

УДК 539.3

© 2004 г. И.Т. ДЕНИСЮК

**ТЕРМОУПРУГОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ
С НЕГЛАДКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

Термоупругость двумерных тел с угловыми включениями изучалась в [1, 2]. В публикуемой статье исследуется термоупругость пространственных тел с негладкими включениями.

1. Постановка задачи. Пусть неограниченное трехмерное изотропное тело содержит N включений V_i ($i = \overline{1, N}$), ограниченных поверхностями S_i , содержащими гладкие замкнутые непересекающиеся особые линии L_j ($j = \overline{1, n_j}$) (множества угловых точек) и конические точки $O_k \notin L_j$ ($k = \overline{1, m_j}$), и соединенные идеальным термомеханическим контактом с основным материалом. Определим термонапряженное состояние такой композиции при внешних стационарных тепловых воздействиях (источники тепла, тепловой поток, равномерный нагрев и т.п.)

Температурное поле $T = T(M)$ и перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(M)$ определяются уравнениями [3]:

$$\nabla^2 T = -Q/\lambda_q \tag{1.1}$$

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} = \gamma \text{grad } T \tag{1.2}$$

где $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\gamma = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)$, Q – удельная мощность источников тепла, α_T – коэффициент линейного термического расширения, λ_q – коэффициент теплопроводности, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, $M = M(x_1, x_2, x_3)$.

В точках особых линий или конических точках реализация уравнений теплопроводности и Ламе понимается в смысле выполнения равенств

$$\lim_{\Delta V \rightarrow M^0} \iint_{\Delta V} \left(\nabla^2 T + \frac{Q}{\lambda_q} \right) dv = 0 \tag{1.3}$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow M^0} \iint_{\Delta V} [(\lambda + 2\mu)\text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} - \gamma \text{grad } T] dv = 0 \tag{1.4}$$

что означает выполнение условий теплового баланса и равновесия среды в особых точках, т.е. при стягивании области ΔV в особую точку M^0 .

Условия термомеханического контакта имеют вид:

в точках гладкости [4, 5]:

$$T_0^-(M) - T_i^+(M) = 0, \quad \lambda_{q0} \left(\frac{\partial T_0^-(M)}{\partial n} \right)^- - \lambda_{qi} \left(\frac{\partial T_i^+(M)}{\partial n} \right)^+ = 0 \tag{1.5}$$

$$u_0^-(M) - u_i^+(M) = 0, \quad P_{n0}^-[\mathbf{u}_0^-(M)] - P_{ni}^+[\mathbf{u}_i^+(M)] = 0 \tag{1.6}$$

в особых точках

$$\lim(T_0^-(M) - T_i^+(M)) = 0, \quad \lim\left(\lambda_{q0}\left(\frac{\partial T_0(M)}{\partial n}\right)^- - \lambda_{qi}\left(\frac{\partial T_i(M)}{\partial n}\right)^+\right) = 0 \quad (1.7)$$

$$\lim(\mathbf{u}_0^-(M) - \mathbf{u}_i^+(M)) = 0, \quad \lim\{P_{n0}^-[u_0(M)] - P_{ni}^+[u_i(M)]\} = 0 \quad (1.8)$$

$$P_{ni}[\cdot] = 2\mu_i \partial/\partial n + \lambda_i(n, \operatorname{div}) + \mu_i[n, \operatorname{rot}] \quad (i = \overline{0, N})$$

где оператор нормальных усилий определяется согласно правилу [5]; n – внешняя нормаль к поверхности S_i , значение индекса $i = 0$ относится к величинам области V_0 , а значения индекса $i = \overline{1, N}$ – к области V_i ; $T_i^\pm(M)$, $(\partial T_i(M)/\partial n)^\pm$, $\mathbf{u}_i^\pm(M)$, $P_{ni}^\pm[u_i(M)]$ – граничные значения функций $T_i(M)$, $\partial T_i(M)/\partial n$, $\mathbf{u}_i(M)$, $P_{ni}^\pm[u_i(M)]$ при подходе к поверхности S_i со стороны области V_i (знак +) или V_0 (знак –), пределы берутся при стремлении точки M к особой точке M^0 .

Задачу можно разделить на задачу теплопроводности и задачу термоупругости.

2. Задача теплопроводности. Температурное поле определяется уравнением Пуассона (1.1), решение которого представляется суммой гармонической функции и частного решения уравнения (1.1), являющемся непрерывной функцией во всем пространстве R_3 [6]. Класс гармонических функций определяется их поведением вблизи особенностей граничных поверхностей, то есть локальным распределением температурных полей и потоков. Такие представления установлены в [7], в частности, в окрестности особой линии $L = S_1 \cap S_2$ с учетом условия (1.3) в виде

$$T_i = \rho^m (C_{i1} \cos m\theta + C_{i2} \sin m\theta) + O(\rho^{m+1}), \quad \rho = |M_0 M| \quad (2.1)$$

$$\partial T_i / \partial n = \rho^{m-1} m (C_{i2} \cos m\theta - C_{i1} \sin m\theta) + O(\rho^m)$$

где $0 \leq m \leq 1$, M принадлежит плоскости \mathbf{nn}_2 сопровождающего трехгранника $\mathbf{nn}_1\mathbf{n}_2$ поверхности S_0 , натянутой на особую линию, $\theta = \angle(M_0 M, \mathbf{n})$, C_{i1} , C_{i2} – произвольные постоянные.

Пусть точка O является вершиной конической поверхности с прямолинейной образующей и криволинейной гладкой замкнутой направляющей. Введем криволинейные координаты ρ_1 , θ_1 , s_1 следуя [8] и воспользуемся установленным представлением температурного поля и нормальной производной для случая направляющей, независимой от координаты s_1 , при учете условия (1.3) [7, 8]:

$$T_i = \rho_1^{m_k} C_i P_{m_k}(\cos \theta_4) + O(\rho_1^{m_k+1}), \quad \theta_4 = \theta_1 + \beta, \quad \operatorname{tg} \beta = d \quad (2.2)$$

$$\partial T_i / \partial n = \rho_1^{m_k-1} C_i \frac{dP_{m_k}(\cos \theta_4)}{d\theta_4} + O(\rho_1^{m_k+1})$$

где $P_{m_k}(\cos \theta_1)$ – функция Лежандра.

Если направляющая конуса зависит от координаты s_1 , то температурное поле имеет асимптотическое представление [7]:

$$T_i(\theta_1, s_1) = \rho_1^{m_k} \sum_{n=0}^N (D_{ni1}(\theta_1) \cos n s_1 + D_{ni2}(\theta_1) \sin n s_1) + (\rho_1^{m_k+1}) \quad (2.3)$$

и аналогично предыдущему устанавливаем распределение компонент вектора плотности локального теплового потока, при этом $m_k = m_k(s_j)$ является функцией координаты s_j .

Пусть конечная односвязная область V_1 , занимаемая включением, ограничена поверхностью $S = \cup S_j$ ($j = 1, 2, \dots, n_1$), которая содержит конические точки O_k ($k = \overline{1, m_1}$) и гладкие непересекающиеся замкнутые особые линии $L_j = S_j \cap S_{j+1}$ ($j = \overline{1, n_1 - 1}$), $O_k \notin L_j$. Поверхности S_j определяются уравнениями $f_0(x_1, x_2, x_3) = 0$, а поверхности S_{j0} , натянутые на контура L_j , описываются уравнениями $f_{0j}(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Представим температурные поля в виде

$$T_0(M) = T_{01}(M) + T_{02}(M), \quad M \in V_0, \quad T_1(M) = T_{11}(M) + T_{12}(M), \quad M \in V_1 \quad (2.4)$$

где первые слагаемые реализуют асимптотику (2.1)–(2.3), в зависимости от типа негладкости, а вторые являются ограниченными непрерывными функциями в своих областях определения.

