{\theta_2 = \alpha_2} = \varepsilon r \quad (0 \leq r \leq l) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\theta}^{(1)} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1} = \sigma_{\theta}^{(2)} \Big|_{\theta_2 = \alpha_2} \quad (0 \leq r \leq l) \quad (1.2)$$

$$\tau_{r\theta}^{(k)} \Big|_{\theta_k = \alpha_k} = (-1)^k \mu_0 \sigma_{\theta}^{(k)} \Big|_{\theta_k = \alpha_k} \quad (k = 1, 2) \quad (0 \leq r \leq l) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{\theta}^{(k)} \Big|_{\theta_k = \alpha_k} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(k)} \Big|_{\theta_k = \alpha_k} = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (r > l) \quad (1.4)$$

где $u_{\theta}^{(k)}$ — нормальные перемещения, $\sigma_{\theta}^{(k)}$ и $\tau_{r\theta}^{(k)}$ — нормальные и касательные напряжения в k -ом конусе ($k = 1, 2$), μ_0 — коэффициент трения. Знак при μ_0 в граничном условии (1.3) выбран в предположении, что в области контакта поверхность первого ко-



Фиг. 1

нуса скользит относительно поверхности второго конуса в направлении к их общей вершине, т.е. радиальные перемещения находятся в следующем соотношении:

$$u_r^{(1)} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1} < u_r^{(2)} \Big|_{\theta_2 = \alpha_2} \quad (0 < r \leq l) \quad (1.5)$$

Выполнение условия (1.5) на радиальные перемещения необходимо будет проверить после нахождения решения задачи.

В результате нагружения в конусах устанавливается осесимметричное напряженное состояние. Общее решение уравнений равновесия, при условии, что нормальные $\sigma_\theta^{(k)}$ и касательные $\tau_{r\theta}^{(k)}$ напряжения на всей поверхности каждого конуса связаны равенствами (1.2), (1.3), получим с помощью интегрального преобразования Меллина. Характеристики упругого поля определяются интегралами Римана–Меллина с одной неизвестной плотностью $a(s)$, являющейся изображением функции нормальных напряжений $\sigma_\theta^{(k)} / (2G_1)$ при $\theta_k = \alpha_k$. В точках поверхностей $\theta_k = \alpha_k$ упругих конусов будем иметь:

$$u_\theta^{(k)} \Big|_{\theta_k = \alpha_k} = m_1^{(1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda^{(k)}(s)}{(s-1)\Delta_k(s)} a(s) r^{-s} ds$$

$$u_r^{(k)} \Big|_{\theta_k = \alpha_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda_1^{(k)}(s)}{(s-1)\Delta_k(s)} a(s) r^{-s} ds \quad (1.6)$$

$$\frac{\sigma_\theta^{(k)}}{2G_1} \Big|_{\theta_k = \alpha_k} = \frac{(-1)^k \tau_{r\theta}^{(k)}}{\mu_0 2G_1} \Big|_{\theta_k = \alpha_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds \quad (\gamma < c < 0)$$

