МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2004

УДК 531.55:521.1

© 2004 г. С.А. АГАФОНОВ, А.Д. ГЕРМАН

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНИХ МОМЕНТОВ

Решается задача стабилизации стационарного движения (цилиндрической прецессии) динамически симметричного спутника-гиростата с помощью приложения внешних моментов. Центр масс спутника движется по круговой орбите. Задача решается в строгой нелинейной постановке. В фазовом пространстве находится оценка области притяжения стационарного движения, выраженная в терминах самой системы. Для решения поставленной задачи применяется теорема об устойчивости механической системы под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных, а также неконсервативных позиционных сил [1].

1. Уравнения движения спутника-гиростата. Постановка задачи стабилизации. Рассматривается движение динамически симметричного спутника-гиростата, центр масс которого движется по круговой орбите с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$. Два главных центральных момента инерции равны друг другу $A = B$, момент инерции относительно оси симметрии равен C. Вдоль этой оси расположен динамически симметричный ротор. За обобщенные координаты удобно принять углы Эйлера θ, φ, ψ, причем при $\theta = 0$ ось динамической симметрии спутника направлена вдоль радиус-вектора орбиты центра масс [2]. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$\begin{aligned} L = {} & 1/2A(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2 - \omega_0^2\cos^2\psi\sin^2\theta + 2\dot\psi\omega_0\cos\psi\sin\theta\cos\theta + 2\omega_0\dot\theta\sin\psi) + \\ & + 1/2C(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi - \omega_0\cos\psi\sin\theta)^2 - 3/2\omega_0^2(C - A)\cos^2\theta + 1/2J(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi_0 - \omega_0\cos\psi\sin\theta)^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где J – момент инерции ротора относительно оси симметрии, $\dot\varphi_0$ – его угловая скорость. После исключения циклических координат φ и φ_0 уравнения движения гиростата приводятся к виду

$$\begin{aligned} & A(\ddot\theta + \omega_0\cos\psi\dot\psi - \dot\psi^2\sin\theta\cos\theta + \omega_0^2\cos^2\psi\sin\theta\cos\theta + \dot\psi\omega_0\cos\psi\cos2\theta) + \\ & + (C\Omega - J\Omega_0)(\dot\psi\sin\theta + \omega_0\cos\psi\cos\theta) - 3\omega_0^2(C - A)\cos\theta\sin\theta = M_\theta \\ & A(\sin^2\theta\ddot\psi + \sin2\theta\dot\theta\dot\psi + \omega_0\cos\psi\cos2\theta\dot\theta - \omega_0^2\cos\psi\sin\psi\sin^2\theta - \omega_0\cos\psi\dot\theta) - \\ & - (C\Omega - J\Omega_0)(\dot\theta\sin\theta + \omega_0\sin\psi\sin\theta) = M_\psi \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $C\Omega$, $-J\Omega_0$ – циклические постоянные, отвечающие циклическим координатам φ и φ_0; M_θ и M_ψ – стабилизирующие внешние моменты, формирующиеся по известным значениям компонент p и q угловой скорости спутника, а также по значениям углов Эйлера, полученным из решения задачи Дарбу [3]. Эти моменты имеют вид

$$\begin{aligned} M_\theta & = -b_0(p\cos\varphi - q\sin\varphi) - J\Omega_0\omega_0\cos\psi\cos\theta = -b_0(\dot\theta + \omega_0\sin\psi) - J\Omega_0\omega_0\cos\psi\cos\theta \\ M_\psi & = -b_0(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + J\Omega_0\omega_0\sin\psi\sin\theta = \\ & = -b_0(\dot\psi\sin\theta + \omega_0\cos\psi\cos\theta) + J\Omega_0\omega_0\sin\psi\sin\theta \end{aligned} \tag{1.3}$$

Уравнения движения (1.2) с учетом выражений для внешних моментов (1.3) имеют решение

$$\theta = \pi/2, \quad \dot\theta = 0, \quad \psi = \pi, \quad \dot\psi = 0 \tag{1.4}$$

Оно отвечает стационарному движению, которое называется цилиндрической прецессией. В публикуемой работе решается задача о стабилизации (до асимптотической устойчивости) стационарного движения (1.4) с нахождением оценки области притяжения. С этой целью применим теорему об устойчивости систем общего вида [1].