Множество точек гладкости поверхности S является кусочно-гладкой поверхностью. Представим первые слагаемые с помощью потенциалов простого и двойного слоя, являющимися гармоническими исчезающими на бесконечности функциями [6]:

$$T_{i1}(M) = \iint_S \left(\prod_{j=1}^{n_1-1} \mu_{ij1}^{(1)}(N) \right) \left(\prod_{k=1}^{p_1} \mu_{ik1}^{(2)}(N) \right) R^{-1} ds + \iint_S \left(\prod_{j=1}^{n_1-1} \mu_{ij1}^{(3)}(N) \right) \left(\prod_{k=1}^{p_1} \mu_{ik1}^{(4)}(N) \right) \frac{\partial R^{-1}}{\partial n} ds \quad (2.5)$$

$$N = N(y_1, y_2, y_3) \in S, \quad R = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{1/2} \quad (i = \overline{0, 1})$$

где производные берутся по направлению внешней нормали к S .

Для особых линий плотности берем в виде

$$\mu_{ij1}^{(1)}(N) = \frac{(-1)^{i+1}}{2\pi} R_j^{m_j}(N) (C_{i1j} \cos(m_j U_j(N)) + C_{i2j} \sin(m_j U_j(N))) \quad (2.6)$$

$$\mu_{ij1}^{(3)}(N) = \frac{(-1)^{i+1} m_j}{2\pi} R_j^{m_j-1}(N) (C_{i2j} \cos(m_j U_j(N)) - C_{i1j} \sin(m_j U_j(N))) \quad (2.7)$$

$$R_j(N) = ((f_{0j}(N) |\text{grad} f_{0j}(N)|^{-1})^2 - Q_j^2(N))^{1/2},$$

$$U_j(N) = \arcsin(f_{0j}(N) (|\text{grad} f_0(N)| R_j(N))^{-1})$$

$$Q_j(N) = f_j(N) |\text{grad} f_j(N)|^{-1} + (1 - (\mathbf{G}_{2j}(N), \mathbf{G}_{0j}(N))^2 f_{0j}(N) |\text{grad} f_{0j}(N)|^{-1}) (\mathbf{G}_{0j}(N), \mathbf{G}_{2j}(N))^{-1}$$

$$\mathbf{G}_j(N) = \text{grad} f_j(N) |\text{grad} f_j(N)|^{-1}, \quad \mathbf{G}_{0j}(N) = \text{grad} f_{0j}(N) |\text{grad} f_{0j}(N)|^{-1}$$

$$\mathbf{G}_{2j}(N) = [[\mathbf{G}_j(N), \mathbf{G}_{j+1}(N)] [\mathbf{G}_j(N), \mathbf{G}_{j+1}(N)]^{-1}, \mathbf{G}_{0j}(N)]$$

Для конических точек имеем

$$\mu_{jk1}^{(2)}(N) = \frac{(-1)^{i+1}}{2\pi} R_k^{m_k}(N) \sum_{n=0}^K \left(D_{ikn1}(U_k(N)) \cos\left(n\pi \frac{S_k(N)}{s_{k0}}\right) + D_{jkn2}(U_k(N)) \sin\left(n\pi \frac{S_k(N)}{s_{k0}}\right) \right) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \mu_{jk1}^{(4)}(N) &= \frac{(-1)^{i+1}}{2\pi} R_k^{m_k-1}(N) \times \\ &\times \sum_{n=0}^K \left(\frac{dD_{ikn1}(U_k(N))}{dU_k(N)} \cos\left(n\pi \frac{S_k(N)}{s_{k0}}\right) + \frac{dD_{ikn2}(U_k(N))}{dU_k(N)} \sin\left(n\pi \frac{S_k(N)}{s_{k0}}\right) \right) \\ R_k(N) &= ((y_1 - x_{1k})^2 + (y_2 - x_{2k})^2 + (y_3 - x_{3k})^2)^{1/2}, \\ U_k(N) &= \arcsin(l_{0k}(N)(y_1 - x_{1k}) + m_{0k}(y_2 - x_{2k}) + n_{0k}(x_3 - x_{3k})) \\ S_k(N) &= \int_0^{\Phi_k} \left(\left(\frac{dl_{0k}(N)}{d\Phi_k} \right)^2 + \left(\frac{dm_{0k}(N)}{d\Phi_k} \right)^2 + \left(\frac{dn_{0k}(N)}{d\Phi_k} \right)^2 \right)^{1/2} d\Phi_k \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\Phi_k = \Phi_k(y_1, y_2)$, $O_k = O_k(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$, $l_{0k}(N)$, $m_{0k}(N)$, $n_{0k}(N)$ – координаты орта образующей $r_{0k}(N)$; D_{iknq} – известные функции в представлении (2.3).

Аналогичные формулы в случае асимптотики (2.2):

$$\mu_{ik2}^{(2)}(N) = (-1)^{i+1} (2\pi)^{-1} R_k^{m_k}(N) C_k P_{m_k}(\cos U_{1k}(N)) \quad (2.10)$$

$$\mu_{ik1}^{(4)}(N) = (-1)^{i+1} (2\pi)^{-1} R_k^{m_k-1}(N) C_k \frac{dP_{m_k}(\cos U_{ik}(N))}{dU_{ik}(N)} \quad (2.11)$$

где $U_{ik}(N) = U_k(N) = \beta$, P_{m_k} – функции Лежандра.

Подставляя представления температурных полей (2.4) с учетом (2.5) в граничные условия (1.7) убеждаемся, что они удовлетворяются, а функции и их производные имеют асимптотику (2.1), (2.2) или (2.3). При этом учитываем, что $m_q, m_k \in (0, 1)$ и предельные значения потенциала простого и двойного слоя в точках гладкости поверхности сопряжения определяются известными формулами [6] и переходим к соответствующим локальным координатам.

Вторые слагаемые температурных полей (2.10) записываем потенциалами простого и двойного слоя с неизвестными плотностями $\mu_{i2q}(N)$ ($q = \overline{1, 2}$):

$$T_{02}(M) = T_{00}(M) + \iint_S \mu_{021}(N) R^{-1} ds + \iint_S \mu_{022}(N) \frac{\partial R^{-1}}{\partial n} ds \quad (2.12)$$

$$T_{12}(M) = T_{11}^0(M) + \iint_S \mu_{121}(N) R^{-1} ds + \iint_S \mu_{122}(N) \frac{\partial R^{-1}}{\partial n} ds \quad (2.13)$$

где $T_{00}(M)$, $T_{11}^0(M)$ – известные гармонические функции, обусловленные внешними тепловыми влияниями (заданный тепловой поток на бесконечности, источники тепла и т.п.).

Для нахождения неизвестных плотностей подставляем (2.4), (2.12) в граничные условия (1.3) и полагаем вследствие произвольности плотностей

$$\mu_{121}(N) = \mu_{021}(N), \quad \mu_{122}(N) = \mu_{022}(N) \quad (2.14)$$

В результате находим

$$\mu_{022}(N) = h_0(N) \quad (2.15)$$

а для плотности $\mu_{021}(N)$ получаем интегральное уравнение

$$\mu_{021}(N_0) - \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\iint_S \mu_{021}(N) R^{-1} ds \right) = g_0(N_0) \quad (2.16)$$

$$N_0 \in S, \quad h_0(N) = (T_{01}^-(N) + T_{00}^-(N) - (T_{11}^+(N) + T_{11}^{0-}(N)))(4\pi)^{-1}$$

$$g_0(N_0) = \left(\gamma \left(\frac{\partial T_{01}^-}{\partial n} + \frac{\partial T_{00}^-}{\partial n} \right) - \left(\frac{\partial T_{11}^+}{\partial n} + \frac{\partial T_{11}^{0-}}{\partial n} \right) \right) (2\pi(1+\gamma))^{-1} -$$

$$- \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\iint_S h_0(N) \frac{\partial(R^{-1})}{\partial n} ds \right), \quad T_{i1} = T_{i1}(N_0)$$

$$T_{00} = T_{00}(N_0), \quad T_{11}^0 = T_{11}^0(N_0), \quad \sigma = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \quad \gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$$

Правая часть уравнения (2.16) вследствие выполнения условий (1.7) является непрерывной ограниченной функцией на S , поэтому это уравнение с полярным ядром [6].