$$\lambda^{(k)}(s) = m_1^{(k)} G_1 (m_1^{(1)} G_k)^{-1} (s+1) \operatorname{cosec} \alpha_k [P_{s-1}(\cos \alpha_k) - \cos \alpha_k P_{s-2}(\cos \alpha_k)] \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times [P_{s+1}(\cos \alpha_k) - \cos \alpha_k P_s(\cos \alpha_k)] - (-1)^k \mu_0 G_1 (m_1^{(1)} G_k)^{-1} \{ (s^2 - 2s - m_2^{(k)}) \cos \alpha_k \times \\
 & \times [P_{s-1}(\cos \alpha_k)]^2 - [m_2^{(k)}(s-1) + (s-2 - m_2^{(k)})(2s-1) \cos^2 \alpha_k] P_{s-1}(\cos \alpha_k) P_{s-2}(\cos \alpha_k) + \\
 & + (s-2 - m_2^{(k)})(s-1) \cos \alpha_k [P_{s-2}(\cos \alpha_k)]^2 \} \\
 \lambda_1^{(k)}(s) = & G_1 G_k^{-1} s(s+1 + 2m_2^{(k)}) \cos \alpha_k [P_{s-1}(\cos \alpha_k)]^2 - [(2s-1)(s + m_1^{(k)}) \cos^2 \alpha_k + \\
 & + m_2^{(k)} s] P_{s-1}(\cos \alpha_k) P_{s-2}(\cos \alpha_k) + (s-1)(s + m_1^{(k)}) \cos \alpha_k [P_{s-2}(\cos \alpha_k)]^2 - \\
 & - (-1)^k \mu_0 G_1 G_k^{-1} \{ (s+1 + 2m_2^{(k)}) \operatorname{ctg} \alpha_k \cos \alpha_k [P_{s-1}(\cos \alpha_k)]^2 + [(m_1^{(k)} + 1)(2s-1) \sin \alpha_k - \\
 & - 2(s + m_2^{(k)}) \operatorname{cosec} \alpha_k] \cos \alpha_k P_{s-1}(\cos \alpha_k) P_{s-2}(\cos \alpha_k) + (s-1)(\operatorname{ctg}^2 \alpha_k - m_1^{(k)}) \sin \alpha_k \times \\
 & \times [P_{s-2}(\cos \alpha_k)]^2 \} \\
 \Delta_k(s) = & [s(s-1) - m_1^{(k)} \operatorname{ctg}^2 \alpha_k] \cos \alpha_k [P_{s-1}(\cos \alpha_k)]^2 + [s - (2s-1)s \cos^2 \alpha_k + 2m_1^{(k)} \times \\
 & \times \operatorname{ctg}^2 \alpha_k] P_{s-1}(\cos \alpha_k) P_{s-2}(\cos \alpha_k) + [s(s-1) - m_1^{(k)} \operatorname{cosec}^2 \alpha_k] \cos \alpha_k [P_{s-2}(\cos \alpha_k)]^2 \\
 m_1^{(k)} = & 2(m^{(k)} - 1)/m^{(k)}, \quad m_2^{(k)} = (m^{(k)} - 2)/m^{(k)} \quad (k = 1, 2)
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Здесь $m^{(k)}$ – число Пуассона, G_k – модуль сдвига k -го конуса, $P_s(\cos \alpha_k)$ – функция Лежандра первого рода. Пределы изменения параметра s в формулах (1.6) определяются условием существования интегралов для изображений Меллина компонент вектора перемещений и тензора напряжений, исходя из их поведения на бесконечности и в вершинах конусов. Нижняя граница γ ($-1 < \gamma < -2/3$) интервала возможных значений параметра s есть наименьший по модулю (действительный) корень из полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$ характеристического уравнения $\Delta_2(s) = 0$ первой краевой задачи для конуса ($\pi/2 < \alpha_2 < \pi$) [2].

Размер l области контакта определяется условием равновесия

$$2\pi \int_0^l (\sin \beta(r) + \mu_0 \cos \beta(r)) \sigma_\theta^{(1)} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1} r dr = -P, \quad \beta(r) = \alpha_1 + \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1} \tag{1.8}$$

2. Интегральное уравнение задачи и его решение. Подставим в граничное условие (1.1) выражения для нормальных перемещений из (1.6). После дифференцирования полученного равенства будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(s) a(s) r^{-s-1} ds = -\varepsilon \quad (0 \leq r \leq l) \tag{2.1}$$

$$M(s) = \frac{m_1^{(1)} s \lambda(s)}{(s-1)\Delta(s)}, \quad \lambda(s) = \lambda^{(1)}(s)\Delta_2(s) + \lambda^{(2)}(s)\Delta_1(s), \quad \Delta(s) = \Delta_1(s)\Delta_2(s) \tag{2.2}$$

Обращая третье соотношение (1.6) с учетом условий (1.4), выразим плотность $a(s)$ через нормальные контактные напряжения:

$$a(s) = \int_0^l \sigma(y) y^s dy, \quad \sigma(r) = \frac{\sigma_\theta^{(1)}}{2G_1} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1} \quad (0 \leq r \leq l) \tag{2.3}$$