2. Теорема об устойчивости механической системы общего вида. Уравнения движения механической системы под действием диссипативных, гироскопических, потенциальных и неконсервативных позиционных сил (система общего вида) можно привести к виду

$$\ddot{x} + B\dot{x} + hC\dot{x} + Kx + Fx = X(x, \dot{x}) \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $B^T = B$, $G^T = -G$, $K^T = K$, $F^T = -F$ – постоянные матрицы, характеризующие диссипативные, гироскопические, потенциальные и неконсервативные позиционные силы соответственно; $h > 0$ – скалярный параметр; $X(x, \dot{x})$ – совокупность нелинейных членов не ниже второго порядка относительно x, $\dot{x}$, удовлетворяющая неравенству

$$\begin{gathered} \|X(x, \dot{x})\| < a_0(x^T x + \dot{x}^T \dot{x}) \\ a_0 > 0, \quad \|X(x, \dot{x})\| = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{1/2} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Будем предполагать, что диссипация полная, т.е. $\dot{x}^T B\dot{x} > 0$ при $\dot{x} \neq 0$ и $\det G \neq 0$. Предположим также, что матрица $S = G^T F + F^T G + KG - GK$ положительно определена (как показано в [1], это условие отбросить нельзя). Анализ устойчивости проводится с помощью функции

$$\begin{gathered} V = (\dot{x} - h^{-1}P^T x)^T (\dot{x} - h^{-1}P^T x) + x^T (G^T G - h^{-2} P P^T) x \\ P = (K - F)G^{-1} + G \end{gathered} \tag{2.3}$$

Условием положительной определенности функции (2.3) является неравенство $h > \sqrt{c_0/g_0}$, где c_0 и g_0 – соответственно максимальное и минимальное собственные значения матриц PP^T и $G^T G$. Имеет место следующая теорема [1].

Теорема. Если матрица $S = G^T F + F^T G + KG - GK$ положительно определена, то при $h > h_0$ система (2.1) асимптотически устойчива и, кроме того, область $V < 1/4\gamma^2$ принадлежит области притяжения равновесия $x = 0$, $\dot{x} = 0$.

В формулировке теоремы h_0 и γ вычисляются по формулам

$$h_0 = \max\left(\sqrt{\frac{c_0}{g_0}}, \frac{c_1\mu + b_0^2 c_0}{2b\mu}\right) \tag{2.4}$$

$$\gamma = \frac{1}{2a_0}\left\{\frac{\mu - c_1}{h} + 2b - \sqrt{\left(\frac{\mu - c_1}{h} + 2b\right)^2 - 4\left[\left(2b - \frac{c_1}{h}\right)\frac{\mu}{h} - \frac{b_0^2 c_0}{h^2}\right]}\right\} \tag{2.5}$$

где μ и b – наименьшие собственные значения матриц S и B; b_0 – наибольшее собственное значение матрицы B и c_1 – наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы $P + P^T$.

Применим эту теорему для анализа стабилизации спутника-гиростата.

3. Уравнения возмущенного движения. Условия стабилизации и оценка области притяжения. Уравнения возмущенного движения, полученные из уравнений (1.2) с помощью подстановки $\theta = \pi/2 + x_1$, $\dot\theta = \dot x_1$, $\psi = \pi + x_2$, $\dot\psi = \dot x_2$ можно записать в безразмерном виде

$$x_1'' + bx_1' - h\left(1 + \frac{2-\beta}{h}\right)x_2' + (3\alpha - 4 + \beta)x_1 - bx_2 = X_1$$

$$x_2'' + bx_2' + h\left(1 + \frac{2-\beta}{h}\right)x_1' + (\beta - 1)x_2 + bx_1 = X_2 \tag{3.1}$$

$$\alpha = \frac{C}{A}, \quad \beta = \frac{C\Omega}{A\omega_0}, \quad h = \frac{J\Omega_0}{A\omega_0}, \quad b = \frac{b_0}{A\omega_0}$$

Здесь штрих обозначает производную по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$; X_1 и X_2 – совокупность членов не ниже второго порядка относительно x_1, x_1', x_2, x_2'. Эти нелинейные члены имеют вид

$$X_1 = -x_2'^2\sin x_1\cos x_1 + 2\left(2\sin^2\frac{1}{2}x_2 + \cos x_2\sin^2 x_1\right)x_2' +$$

$$+\left[2(3\alpha-4)\sin^2\frac{1}{2}x_1 - \sin^2 x_2\cos x_1\right]\sin x_1 + (3\alpha - 4 + \beta)(x_1 - \sin x_1) + b(x_2 - \sin x_2)$$

$$X_2 = 2\operatorname{tg}x_1 x_1' x_2' - \frac{2\sin^2\frac{1}{2}x_1}{\cos x_1}x_2' - (h + 2 - \beta)\operatorname{tg}^2 x_1 x_1' +$$

$$+2\left(2\sin^2\frac{1}{2}x_2\cos^2 x_1 + \sin^2 x_1\right)\frac{x_1'}{\cos^2 x_1} + (\beta - 1)(x_2 - \sin x_2) - \tag{3.2}$$

$$-\left(\beta\cos x_1\operatorname{tg}^2 x_1 - 2\beta\sin^2\frac{1}{2}x_1 + 2\sin^2\frac{1}{2}x_2\right)\sin x_2 +$$

$$+b\left(2\sin^2\frac{1}{2}x_2 - \operatorname{tg}^2 x_1\cos x_2\right)\sin x_1 + b(x_1 - \sin x_1)$$