Однородное союзное уравнение

$$\mu_{021}^*(N_0) - \frac{\sigma}{2\pi} \iint_S \mu_{021}^*(N) \frac{\partial R^{-1}}{\partial n} ds = 0$$

можно трактовать как выполнение условия (1.5) для функции

$$T^*(M) = \gamma \iint_S \mu_{021}^*(N) \frac{\partial R^{-1}}{\partial n} ds, \quad M \in V_0$$

$$T^*(M) = \iint_S \mu_{021}^*(N) \frac{\partial R^{-1}}{\partial n} ds, \quad M \in V_1$$

Она является вследствие (1.5) непрерывной гармонической функцией во всем пространстве R_3 , принимает, как вытекает из (1.5), постоянные значения на S и поэтому гармоническая функция тождественно равна нулю [6]. Отсюда следует, что $\mu_{021}^* = 0$ и интегральное уравнение (2.22) безусловно разрешимое [6].

В случае нескольких конечных односвязных областей V_i ($i = \overline{1, k_0}$) температурные поля $T_i(M)$, $M \in V_i$ строим аналогично (2.4), (2.12) для каждой области. Температурное поле $T_0(M)$, $M \in V_0$ принимаем в виде (2.4), где

$$T_{01}(M) = \sum_{i=1}^{k_0} T_{0i1}(M), \quad T_{02}(M) = \sum_{i=1}^{k_0} T_{0i2}(M)$$

Здесь слагаемые $T_{0i1}(M)$ строятся с учетом негладкостей соответствующих поверхностей S_i аналогично (2.5)–(2.11), а слагаемые $T_{0i2}(M)$ берем в виде (2.12).

3. Задача термоупругости. Решением неоднородного уравнения Ламе (1.2) при известном температурном поле является сумма общего решения однородного уравне-

ния Ламе и частного решения неоднородного уравнения Ламе, представляющееся обобщенным упругим объемным потенциалом и являющимся непрерывной функцией во всем пространстве R_3 [9, 10].

Установим поведение решений однородных уравнений Ламе (1.2) вблизи особенностей поверхностей раздела областей. Если характеристические уравнения

$$\sin m_q \omega = \pm m_q \sin \omega, \quad \mu \sin m_q \omega = \pm m_q \sin \omega (q = \overline{1, 4}), \quad m_5 = \frac{\pi}{2\pi - \omega} \quad (3.1)$$

$$\mu = \frac{\kappa_1 \gamma - \kappa_0}{1 - \gamma}, \quad \kappa_g = 3 - 4\nu_g (g = \overline{0, 1}), \quad \omega(s) = \theta_1(s) - \theta_2(s)$$

в точках особой линии L имеют корни $m_q \in (0, 1)$ ($q = \overline{1, 5}$), то решение уравнения Ламе в окрестности особой линии имеет асимптотику

$$\mathbf{u} = \{u_\rho, u_\theta, u_s\}, \quad u_\rho = \rho^{m_q} A + o(\rho^{m_q}), \quad u_\theta = \rho^{m_q} B_q + o(\rho^{m_q}), \quad u_s = \rho^{m_5} C + o(\rho^{m_5})$$

$$P_n[\mathbf{u}] = \{\tau_{\rho\theta}, \sigma_\theta, \tau_{\theta s}\}, \quad \tau_{\rho\theta} = \mu \rho^{m_q - 1} \left[(m_q - 1) B_q + \frac{\partial A_q}{\partial \theta} \right] + O(1), \quad (3.2)$$

$$\sigma_\theta = 2\mu \rho^{m_q - 1} \left\{ [\beta(1 + m_q) + 1] A_q + (\beta + 1) \frac{\partial B_q}{\partial \theta} \right\} + O(1),$$

$$\tau_{\theta s} = \mu \rho^{m_5 - 1} \frac{\partial C}{\partial \theta} + O(1)$$

$$A_q = (m_q - \kappa) a_{1q}(s) \sin(m_q - 1)\theta + (\kappa - m_q) b_{1q}(s) \cos(m_q - 1)\theta + c_{1q}(s) \sin(m_q + 1)\theta - d_{1q}(s) \cos(m_q + 1)\theta, \quad B_q = (m_q + \kappa) a_{1q}(s) \cos(m_q - 1)\theta + (m_q + \kappa) b_{1q}(s) \sin(m_q - 1)\theta + c_{1q}(s) \cos(m_q + 1)\theta + d_{1q}(s) \sin(m_q + 1)\theta \quad (3.3)$$

$$C = g_1(s) \cos m_5 \theta + h_1(s) \sin m_5 \theta, \quad \beta = \frac{\nu}{1 - 2\nu}$$

где ρ, θ, s – локальные криволинейные координаты.

Действительно, пусть гладкая замкнутая особая линия $L = S_1 \cap S_2$, где S_q ($q = \overline{1, 2}$), определяется уравнениями $f_q(x_1, x_2, x_3) = 0$. Натянем на L гладкую поверхность S_0 , на которой введем криволинейные ортогональные координаты u, v так, что при $v = v_0 = \text{const}$ определяется линия L . Параметризуем кривую L и полагаем $u = s$, где s – длина дуги, отсчитываемая от некоторой начальной точки [11].

Пусть $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2$ – сопровождающий трехгранник поверхности S_0 в точке $M_0 \in L$, где $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ – орты, лежащие в плоскости, касательной к S_0 в точке M_0 , \mathbf{n}_1 – касательный вектор к кривой, $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1, \mathbf{n} \perp \mathbf{n}_2$. Точка M плоскости векторов $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ определяется полярными координатами $\rho = |\mathbf{M}\mathbf{M}_0|, \theta = \angle(\mathbf{M}_0\mathbf{M}, \mathbf{n}_2)$.

Соотношение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \rho (\cos \theta \mathbf{n}_2(s) + \sin \theta \mathbf{n}(s)) \quad (3.4)$$

где \mathbf{r}_0, \mathbf{r} – радиус-векторы точек M, M_0 , определяет переменные ρ, θ, s как криволинейные ортогональные координаты точки M в локальной области особой линии с коэффициентами Ламе $h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1 + \rho H_0, H_0 = -(p \cos \theta + r_1 \sin \theta), p = -|r_{s|v}| |r_v|^{-1}, r_1 = (r_s r_{ss}) |r_s|^{-1}$.

В [8] показано, что решения уравнений Ламе принадлежат степенному классу в локальных криволинейных координатах, поэтому получаем такое представление компонент вектора u :

$$u_\rho = \rho^{m_q} A_q(\theta, s), \quad u_\theta = \rho^{m_q} B_q(\theta, s), \quad u_s = \rho^{m_3} C(\theta, s), \quad m_q = m_q(s) \quad (3.5)$$

Удовлетворяя с помощью представлений (3.5) уравнению (1.4), получим систему дифференциальных уравнений

$$(m_q - \kappa) \frac{\partial B_q}{\partial \theta} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 A_q}{\partial \theta^2} + 2(1 - \nu)(m_q^2 - 1)A_q = 0 \quad (3.6)$$

$$(m_q + \kappa) \frac{\partial A_q}{\partial \theta} + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 B_q}{\partial \theta^2} + (1 - 2\nu)(m_q^2 - 1)B_q = 0$$

и уравнение

$$m_3^2 C + \partial^2 C / \partial \theta^2 = 0 \quad (3.7)$$

решения которых даются формулами (3.3). Реализуя с помощью представлений (3.3) граничные условия (1.8) и полагая

$$\theta = \theta_1(s) = \arccos((\text{grad} f_1, \text{grad} f_0) / (|\text{grad} f_1| |\text{grad} f_0|)^{-1})$$

$$\theta = \theta_2(s) = \arccos((\text{grad} f_2, \text{grad} f_0) / (|\text{grad} f_2| |\text{grad} f_0|)^{-1})$$

получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно функций $a_1(s), b_1(s), \dots, f_1(s)$. Нетривиальное решение такой системы существует при равенстве главного определителя нулю, что и дает характеристические уравнения (3.1). Такие уравнения могут иметь до четырех корней $m_q \in (0, 1)$, что детально исследовано в [12].