Подставим выражение для $a(s)$ из (2.3) в уравнение (2.1), возьмем $s = -it$ и изменим порядок интегрирования. После замены переменных

$$r = le^{-\xi}, \quad y = le^{-\eta} \tag{2.4}$$

и введения новой неизвестной функции

$$\varphi(\eta) = \sigma(le^{-\eta})e^{-\eta} \tag{2.5}$$

получим интегральное уравнение на полуоси с разностным ядром

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta = -\varepsilon e^{-\xi} \quad (0 \leq \xi < \infty) \tag{2.6}$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(-i\tau)e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau \tag{2.7}$$

При этом, ввиду того, что функция $M(-i\tau)$ не имеет полюсов в полосе $\gamma < \text{Im} \tau \leq 0$, контур интегрирования $\tau + ic$ ($-\infty < \tau < \infty$) в интеграле (2.7), представляющем ядро $k(\xi - \eta)$, смещен на действительную ось.

Для сведения интегрального уравнения (2.6) к краевой задаче Римана, распространим его на всю числовую ось и применим к нему интегральное преобразование Фурье. Введем в рассмотрение функции комплексной переменной z :

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi)e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{m_1^{(1)}\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta \tag{2.8}$$

аналитические соответственно в верхней ($\text{Im} z \geq 0$) и нижней ($\text{Im} z \leq 0$) полуплоскостях. Используя выражение (2.7) для ядра $k(\xi - \eta)$ и теорему о свертке для интегрального преобразования Фурье, приходим к краевой задаче Римана [3] для аналитических функций (2.8):

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (\text{Im} t = 0, -\infty < t < \infty) \tag{2.9}$$

$$G(t) = \frac{m_1^{(1)}}{M(-it)}, \quad g(t) = \frac{1}{4} A \sqrt{2\pi} \frac{G(t)}{1-it}, \quad A = \frac{2\varepsilon}{\pi m_1^{(1)}}$$

Коэффициент $G(t)$, определяемый выражениями (2.9), (2.2), (1.7), не имеет нулей и полюсов на действительной оси.

Нули и полюсы функции $G(z)$ (за исключением нуля $z = i$) являются корнями уравнений $\Delta(-iz) = 0$ и $\lambda(-iz) = 0$. Используя равенство $P_s(\cos \alpha) = P_{-s-1}(\cos \alpha)$, можно показать, что функции $\Delta_k(s)$ ($k = 1, 2$) удовлетворяют функциональному уравнению

$$\frac{\Delta_k(1-s)}{(1-s)^2} = \frac{\Delta_k(s)}{s^2} \quad (k = 1, 2) \tag{2.10}$$

из которого следует, что $s = 0$ — четырехкратный нуль функции $\Delta(s) = \Delta_1(s)\Delta_2(s)$ ($\Delta(1) \neq 0$). Для функций $\lambda^{(k)}(s)$ ($k = 1, 2$) $s = 0$ является простым нулем и, следовательно, трехкратным нулем для функции $\lambda(s)$. Из соотношения (2.10) также вытекает, что на комплексной плоскости корни уравнения $\Delta(s) = 0$ расположены симметрично относительно точки $s = 1$.

Уравнения $\Delta_k(s) = 0$ ($k = 1, 2$), кроме двукратного действительного корня $s = 0$, имеют счетные множества простых комплексных корней вида $s = \sigma \pm i\tau$, $s = 1 - \sigma \pm i\tau$ ($\sigma > 2$, $\tau > 0$). Кроме того, уравнение $\Delta_1(s) = 0$ имеет четное число действительных корней в полуплоскости $\text{Re}s < 0$ при $\alpha_0 < \alpha_1 < \pi/2$ ($\alpha_0 \approx 5\pi/12$, а именно: $\alpha_0 = 76^\circ$ при $m^{(1)} = 3$, $\alpha_0 = 73.5^\circ$ при $m^{(1)} = 2$), а уравнение $\Delta_2(s) = 0$ ($\pi/2 < \alpha_2 < \pi$) – нечетное число действительных корней в указанной полуплоскости. В полосе $-1 \leq \text{Re}s < 0$ не содержится ни одного корня уравнения $\Delta_1(s) = 0$ и один действительный корень $s = \gamma$ ($-1 < \gamma < -2/3$) уравнения $\Delta_2(s) = 0$. Корни уравнений $\Delta_k(s) = 0$, за исключением корня $s = 1 - \gamma$, из I квадранта, включая действительную положительную полуось ($\text{Re}s > 0$, $\text{Im}s \geq 0$), обозначим $iz_n^{(k)}$ ($k = 1, 2$; $n = 1, 2, \dots$). Они имеют следующее асимптотическое поведение [2]:

$$z_n^{(k)} = \frac{\pi i}{\alpha_k} n + \frac{i}{2} - \frac{1}{2\alpha_k} \ln \left(\frac{2\pi n}{\alpha_k} \sin 2\alpha_k \right) + o(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

Уравнение $\lambda(s) = 0$, кроме трехкратного корня $s = 0$, имеет конечное множество простых действительных корней и счетное множество простых комплексных корней вида $s = \sigma \pm i\tau$. В полосе $-1 < \text{Re}s < 0$ имеется один (действительный) корень уравнения $\lambda(s) = 0$, если $G_1/G_2 \neq 0$. Если же $G_1/G_2 = 0$, то в указанной полосе не содержится ни одного из корней этого уравнения. Значение $s = -1$, не являющееся корнем уравнения $\lambda(s) = 0$ при $G_1 \neq G_2$, становится простым корнем в случае $G_1 = G_2$. Для обоснования последнего утверждения приведем следующие значения:

$$\lambda^{(k)}(-1) = (-1)^{k+1} \mu_0 \frac{G_1 m^{(k)} + 1}{G_k 2(m^{(k)} - 1)} \sin^2 \alpha_k \cos \alpha_k$$

$$\Delta_k(-1) = \frac{m^{(k)} + 1}{2m^{(k)}} \sin^2 \alpha_k \cos \alpha_k \quad (k = 1, 2) \quad (2.12)$$

$$\lambda(-1) = \frac{1}{4} \mu_0 \frac{m^{(1)} + 1}{m^{(1)} - 1} \frac{m^{(2)} + 1}{m^{(2)}} \left(1 - \frac{G_1}{G_2} \right) \sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 \cos \alpha_2$$

Вместе с тем $s = -1$ не является корнем уравнения $\Delta(s) = 0$.

Корни уравнения $\lambda(s) = 0$ разобьем на два счетных множества. Корни первого множества (все они комплексные) из II квадранта комплексной плоскости, включая отрицательную действительную полуось, обозначим $s_n^{(1)}$ ($n = 1, 2, \dots$), ($\text{Re}s_n^{(1)} < 0$, $\text{Im}s_n^{(1)} \geq 0$), а корни этого множества из I квадранта, включая положительную действительную полуось, обозначим $s_n^{\prime(1)}$ ($n = 1, 2, \dots$), ($\text{Re}s_n^{\prime(1)} > 0$, $\text{Im}s_n^{\prime(1)} \geq 0$). Асимптотическое поведение корней этого множества следующее:

$$s_n^{(1)} = -\frac{\pi}{\alpha_1} n + \frac{1}{2} + \frac{i}{2\alpha_1} \ln q_1 n + o(1), \quad s_n^{\prime(1)} = \frac{\pi}{\alpha_1} n + \frac{1}{2} + \frac{i}{2\alpha_1} \ln q_1 n + o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

$$q_1 = \frac{\pi}{\alpha_1 \kappa + 1 + i\mu_0(m_2^{(1)}/m_1^{(1)} - \kappa m_2^{(2)}/m_1^{(2)})} \frac{q_0 \sin 2\alpha_1}{\alpha_1 \kappa + 1 + i\mu_0(m_2^{(1)}/m_1^{(1)} - \kappa m_2^{(2)}/m_1^{(2)})} \quad (2.13)$$

$$q_0 = 2\kappa - i\mu_0 \left(\frac{m^{(1)}}{m^{(1)} - 1} + \kappa \frac{m^{(2)} - 2}{m^{(2)} - 1} \right), \quad \kappa = \frac{G_1 m_1^{(2)}}{G_2 m_1^{(1)}}$$