Уравнения возмущенного движения (3.1) можно записать в векторной форме (2.1), где $x = (x_1, x_2)^T$, и

$$B = bE, \quad G = \begin{Vmatrix} 0 & -\left(1 + \frac{2-\beta}{h}\right) \\ 1 + \frac{2-\beta}{h} & 0 \end{Vmatrix}$$

$$F = \begin{Vmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{Vmatrix}, \quad K = \begin{Vmatrix} 3\alpha - 4 + \beta & 0 \\ 0 & \beta - 1 \end{Vmatrix}$$

Вычисления приводят к следующим выражениям для параметров c_0, g_0, b_0, b, μ и c_1:

$$c_0 = 1/2[d_1 + d_2 + \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + 4c^2}]$$

$$d_1 = \frac{b^2}{\eta^2} + \left(\frac{\lambda_1}{\eta} - \eta\right)^2, \quad d_2 = \frac{b^2}{\eta^2} + \left(\frac{\lambda_2}{\eta} - \eta\right)^2$$

$$c = \frac{b(\lambda_2 - \lambda_1)}{\eta^2}, \quad \lambda_1 = 3\alpha - 4 + \beta, \quad \lambda_2 = \beta - 1 \tag{3.3}$$

$$g_0 = \eta^2, \quad b_0 = b, \quad \mu = \eta(2b - 3|1-\alpha|)$$

$$c_1 = \frac{2b + |\lambda_1 - \lambda_2|}{\eta}, \quad \eta = 1 + \frac{2-\beta}{h}$$

Условием положительной определенности матрицы $S = G^TF + F^TG + KG - GK$ является выполнение неравенств

$$\eta > 0, \quad 2b > 3|1-\alpha| \tag{3.4}$$

Так как в выражения (3.2) для X_1 и X_2 входят члены порядка не ниже третьего относительно x_1, x_1', x_2, x_2', то оценка вида (2.2) искалась в области $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$. Опуская громоздкие вычисления, приведем выражение для этой оценки

$$\|X(x_1, x_1', x_2, x_2')\| \le a_0(x_1^2 + x_2^2 + x_1'^2 + x_2'^2)$$

$$a_0 = \max(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2}|3\alpha - 4| + \frac{1}{6}|3\alpha - 4 + \beta| + \frac{1}{4\cos 1} + \frac{1}{2\cos^2 1}|h + 2 - \beta| +$$

$$+ \frac{1}{2\cos^2 1} + \beta\left(\operatorname{tg} 1 + \frac{1}{2}\sin 1\right) + \frac{b}{\cos^2 1} + \frac{1}{6}b$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}b\right) + \frac{1}{2\cos^2 1} + \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{6}|\beta - 1| + \frac{1}{2}b$$

$$a_3 = \operatorname{tg} 1 + \frac{|h + 2 - \beta|}{2\cos^2 1} + \frac{1}{\cos^2 1}, \quad a_4 = \frac{5}{2} + \operatorname{tg} 1 + \frac{1}{4\cos 1}$$

Применяя теорему п. 2, сформулируем окончательный результат.

Пусть матрица $S = G^TF + F^TG + KG - GK$ является положительно определенной (т.е. выполнены неравенства (3.4)) и

$$h > h_0, \quad h_0 = \max\left(\sqrt{\frac{c_0}{g_0}}, \frac{c_1\mu + b_0^2 c_0}{2b\mu}\right)$$

где параметры c_0, g_0, c_1, b_0, μ вычисляются по формулам (3.3). Тогда стационарное движение (1.4) асимптотически устойчиво, а область

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \eta^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{2b}{h\eta}(x_1x_1' + x_2x_2') - \frac{2}{h}\left(\frac{3\alpha - 4 + \beta}{\eta} - \eta\right)x_1x_2' -$$

$$- \frac{2}{h}\left(-\frac{\beta - 1}{\eta} + \eta\right)x_2x_1' < \frac{1}{4}\gamma^2$$

где γ вычисляется по формуле (2.5), принадлежит области притяжения стационарного движения (1.4).

Работа поддержана программой NATO Science Fellowship.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agafonov S.A.* On the stability of nonconservative systems with estimation of the attraction domain // J. Dynamical and Control Systems. 2000. V. 6. № 4. P. 503–510.
2. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
3. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.04.2002