В случае плоской особой линии данное утверждение совпадает с результатами [13]. Для конической точки поведение решений однородных уравнений Ламе детально исследовано в [8].

Решение однородного уравнения Ламе (1.2) представляется обобщенными упругими потенциалами простого и двойного слоя [9, 10]. Установим необходимые для дальнейшего условия существования и свойства таких потенциалов в случае кусочно-гладких поверхностей.

Если в точках гладкости замкнутой кусочно-гладкой поверхности S плотность $\Phi_2(M)$ обобщенного упругого потенциала двойного слоя $W(M)$ удовлетворяет условию Липшица – Гельдера, а в особых точках M^0 имеет место представление

$$\Phi_2(M) = O(|MM^0|^\alpha), \quad \alpha \in (0, 1) \quad (3.8)$$

то обобщенный упругий потенциал двойного слоя существует и в точках гладкости поверхности имеет место обычное представление

$$W^\pm(M_0) = \mp \Phi_2(M_0) + W(M_0) \quad (3.9)$$

где $W^\pm(M_0)$ – граничное значение потенциала при стремлении точки $M \in V_0$ (знак $-$) или точки $M \in V_1$ (знак $+$) к точке $M_0 \in S$, $W(M_0)$ – прямое значение потенциала в M_0 .

Пусть поверхность S содержит одну особую точку O_1 , являющуюся, например, конической точкой, а точка $N_0 \in S$ является точкой гладкости. Аналогичное доказа-

тельство в случае множества особых точек. Построим сферу с центром в особой точке O_i радиуса $R_0 < |N_0 O_i|$. Тогда $S = S_1 \cup S_2$, где S_1 – часть поверхности S , лежащей вне сферы и являющейся гладкой разомкнутой поверхностью, а S_2 – часть поверхности S , содержащаяся внутри такой сферы. Потенциал представим в виде суммы

$$W(M) = \iint_S \Gamma_2(M, N) \Phi_2(N) ds_N = \iint_{S_1} \Gamma_2(M, N) \Phi_2(N) ds_N + \iint_{S_2} \Gamma_2(M, N) \Phi_2(N) ds_N$$

$$\Gamma_2(M, N) = \|\Gamma_{2ij}(M, N)\| \quad (i, j = \overline{1, 3}); \quad \Gamma_{2ij}(M, N) = \left[m \delta_{ij} + \frac{n(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{r^2} \right] \times$$

$$\times \sum_{l=1}^3 \frac{(x_l - y_l) n_l(N)}{r^3} + m \left[n_i(N) \frac{x_j - y_j}{r^3} - n_j(N) \frac{x_i - y_i}{r^3} \right] \quad (3.10)$$

$$m = \frac{1}{2\pi\lambda + 2\mu} \mu, \quad n = \frac{3}{2\pi\lambda + 2\mu} \lambda + \mu, \quad N = N(y_1, y_2, y_3), \quad r = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{1/2}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Первое слагаемое в правой части (3.10) существует как обобщенный упругий потенциал двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова [10]. Второе слагаемое содержит интегралы, которые при переходе к переменным ρ_1, s_1 работы [8] вычисляются как несобственные интегралы типа

$$\int_0^{R_0} d\rho_1 \int_0^{s_1} \frac{A_{s_1}(s_1)}{1 - \alpha} ds_1 = \frac{R_0^{\alpha s_1}}{\alpha} \int_0^{s_1} A_{s_1}(s_1) ds_1 < \infty$$

Пусть точка M стремится к точке $M_0 \in S_1$, тогда учитывая для первого слагаемого в представлении (3.10) известные граничные значения обобщенного упругого потенциала двойного слоя на разомкнутых поверхностях Ляпунова [10] и непрерывность второго слагаемого при $M_0 \in S_1$, получаем формулу (3.9).

Если в точках гладкости кусочно-гладкой поверхности S плотность $\Phi_1(M)$ обобщенного упругого потенциала простого слоя $V(M)$ удовлетворяет условию Липшица – Гельдера, а в особых точках M^0 имеет место асимптотическое представление

$$\bar{\Phi}_1(M) = O\left(\frac{1}{|MM^0|^\alpha}\right), \quad \alpha \in (0, 1) \quad (3.11)$$

то обобщенный упругий потенциал простого слоя существует и является непрерывной функцией при переходе поверхности S в ее точках гладкости и в этих точках имеет место обычное представление

$$P_n^\pm[V(M_0)] = \pm \Phi_1(M_0) + P_n[V(M_0)] \quad (3.12)$$

где $P_n^\pm[V(M_0)]$ – граничные значения вектора $P_n[V(M)]$ при подходе точки M к точке $M_0 \in S$ со стороны области V_0 (знак $-$) или V_1 (знак $+$); $R_n[V(M)]$ – прямое значение оператора от потенциала на поверхности S .

Доказательство аналогично вышеприведенному. При этом интеграл $P_n[V(M_0)]$ понимаем как сингулярный.

Перейдем к общему случаю разрешимости задачи. Рассмотрим сначала случай двух областей V_1 и $V_0 = R_3 \setminus V_1$.

Если в точках особых линий поверхности корни характеристических уравнений (3.1) $m_q \in (0, 1)$ и в конических точках корни соответствующих характеристических уравнений работы [8] $m_{kp} \in (0, 1)$ и имеет место

$$\begin{aligned} 0.5 \sum_{j=1}^3 \iint_S \{ |\Gamma_{ij}^{(1)}(M, N) - \Gamma_{ij}^{(0)}(M, N)| + |\Gamma_{2ij}^{(1)}(M, N) - \Gamma_{2ij}^{(0)}(M, N)| \} ds_N &= A_i < 1 \\ 0.5 \sum_{j=1}^3 \iint_S \{ |\Gamma_{1ij}^{(1)}(M, N) - \Gamma_{1ij}^{(0)}(M, N)| + |\Gamma_{3ij}^{(1)}(M, N) - \Gamma_{3ij}^{(0)}(M, N)| \} ds_N &= B_i < 1 \quad (i = \overline{1, 3}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

то задача разрешима.

Пусть конечная односвязная область ограничена поверхностью $S = \cup S_j$ ($j = 1, 2, \dots, n_1$), которая содержит конические точки O_k ($k = \overline{1, m_1}$) и гладкие замкнутые непересекающиеся особые линии $L_j = S_j \cap S_{j+1}$ ($j = \overline{1, n_1 - 1}$), $O_k \notin L_j$. Поверхности S_j задаются уравнениями $f_j(x_1, x_2, x_3) = 0$, а натянутые на контура L_j определяются уравнениями $f_{0j}(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Учитывая характер решений, установленный выше, представляем решения уравнений Ламе в виде

$$\mathbf{u}_0(M) = \mathbf{u}_{01}(M) + \mathbf{u}_{02}(M), \quad \mathbf{u}_1(M) = \mathbf{u}_{11}(M) + \mathbf{u}_{12}(M) \quad (3.14)$$

где $\mathbf{u}_{i1}(M)$ ($i = \overline{0, 1}$) реализуют асимптотику решений уравнений Ламе, а $\mathbf{u}_{i2}(M)$ являются ограниченными непрерывными функциями в своих областях определения.