Корни второго множества, в которое входят все действительные корни, из II квадранта комплексной плоскости, включая отрицательную действительную полуось, обозначим $s_n^{(2)}$ ($n = 1, 2, \dots$), ($\text{Re}s_n^{(2)} < 0, \text{Im}s_n^{(2)} \geq 0$), причем $\text{Im}s_n^{(2)} = 0$ при $n = 1, 2, \dots, 2N + 1$ (действительные корни) и $\text{Im}s_n^{(2)} > 0$ при $n = 2N + 2, \dots$ (комплексные корни). Корни из I квадранта, включая положительную действительную полуось, обозначим $s_n^{(1)}$ ($\text{Re}s_n^{(1)} > 0, \text{Im}s_n^{(1)} \geq 0$); для них $\text{Im}s_n^{(1)} = 0$ при $n = 1, 2, \dots, 2N'$ и $\text{Im}s_n^{(1)} > 0$ при $n = 2N' + 1, \dots$. Асимптотическое поведение корней второго множества следующее:

$$\begin{aligned} s_n^{(2)} &= -\frac{\pi}{\alpha_2} \left(n - N - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} + \frac{i}{2\alpha_2} \ln q_2 (n - N - 1) + o(1) \\ s_n^{(1)} &= \frac{\pi}{\alpha_2} \left(n - N' - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} + \frac{i}{2\alpha_2} \ln q_2 (n - N' - 1/2) + o(1), \quad n \rightarrow \infty \\ q_2 &= \frac{2\pi \mu_0 (\kappa + 1)}{\alpha_2 m_1^{(1)} q_0} \sin 2\alpha_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для решения краевой задачи (2.9) требуется факторизовать функцию $G(z)$, т.е. представить ее в виде

$$G(z) = X^+(z)/X^-(z) \quad (2.15)$$

где $X^+(z)$ и $X^-(z)$ – функции, аналитические и не обращающиеся в нуль соответственно в верхней ($\text{Im}z \geq 0$) и нижней ($\text{Im}z \leq 0$) полуплоскостях. Осуществляя разложение функции $G(z)$ в бесконечное произведение и выделяя из него множители с нулями и полюсами из верхней полуплоскости, получим функцию

$$X^-(z) = \frac{1}{z-i} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{s_n'} \right) \left(1 - \frac{z}{z_n} \right)^{-1} \quad (2.16)$$

где s_n' и $-iz_n$ ($n = 1, 2, \dots$) – соответственно корни уравнений $\lambda(s) = 0$ и $\Delta(s) = 0$ из полуплоскости $\text{Re}s > 0$. Асимптотическая оценка функции $X^-(z)$ получена в работе [4] и имеет вид

$$\begin{aligned} X^-(z) &= O(|z|^p), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\text{Im}z \leq 0) \\ p &= \frac{1}{\pi} \arctg \frac{G_1 m_1^{(2)} + G_2 m_1^{(1)}}{\mu_0 (G_1 m_2^{(2)} - G_2 m_2^{(1)})} \quad (0 < p < 1) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Решение краевой задачи (2.9) при условии, что функция $\Phi^+(z)$ из (2.8) исчезает на бесконечности, а функция $X^-(z)$ имеет оценку (2.17), получаем, используя [3], в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{\sqrt{2\pi} Ai X^+(z)}{4X^-(-i) z + i} \quad (\text{Im}z \geq 0) \quad (2.18)$$

Обращая первое соотношение (2.8) и учитывая выражения (2.18), (2.15), находим решение интегрального уравнения (2.6):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-i\xi t} dt = \frac{Ai}{4X^-(-i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(t) X^-(t)}{t+i} e^{-i\xi t} dt \quad (2.19)$$

Сходимость последнего интеграла обеспечивается оценкой (2.17).