Согласно установленному выше характер обобщенного упругого потенциала двойного слоя и оператора $P_n[\]$ от обобщенного упругого потенциала простого слоя вблизи точек гладкости поверхности S определяется плотностями потенциалов с точностью до величин прямых значений их на поверхности.

Представим сингулярные составляющие посредством обобщенных упругих потенциалов простого и двойного слоя

$$\mathbf{u}_{i1}(M) = \iint_S \Gamma_1^{(i)}(M, N) \Phi_{i1}(N) ds_N + \iint_S \Gamma_2^{(i)}(M, N) \Phi_{i2}(N) ds_N \quad (3.15)$$

где значение индекса $i = 0$ относится к величинам области $V_0 = R_3 \setminus V_1$, а $i = 1$ — области V_1 . Векторы плотностей представляем так

$$\begin{aligned} \Phi_{i11}(N) &= \{ \Phi_{i111}(N), \Phi_{i112}(N), \Phi_{i113}(N) \}, \quad \Phi_{i12}(N) = \{ \Phi_{i121}(N), \Phi_{i122}(N), \Phi_{i123}(N) \} \\ \Phi_{i11l}(N) &= \left(\prod_{j=1}^{n_1-1} \Phi_{i1lj}^{(1)}(N) \right) \left(\prod_{k=1}^{m_1} \Phi_{i1lk}^{(2)}(N) \right), \quad \Phi_{i12l}(N) = \left(\prod_{j=1}^{n_1-1} \Phi_{i12j}^{(3)}(N) \right) \left(\prod_{k=1}^{m_1} \Phi_{i12k}^{(4)}(N) \right) \quad (3.16) \\ M &= M(x_1, x_2, x_3), \quad N = N(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

В формулах (3.16) функции $\Phi_{i1lj}^{(1)}(N)$, $\Phi_{i12lj}^{(3)}(N)$ определяются геометрией поверхностей вблизи особых линий и согласно установленному выше имеют вид

$$\Phi_{i1lj}^{(1)}(N) = 2\mu_i(-1)^{i+1} \sum_{q=1}^{p_2} \left\langle R_j^{m_{aj}-1}(N) \left\{ (m_{aj}+1) B_{ijq}[T_j(N)] + \frac{\partial A_{ijq}[T_j(N)]}{\partial T_j(N)} \right\} \right\rangle$$

$$\Phi_{i12j}^{(1)}(N) = 2\mu_i(-1)^{i+1} \sum_{q=1}^{p_2} \left\langle R_j^{m_{qj}-1}(N) \left[[\beta_i(1+n_i) + 1] A_{ijq}[T_j(N)] + (\beta_i + 1) \frac{\partial B_{ijq}[T_j(N)]}{\partial T_j(N)} \right] \right\rangle \quad (3.17)$$

$$\Phi_{i13j}^{(1)}(N) = (-1)^i \mu_i R_j^{m_{5j}-1}(N) \frac{\partial C_{ij}[T_j(N)]}{\partial T_j(N)}, \quad \Phi_{i12j}^{(3)}(N) = (-1)^i \sum_{q=1}^{p_2} R_j^{m_{qj}}(N) A_{ijq}[T_j(N)]$$

$$\Phi_{i21j}^{(3)}(N) = (-1)^i \sum_{q=1}^{p_2} R_j^{m_{qj}}(N) B_{ijq}[T_j(N)], \quad \Phi_{i23j}^{(3)}(N) = (-1)^i R_j^{m_{5j}}(N) C_{ij}[T_j(N)]$$

$$A_{ijq}(T_j(N)) = (m_{qj} - \kappa_i) a_{1ijq} \sin((m_{qj} - 1)T_j(N)) + (\kappa_i - \mu_{qj}) b_{1ijq} \cos((m_{qj} - 1)T_j(N)) + c_{1ijq} \sin((m_{qj} + 1)T_j(N)) - d_{1ijq} \cos((m_{qj} + 1)T_j(N)),$$

$$B_{ijq}(T_j(N)) = (m_{qj} + \kappa_i) a_{1ijq} \cos((m_{qj} - 1)T_j(N)) + (\mu_{qj} + \kappa_i) b_{1ijq} \sin((m_{qj} - 1)T_j(N)) + c_{1ijq} \cos((m_{qj} + 1)T_j(N)) + d_{1ijq} \sin((m_{qj} + 1)T_j(N))$$

$$C_{ij}(T_j(N)) = g_{1ij} \cos(m_{5j}T_j(N)) + h_{1ij} \sin(m_{5j}T_j(N))$$

$$R_j(N) = ((f_{0j}(N)|\text{grad} f_{0j}(N)|^{-1})^2 + Q_j^2(N))^{1/2},$$

$$T_j(N) = \arcsin(f_{0j}(N)(|\text{grad} f_{0j}(N)|R_j(N))^{-1})$$

$$Q_j(N) = (f_j(N)|\text{grad} f_j(N)|^{-1} + (1 - (\mathbf{G}_{2j}(N), \mathbf{G}_{0j}(N))^2 f_{0j}(N)|\text{grad} f_{0j}(N)|^{-1})(\mathbf{G}_{0j}(N), \mathbf{G}_{2j}(N)))$$

$$\mathbf{G}_j(N) = \text{grad} f_j(N)|\text{grad} f_j(N)|^{-1}, \quad \mathbf{G}_{0j}(N) = \text{grad} f_{0j}(N)|\text{grad} f_{0j}(N)|^{-1}$$

$$\mathbf{G}_{2j}(N) = [(\mathbf{G}_j(N), \mathbf{G}_{j+1}(N))|(\mathbf{G}_j(N), \mathbf{G}_{j+1}(N))|^{-1}, \mathbf{G}_{0j}(N)]$$

где p_2 – число корней $m_{qj} \in (0, 1)$ характеристических уравнений (3.1).

Функции $\Phi_{i1lk}^{(2)}(N)$, $\Phi_{i2lk}^{(4)}(N)$ определяются геометрией поверхностей вблизи конических точек и имеют вид перемещений и напряжений работы [8], в которых необходимо заменить ρ , θ , s соответственно на

$$R_k(N) = ((y_1 - x_{1k})^2 + (y_2 - x_{2k})^2 + (y_3 - x_{3k})^2)^{1/2}$$

$$T_{kn}(N) = \arcsin(R_k^{-1}(N)(l_{0k}(y_1 - x_{1k}) + m_{0k}(y_2 - x_{2k}) + n_{0k}(y_3 - x_{3k})))$$

$$S_k(N) = \int_0^{\Phi_k} \left(\left(\frac{dl_{0k}(N)}{d\Phi_k} \right)^2 + \left(\frac{dm_{0k}(N)}{d\Phi_k} \right)^2 + \left(\frac{dn_{0k}(N)}{d\Phi_k} \right)^2 \right) d\Phi_k, \quad \Phi_k = \Phi_k(y_2, y_3)$$

$$O_k(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k})$$

где $l_{0k}(N)$, $m_{0k}(N)$, $n_{0k}(N)$ – координаты орта образующей $r_{0k}(N)$; и просуммировать в зависимости от числа корней $m_k \in (0, 1)$ для конической точки.

Представление сингулярных составляющих обобщенными упругими потенциалами двойного и простого слоя с плотностями (3.16), (3.17) отвечает условиям (3.8), (3.11). Удовлетворяя с помощью (3.14), (3.15) граничным условиям (1.8) в особых точках при переходе к соответствующим локальным координатам, убеждаемся, что они реализуются.

Регулярные составляющие решений уравнений Ламе в формулах (3.14) представим также обобщенными упругими потенциалами простого и двойного слоя с неизвестными плотностями $\Phi_{i21}(N)$, $\Phi_{i22}(N)$ ($i = \overline{0, 1}$):

$$\mathbf{u}_{02}(M) = \mathbf{u}_0^{(0)}(M) + \iint_S \Gamma(M, N) \Phi_{021}(N) ds_N + \iint_S \Gamma_2(M, N) \Phi_{022}(N) ds_N \quad (3.18)$$

$$\mathbf{u}_{12}(M) = \mathbf{u}_1^{(0)}(M) + \iint_S \Gamma(M, N) \Phi_{121}(N) ds_N + \iint_S \Gamma_2(M, N) \Phi_{122}(N) ds_N \quad (3.19)$$

где функции $\mathbf{u}_0^{(i)}(M)$ являются решениями неоднородного уравнения Ламе (1.2) при известных температурных полях (2.4) и имеют вид [9, 10]:

$$\mathbf{u}_0^{(i)}(M) = -0.5\gamma_i \iint_{V_1} \Gamma^{(i)}(M, N) \text{grad} T_i(N) ds_N$$

Подставляя представления (3.14)–(3.19) в граничные условия (1.6) в точках гладкости и учитывая формулы (3.9), (3.12), получим систему интегральных уравнений, в которой полагаем ввиду произвольности плотностей

$$\Phi_{021}(N) = \Phi_{121}(N), \quad \Phi_{022}(N) = \Phi_{122}(N) \quad (3.20)$$

В результате придём к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \Phi_{022}(M_0) - 0.5 \iint_S [\Gamma_1^{(1)}(M_0, N) - \Gamma_1^{(0)}(M_0, N)] \Phi_{021}(N) ds_N - \\ & - 0.5 \iint_S [\Gamma_2^{(1)}(M_0, N) - \Gamma_2^{(0)}(M_0, N)] \Phi_{022}(N) ds_N = -0.5 \mathbf{g}_1(M_0) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_{021}(M_0) + 0.5 \iint_S [\Gamma_1^{(1)}(M_0, N) - \Gamma_1^{(0)}(M_0, N)] \Phi_{021}(N) ds_N + \\ & + 0.5 \iint_S [\Gamma_3^{(1)}(M_0, N) - \Gamma_3^{(0)}(M_0, N)] \Phi_{022}(N) ds_N = 0.5 \mathbf{h}_1(M_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1(M, N) &= \|\Gamma_{1ij}(M, N)\|, \quad \Gamma_{1ij}(M, N) = -0.5 \left[m \delta_{ij} + n \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^2} \right] \frac{1}{r^3} \times \\ & \times \sum_{l=1}^3 (x_l - y_l) n_l(M) + m \left[n_i(M) \frac{x_j - y_j}{r^3} - n_j(M) \frac{x_i - y_i}{r^3} \right], \quad \Gamma_3(M, N) = \|\Gamma_{3ij}(M, N)\| \end{aligned}$$

$$\Gamma_{3ij}(M, N) = \sum_{s=1}^3 (\sigma_{is}^{(j)} n_s).$$

$$\sigma_{is}^{(j)} = 2\mu\varepsilon_{is}^{(j)} + \lambda\delta_{is}\theta^{(j)}, \quad \varepsilon_{is}^{(j)} = 0.5\left(\frac{\partial u_s^{(j)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^{(j)}}{\partial x_s}\right), \quad u_g^{(h)} = \Gamma_{2gh} \quad (g, h = \overline{1, 3})$$

$$\theta^{(j)} = \varepsilon_{11}^{(j)} + \varepsilon_{22}^{(j)} + \varepsilon_{33}^{(j)}$$

$$\mathbf{g}_1(M_0) = \mathbf{u}_{01}^-(M_0) + \mathbf{u}_0^{(0)-}(M_0) - (\mathbf{u}_{11}^+(M_0) + \mathbf{u}_1^{(0)+}(M_0))$$

$$\mathbf{h}_1(M_0) = P_n^{(0)-}[\mathbf{u}_{01}(M_0) + \mathbf{u}_0^{(0)+}(M_0)] - P_n^{(1)+}[\mathbf{u}_{11}(M_0) + \mathbf{u}_1^{(0)}(M_0)]$$

где матрицы $\Gamma^{(i)}(M, N)$, $\Gamma_i^{(i)}(M, N)$ ($i = \overline{1, 3}$) и оператор $P_n^{(i)}[\dots]$ при значении индекса $i = 0$ отвечает области V_0 , а при $i = 1$ – области V_1 ; M_0 – точки гладкости поверхности S .

Ввиду выполнения условий (1.7), (1.8) в особых точках, правые части уравнений (3.21) являются непрерывными ограниченными функциями на поверхности S , а матрицы $\Gamma_1^{(i)}(M_0, N)$, $\Gamma_3^{(i)}(M_0, N)$ порождают сингулярные интегралы, поэтому (3.21) является системой сингулярных интегральных уравнений [14].

Решение системы (3.21) аналогично [10] представляем в итерационной форме

$$\Phi_{022}^{(0)}(M) = -0.5\mathbf{g}_1(M), \quad \Phi_{021}^{(0)} = 0.5\mathbf{h}_1(M)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{022}^{(n)}(M) = & 0.5 \iint_S [\Gamma^{(1)}(M, N) - \Gamma^{(0)}(M, N)] \Phi_{021}^{(n-1)}(N) ds_N + \\ & + \iint_S [\Gamma_2^{(1)}(M, N) - \Gamma_2^{(0)}(M, N)] \Phi_{022}^{(n-1)}(N) ds_N - 0.5\mathbf{g}_1(M) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{021}^{(n)}(M) = & -0.5 \iint_S [\Gamma_1^{(1)}(M, N) - \Gamma_1^{(0)}(M, N)] \Phi_{021}^{(n-1)}(N) ds_N - \\ & - 0.5 \iint_S [\Gamma_3^{(1)}(M, N) - \Gamma_3^{(0)}(M, N)] \Phi_{022}^{(n-1)}(N) ds_N + 0.5\mathbf{h}_1(M) \end{aligned}$$

$$\Phi_{022}^{(n)}(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{022}^{(n)}(M), \quad \Phi_{021}^{(n)}(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{021}^{(n)}(M) \quad (3.23)$$

где точка M принадлежит множеству точек гладкости поверхности S .

Сходимость пределов (3.23) равносильна сходимости рядов

$$\Phi_{021}^{(0)}(M) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_{021}^{(n)}(M) - \Phi_{021}^{(n-1)}(M)], \quad \Phi_{022}^{(0)}(M) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_{022}^{(n)}(M) - \Phi_{022}^{(n-1)}(M)] \quad (3.24)$$

Переходя к скалярным компонентам (3.24) и учитывая условия (3.13), находим, что они мажорируются сходящимися числовыми рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_i^n M_{1i}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_i^n M_{2i}, \quad M_{1i} = \max|0.5h_{1i}(M)|, \quad M_{2i} = \max|0.5g_{1i}(M)|$$

$$\mathbf{h}_1(M) = \{h_{11}(M), h_{12}(M), h_{13}(M)\}, \quad \mathbf{g}_1(M) = \{g_{11}(M), g_{12}(M), g_{13}(M)\}$$

и, таким образом, ряды (3.24) сходятся абсолютно и равномерно в точках гладкости поверхности S . Выполняя предельный переход в (3.22) с учетом равномерной сходимости (3.23) в точках гладкости $M, N \in S$, получаем, что (3.22), (3.23) является решением системы (3.21).

В случае N областей V_i сингулярные составляющие решений уравнений Ламе строим аналогично (3.15)–(3.17), регулярные слагаемые берем, следуя (3.19) для каждой области V_i ($i = \overline{1, N}$), а для области V_0 представляем так:

$$\mathbf{u}_{01}(M) = \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_{0j1}(M), \quad \mathbf{u}_{02}(M) = \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_{0j2}(M)$$

где $\mathbf{u}_{0j1}(M)$ строится с учетом негладкостей поверхностей S_j аналогично вышеописанному, а слагаемые $\mathbf{u}_{0j2}(M)$ представляются в виде (3.18).