3. Распределение контактных напряжений. Результаты вычислений. Подынтегральная функция в формуле (2.19) имеет полюсы $t = -i$, $t = is_k$ ($k = 1, 2, \dots$) в нижней полуплоскости. На основании выражений (2.12) заключаем, что полюс $t = -i$ является простым при $G_1 \neq G_2$ и двукратным при $G_1 = G_2$. Полюсы $t = is_k$ ($k = 1, 2, \dots$) – простые. Вычисляя интеграл (2.19) по теории вычетов и переходя к функции $\sigma(r)$ (2.3) с помощью замен (2.5), (2.4), определяем нормальные контактные напряжения

$$\frac{\sigma_\theta^{(1)}}{A2G_1} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi m_1^{(1)}}{2\mu_0} \frac{1}{1 - G_1/G_2}, \quad G_1 \neq G_2 \\ \mu_1 \ln \frac{r}{l} + \mu_2, \quad (G_1 = G_2) \end{array} \right\} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s_k - 1)\Delta(s_k)}{s_k(s_k + 1)\lambda'(s_k)} \frac{X^-(is_k)}{X^-(-i)} \left(\frac{r}{l}\right)^{-s_k - 1} \quad (3.1)$$

$$\mu_1 = \frac{\pi i}{2} (t+i)G(t) \Big|_{t=-i}, \quad \mu_2 = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{d}{dt} + \frac{X^-(-i)}{X^-(-i)} \right) (t+i)G(t) \right] \Big|_{t=-i}$$

Касательные контактные напряжения $\tau_{r\theta}^{(1)} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1}$ пропорциональны нормальным $\sigma_\theta^{(1)} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1}$ и определяются равенством (1.3).

Найденное распределение контактных напряжений (3.1) позволяет сделать вывод о том, что контактные напряжения в случае $G_1/G_2 \neq 0$ неограничены в окрестности вершины конусов и имеют при этом степенную особенность вида $r^{-\rho}$, где $\rho = s_1 + 1$ (s_1 – наименьший по модулю корень уравнения $\lambda(s) = 0$ из полуплоскости $\text{Res} < 0$, $0 < \rho < 1$). В случае же $G_1/G_2 = 0$, когда второй конус является абсолютно жестким, $s_1 < -1$, контактные напряжения ограничены и в вершине конусов принимают конечное значение

$$\sigma_\theta^{(1)} \Big|_{\theta_1 = \alpha_1, r=0} = -2G_1 \varepsilon / \mu_0 \quad (3.2)$$

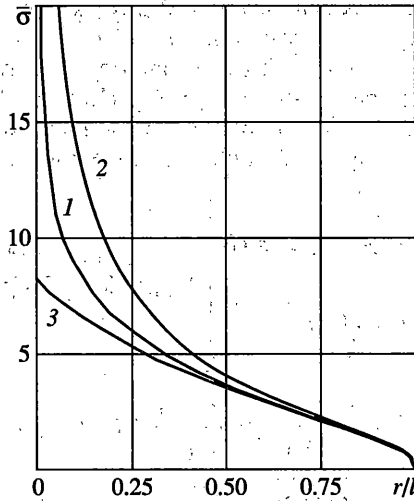
При отсутствии трения ($\mu_0 = 0$) в случае $G_1/G_2 = 0$ функция $\lambda(s)$ имеет простой нуль $s = -1$, подынтегральная функция из формулы (2.19) – двукратный полюс в точке $t = -i$, и контактные напряжения становятся неограниченными в вершине конусов, имея при этом логарифмическую особенность.

Как отмечалось при постановке задачи, выбор знака при коэффициенте трения μ_0 в граничном условии (1.3) должен быть подтвержден соотношением (1.5) для радиальных перемещений точек поверхностей конусов в области контакта. Для этого найдем радиальные перемещения $u_r^{(j)} \Big|_{\theta_j = \alpha_j}$ ($j = 1, 2$). Подставляя выражение для $a(s)$ из (2.3) во второе выражение (1.6), производя замены $s = -it$, (2.4), (2.5) и меняя порядок интегрирования, имеем

$$u_r^{(j)} \Big|_{\theta_j = \alpha_j} = \frac{l}{i\sqrt{2\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda_1^{(j)} \Phi^+(is)}{(s-1)\Delta_j(s)} e^{s\varepsilon} ds = \frac{Al}{4i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda_1(s)\Delta_{3-j}(s)X^-(is)}{s(s+1)\lambda(s)X^-(-i)} \left(\frac{r}{l}\right)^{-s} ds \quad (j = 1, 2)$$