4. Круговое коническое включение. Как пример исследуем термонапряженное состояние среды, содержащей круговое коническое включение, ограниченное поверхностью

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0, \quad x_3 = c \quad (4.1)$$

если композит равномерно нагрет на величину ΔT .

Соответствующие смещения находим с помощью термоупругого потенциала перемещений [15]:

$$\mathbf{u}_i^{(0)}(M) = \text{grad} \Phi_i(M), \quad \nabla^2 \Phi_i(M) = m_i \Delta T, \quad m_i = \alpha_{Ti}(1 + \nu_i)/(1 - \nu_i) \quad (4.2)$$

Решение уравнения Пуассона (4.2) в ограниченной области V , содержащей начало координат, имеет вид [5]:

$$\Phi_i(M) = -\frac{m_i \Delta T}{4\pi} \iiint_V r^{-1} dv = 0.5 m_i \Delta T (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.3) следует

$$u_{1i}^{(0)} = m_i \Delta T x_1, \quad u_{2i}^{(0)} = m_i \Delta T x_2, \quad u_{3i}^{(0)} = m_i \Delta T x_3 \quad (4.4)$$

Представим векторы перемещений согласно формулам (3.14), в которых сингулярные составляющие имеют вид (3.15) с плотностями (3.16), в которых полагаем

$$\Phi_{i11q}(N) = \Phi_{i11q}^{(1)}(N) \Phi_{i11q}^{(2)}(N), \quad \Phi_{i12q}(N) = \Phi_{i12q}^{(3)}(N) \Phi_{i12q}^{(4)}(N) \quad (q = \overline{1, 3})$$

$$\Phi_{i111}^{(1)}(N) = 2\mu_i(-1)^{i+1} \sum_{g=1}^4 R_1^{m_{g1}-1}(N) \left\{ (m_{g1} + 1) B_{i1g}[U_1(N)] + \frac{\partial A_{i1g}[U_1(N)]}{\partial U_1(N)} \right\} \quad (4.5)$$

$$\Phi_{i112}^{(1)}(N) = 2\mu_i(-1)^{i+1} \sum_{g=1}^4 R_1^{m_{g1}-1}(N) \left\{ [\beta_i(1 + n_i) + 1] A_{i1g}[U_1(N)] + (\beta_i + 1) \frac{\partial B_{i1g}[U_1(N)]}{\partial U_1(N)} \right\}$$

$$\Phi_{i113}^{(1)}(N) = \mu_i(-1)^{i+1} R_1^{m_{s1}-1}(N) \frac{\partial C_{i1}[U_1(N)]}{\partial U_1(N)}$$

$$\Phi_{i121}^{(3)}(N) = (-1)^i \sum_{q=1}^4 \{R_1^{m_{q1}}(N) A_{i1g}[U_1(N)]\}, \quad \Phi_{i122}^{(3)}(N) = (-1)^i \sum_{g=1}^4 \{R_1^{m_{g1}}(N) B_{i1g}[U_1(N)]\} \quad (4.6)$$

$$\Phi_{i123}^{(3)}(N) = (-1)^i R_1^{m_{51}}(N) C_{i1}[U_1(N)]$$

$$A_{i1g}[U_1(N)] = (m_{g1} - \kappa_0) a_{i1g} \sin[(m_{g1} - 1)U_1(N)] + (\kappa_i - m_{g1}) b_{i1g} \cos[(m_{g1} - 1)U_1(N)] + C_{i1g} \sin[(m_{g1} + 1)U_1(N)] + d_{i1g} \cos[(m_{g1} + 1)U_1(N)]$$

$$B_{i1g}[U_1(N)] = (m_{g1} + \kappa_i) a_{i1g} \cos[(m_{g1} - 1)U_1(N)] + (m_{g1} + \kappa_i) b_{i1g} \sin[(m_{g1} - 1)U_1(N)] + c_{i1g} \cos[(m_{g1} + 1)U_1(N)] + d_{i1g} \sin[(m_{g1} + 1)U_1(N)]$$

$$C_{i1}[U_1(N)] = g_{i1} \cos[m_{51}U_1(N)] + h_{i1} \sin[m_{51}U_1(N)]$$

$$R_1(N) = \{(y_3 - c)^2 + 0.25a^{-2}(y_1^2 + y_2^2)(y_1^2 + y_2^2 + a^2)[(y_3 - c)^2 c^{-2} - 1]^2\}^{1/2}$$

$$U_1(N) = \arcsin[(y_3 - c)R_1^{-1}(N)], \quad n = N(y_1, y_2, y_3)$$

$$\Phi_{i121}^{(4)} = \sum_{p=1}^2 [R_k^{m_{kp}} A_{ikp}(N)], \quad \Phi_{i122}^{(4)} = \sum_{p=1}^2 [R_k^{m_{kp}} B_{ikp}(N)], \quad \Phi_{i123}^{(4)} = R_k^{m_{k3}} C_{ik}(N)$$

$$\Phi_{i111}^{(2)}(N) = \sum_{p=1}^2 \left\{ R_k^{m_{kp}-1} \mu_i \left[(m_{kp} - 1) B_{ikp}(N) + \frac{\partial A_{ikp}(N)}{\partial U_{i1}(N)} \right] \right\}$$

$$\Phi_{i112}^{(2)}(N) = 2\mu_i \sum_{p=1}^1 \left\{ R_k^{m_{kp}-1} \left[[(m_{kp} + 2) + 1] A_{ikp}(N) + (\beta_i + 1) \frac{\partial B_{ikp}(N)}{\partial U_{i1}(N)} + \beta_i H_0^{-1} \frac{\partial H_0}{\partial U_{i1}(N)} B_{ikp}(N) \right] \right\},$$

$$\Phi_{i113}^{(2)}(N) = \mu_i R_1^{m_{kp}-1}(N) \left\{ -H_0 \frac{\partial H_0}{\partial U_{i1}(N)} C_{ikp}(N) + \frac{\partial C_{ikp}(N)}{\partial U_{i1}(N)} \right\},$$

$$R_k(N) = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{1/2}, \quad U_{i1}(N) = \arcsin \left\{ \left[\sin U_0 \cos \arctg \left(\frac{y_2}{y_1} \right) y_1 + \sin U_0 \sin \arctg \left(\frac{y_2}{y_1} \right) y_2 + \cos U_0 y_3 \right] R_k^{-1}(N) \right\},$$

$$U_0 = \arctg \frac{a}{c}, \quad U_{i1}(N) = U_{i0}(N) + \alpha$$

$$H_0 = (1 + d^2)^{1/2} \sin U_{i1}, \quad \operatorname{tg} \alpha = d, \quad d = c/a$$

где $P_{m_{kp}}$ – функции Лежандра.

Ввиду симметрии тепловой нагрузки (равномерный нагрев) и геометрической (круговой конус) полагаем, что неизвестные величины $a_{i1g}, b_{i1g}, d_{i1g}, g_{i1}, h_{i1}$ ($i = \overline{0, 1}, g = \overline{1, 3}$) а также N_{1ip}, N_{2ip}, N_{3i} ($i = \overline{0, 1}, p = \overline{1, 2}$) в представлениях (4.5), (4.6) являются постоянными. Однако учитывая соотношения между ними для первой группы, приведенные в [13], из 28 неизвестных независимыми являются только 6: $a_{1011}, a_{1012},$

$a_{1013}, a_{1014}, g_{101}, h_{101}$, а для второй группы при учете соотношений между ними согласно [8] независимыми являются только три: N_{101}, N_{201}, N_{30} .

Представляем регулярные составляющие обобщенными упругими потенциалами простого и двойного слоя (3.18) и (3.19), где $u_i^{(0)}(M)$ берем согласно (4.4). Подставляя представления для векторов перемещений (3.14), (3.18), (3.19) в граничные условия (1.6), получаем систему сингулярных интегральных уравнений вида (3.21), в решении которой (3.22), (3.23) принималось, что $v_1 = 0,3, v_0 = 0,25, \gamma = 2$.

В (3.22), (3.23) удерживалось 6 итераций, что давало погрешность результата в 4.85%.

Для полного решения задачи необходимо выполнение условий равновесия в областях, содержащих особенности поверхности включения. Условия равенства главного вектора и главного момента усилий, приложенных к части среды, ограниченной поверхностью тора, которая охватывает особую линию и не содержит коническую точку, нулю приводят к системе шести линейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных

$$\sum_{s=1}^6 C_{st} z_s = D_t \quad (t = \overline{1, 6})$$

где $C_{st} = C_{st}(a, c, \Delta T)$, $D_t = D_t(a, c, \Delta T)$ являются функциями величин $a, c, \Delta T$ и из-за громоздкости не выписаны а неизвестные имеют вид

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{1011}(e_{11}N_{101} + e_{12}N_{201} + e_{13}N_{30}), & z_2 &= a_{1013}(e_{21}N_{101} + e_{22}N_{201} + e_{23}N_{30}) \\ z_3 &= a_{1011}(e_{31}N_{101} + e_{32}N_{201} + e_{33}N_{30}), & z_4 &= a_{1014}(e_{41}N_{101} + e_{42}N_{201} + e_{43}N_{30}) \\ z_5 &= g_{101}(e_{51}N_{101} + e_{52}N_{201} + e_{53}N_{30}), & z_6 &= h_{101}(e_{61}N_{101} + e_{62}N_{201} + e_{63}N_{30}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

где e_{rg} ($r = \overline{1, 6}, g = \overline{1, 3}$) – постоянные.

Составляя сумму проекций на координатные оси напряжений по сферической поверхности с центром в вершине конуса аналогично [17], получим систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\sum_{i=1}^3 G_{sg} z_{0s} = H_g \quad (g = \overline{1, 3})$$

$$\begin{aligned} z_{01} &= N_{101}(b_{11}a_{1011} + b_{12}a_{1013} + b_{13}a_{1012} + b_{14}a_{1014} + b_{15}g_{101} + b_{16}h_{101}) \\ z_{02} &= N_{201}(b_{21}a_{1011} + b_{22}a_{1013} + b_{23}a_{1012} + b_{24}a_{1014} + b_{25}g_{101} + b_{26}h_{101}) \\ z_{03} &= N_{30}(b_{31}a_{1011} + b_{32}a_{1013} + b_{33}a_{1012} + b_{34}a_{1014} + b_{35}g_{101} + b_{36}h_{101}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

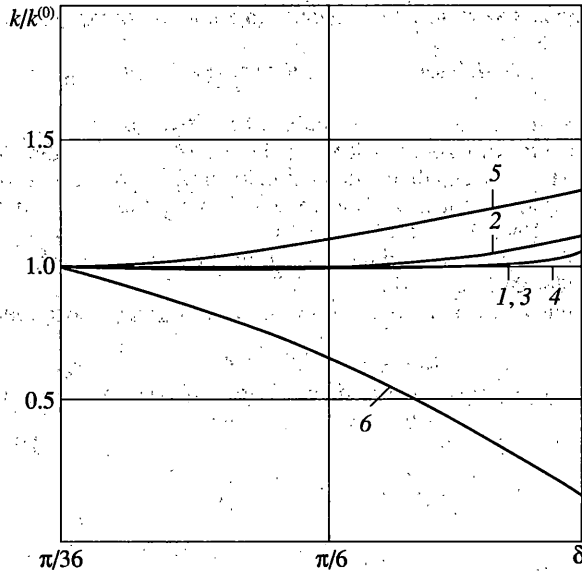
Коэффициенты интенсивности напряжений вблизи особой линии находятся по формулам работы [13] в принятых там обозначениях:

$$k_{11} = 2\sqrt{2}\mu_0 \left[\frac{z_1}{\cos \omega_1} - \frac{(\kappa_0 + \mu)z_3}{\gamma(1 + \kappa_0) \sin \omega_3} \right], \quad k_{12} = 2\sqrt{2}\mu_0 \left[\frac{z_2}{\cos \omega_2} - \frac{(\kappa_0 + \mu)}{\gamma(1 + \kappa_0) \sin \omega_4} \right]$$

$$k_{21} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 \kappa_0 (1 - \mu)z_3}{\gamma(1 + \kappa_0) \sin \omega_3}, \quad k_{22} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 \kappa_0 (1 - \mu)z_4}{\gamma(1 + \kappa_0) \cos \omega_4}$$

$$k_{31} = 2^{-1/2} \mu_0 (z_5 \cos \lambda_5 \varphi_1 + z_6 \sin \lambda_5 \varphi_1), \quad k_{32} = 2^{-1/2} \mu_0 (z_5 \sin \lambda_5 \varphi_1 - z_6 \cos \lambda_5 \varphi_1)$$

и где z_s ($s = \overline{1, 6}$) даются формулами (4.6).



Коэффициенты интенсивности напряжений вблизи вершины конического включения записываются согласно формулам работы [8], где величины N_{101}, N_{201}, N_{30} заменяются соответственно на z_{01}, z_{02}, z_{03} (4.8).

Зависимость относительных величин $k_{11}/k_{11}^{(0)}$ (кривая 1), $k_{12}/k_{12}^{(0)}$ (2), $k_{21}/k_{21}^{(0)}$ (3), $k_{22}/k_{22}^{(0)}$ (4), $k_{31}/k_{31}^{(0)}$ (5), $k_{32}/k_{32}^{(0)}$ (6) от величины угла δ наклона образующей к основанию показана на фигуре.

$k_{11}^{(0)}, k_{12}^{(0)}, k_{21}^{(0)}, k_{22}^{(0)}, k_{31}^{(0)}, k_{32}^{(0)}$ – коэффициенты интенсивности при величине угла наклона образующей конуса к его основанию равной $\pi/36$.

В приведенном примере для одной и той же сингулярности, как следует из графиков, коэффициенты интенсивности остаются неизменными в окружном направлении особой линии, такая же ситуация имеет место вблизи конической точки, что обусловлено как геометрической симметрией, так и симметрией тепловой нагрузки.

Таким образом, интенсивность термонапряжений вблизи особенностей поверхностей раздела сред характеризуется как порядком сингулярности, так и коэффициентами интенсивности напряжений, и для одной и той же сингулярности существенной характеристикой выступают коэффициенты интенсивности напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисюк И.Т. Термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями // Изв. РАН. МТГ. 1999. № 2. С. 148–155.
2. Денисюк И.Т. Термонапряжения в анизотропной пластине с кузовыми включениями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1999. Т. 35. № 3. С. 59–68.
3. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища шк., 1975. 216 с.
4. Лыков А.В. Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 480 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
7. Денисюк И.Т. Термонапряжения біля вершини кутового многогранного включення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2001. Т. 37. № 1. С. 41–47.

8. Денисюк И.Т. Напряжения вблизи конической точки поверхности раздела сред // Изв. РАН. МТГ. 2001. № 3. С. 68–77.
9. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
10. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.А., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1968. 627 с.
11. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958. 244 с.
12. Денисюк И. Т. Сингулярні напруження в ізотропній матриці з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1992. Т. 28. № 4. С. 76–81.
13. Денисюк И.Т. Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред // Изв. РАН. МТГ. 1995. № 5. С. 64–70.
14. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
15. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
16. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высш. шк., 1966. 227 с.

Луцк

Поступила в редакцию
10.01.2002