Вычисляя последний интеграл с помощью вычетов, находим выражение для радиальных перемещений в области контакта

$$\frac{u_r^{(j)}}{A} \Big|_{\theta_j = \alpha_j} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{m_1^{(1)} m^{(j)}}{m^{(j)} + 1} \frac{G_{3-j}}{G_2 - G_1} \left[m_2^{(j)} + (-1)^j \mu_0 \left(\frac{1}{2} m_1^{(j)} \text{tg} \alpha_j - \text{ctg} \alpha_j \right) \right], \quad G_1 \neq G_2 \\ \mu_1^{(j)} r \ln \frac{r}{l} + \mu_2^{(j)} r, \quad G_1 = G_2 \end{array} \right\} +$$



Фиг. 2

$$+ \frac{\pi l}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{(j)}(s_k) \Delta_{3-j}(s_k) X^-(is_k)}{s_k(s_k+1)\lambda'(s_k) X^-(-i)} \left(\frac{r}{l}\right)^{-s_k} \quad (0 \leq r \leq l) \quad (j = 1, 2) \quad (3.3)$$

$$\mu_1^{(j)} = \frac{\pi \lambda_1^{(j)}(-1) \Delta_{3-j}(-1)}{2 \lambda'(-1)}, \quad \mu_2^{(j)} = \mu_1^{(j)} \frac{X^-(-i)}{i X^-(-i)} + \frac{\pi d}{2 ds} \left(\frac{(s+1) \lambda_1^{(j)}(s) \Delta_{3-j}(s)}{s \lambda(s)} \right) \Big|_{s=-1}$$

В каждом конкретном примере при расчете контактных напряжений (3.1) необходимо проверить, что в зоне контакта выполняется условие (1.5) на радиальные перемещения (3.3).

Результаты вычислений контактных напряжений по формуле (3.1) в случае, когда полууглы в осевых сечениях конусов $\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = 7\pi/9$, а числа Пуассона материалов конусов $m^{(1)} = m^{(2)} = 3$, представлены на фиг. 2. Графики построены для величины $\bar{\sigma} = -(\pi \sigma_{\theta}^{(1)}) / \epsilon E^*$ $|_{\theta_1 = \alpha_1}$, где E^* – приведенный модуль упругости материалов конусов, $E^* = 2((m^{(1)} - 1)/(m^{(1)} G_1) + (m^{(2)} - 1)/(m^{(2)} G_2))^{-1}$. Кривая 1 отвечает отношению модулей сдвига $G_1/G_2 = 0.5$ и коэффициенту трения $\mu_0 = 0.25$. Для сравнения построены кривая 2, соответствующая контакту без трения ($\mu_0 = 0$, $G_1/G_2 = 0.5$), и кривая 3, соответствующая контакту упругого и абсолютно жесткого конусов ($G_1/G_2 = 0$) с учетом сил трения ($\mu_0 = 0.25$). В указанных случаях особенности контактных напряжений в окрестности вершины конусов имеют вид $r^{-0.305}$, $r^{-0.474}$, r^0 соответственно. В последнем случае контактные напряжения ограничены и в вершине конусов (при $r/l = 0$) величина $\bar{\sigma} = 8.38$. В случае кривых 1, 3 проверено выполнение условия (1.5) на радиальные перемещения, которые вычислялись по формуле (3.3). Представленные результаты показывают, что наличие трения и упругие характеристики материалов конусов оказывают значительное влияние на распределение контактных напряжений вблизи общей вершины конусов ($0 < r/l \leq 0.25$). На значительном расстоянии от вершины ($0.5 \leq r/l \leq 1$) приведенные напряжения $\bar{\sigma}$ мало зависят от указанных факторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Острик В.И., Улитко А.Ф.* Контакт двух упругих клиньев с учетом сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 93–100.
2. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 264 с.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 640 с.
4. *Острик В.И.* Асимптотические оценки канонических произведений по корням уравнений, содержащих функции Лежандра // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Сер.: Математика, прикладна математика і механіка. 2000. № 475. С. 153–161.

Киев

Поступила в редакцию
11.07.2002