

УДК 531.36

© 2004 г. В.А. САМСОНОВ, Ю.Д. СЕЛЮЦКИЙ

## **О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ**

В задаче о поступательных колебаниях твердых пластин (крыльев, лопастей и т.п.) в потоке среды для описания воздействия среды на пластину предложен подход, в рамках которого внутренняя динамика среды моделируется присоединенным осциллятором. Показано, что для достаточно широкого диапазона условий движения и аэродинамических характеристик пластин существует универсальный набор значений параметров модели, который обеспечивает хорошее согласование с известными экспериментальными данными. Проведен эффективный параметрический анализ рассматриваемой задачи. Это позволило сформулировать конструктивные критерии применимости традиционной квазистатической модели в этой задаче.

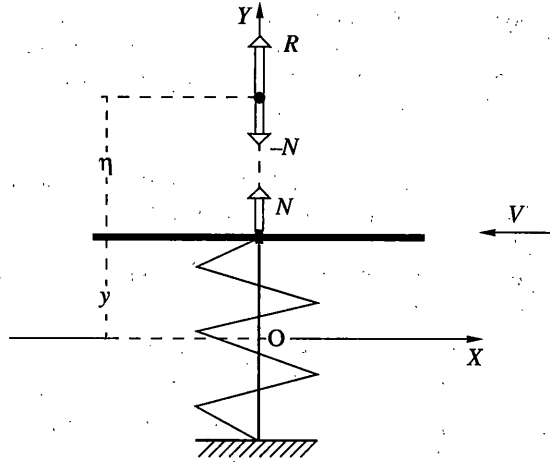
**1. Введение.** Изучение неравномерного движения тела в среде представляет собой достаточно сложную задачу. Методики, применяющиеся в нестационарной гидродинамике, позволяют получить численное решение задачи, но требуют достаточно громоздких вычислений, что весьма затрудняет параметрический анализ. Поэтому для прикидочных оценок часто используется квазистатический подход, в котором предполагается, что характеристики воздействия среды при неравномерном движении тела имеют такую же структуру и зависят от угла атаки так же, как и в стационарном случае, но сам угол атаки считается функцией фазовых координат тела. Этот подход позволяет существенно упростить задачу и провести параметрический анализ, но точность его не всегда достаточна. В публикуемой работе для тел типа тонких пластинок (крыльев, лопастей и т.п.) внутренняя динамика среды моделируется с помощью всего лишь одной степени свободы. Такой прием привел к вполне удовлетворительному согласованию с известной экспериментальной и расчетной информацией.

Ограничимся наиболее простым случаем поступательного движения тела и смоделируем только одну из компонент силы, действующей на тело со стороны среды.

**2. Осциллятор в потоке среды.** Рассмотрим пластину, которая может совершать возвратно-поступательное движение вдоль неподвижной прямой  $L$ , ортогональной плоскости пластины (фиг. 1). Введем неподвижную систему координат  $XYZ$ , начало которой поместим в некоторую точку прямой, вдоль которой движется центр масс пластины, ось  $Y$  направим вдоль прямой  $L$ , а ось  $X$  – перпендикулярно ей. Плоскость пластины параллельна плоскости  $XZ$ . Обозначим через  $u$  ординату центра масс.

Пусть силы, действующие на пластину со стороны крепления, сводятся к упругой силе  $F = -ku$ .

Предположим теперь, что пластина помещена в поток среды, скорость  $V$  которого на бесконечности постоянна и параллельна оси  $X$ . С учетом специфики движения пластины будем интересоваться только нормальной к пластине составляющей  $N$  аэродинамической силы. Воздействием потока на элементы крепления будем пренебрегать.



Фиг. 1

Тогда уравнение движения пластины имеет следующий вид:

$$M\ddot{y} = -ky + N$$

Построим модель для силы  $N$ .

**3. Модель воздействия среды.** Очевидно, что при движении пластины среда обладает некоторым количеством движения  $p_y$  в направлении оси  $Y$ . Будем считать, что количество движения является конечным, и введем фиктивную обобщенную скорость  $\dot{\eta}$  по формуле

$$p_y = m(\dot{y} + \dot{\eta})$$

где  $m$  – некоторый постоянный коэффициент, имеющий размерность массы.

Отметим, что  $\dot{\eta}$  служит интегральной характеристикой скорости движения среды относительно пластины, а соответствующая ей координата  $\eta = \eta_0 + \int_0^t \dot{\eta} dt$  (своего рода “скрытая” координата) – поперечного “смещения” потока относительно пластины (нечто вроде меры асимметрии потока). Таким образом, относительное движение среды в поперечном направлении имитируется материальным объектом  $G$ , имеющим массу  $m$ , положение которого задается координатой  $\eta$ .

Отметим, что введенная таким образом характеристика положения отличается от традиционных для теоретической механики. Во-первых, она недоступна непосредственному измерению, т.к. интеграл зависит от истории движения среды. Во-вторых, начальное значение  $\eta_0$ , в общем случае, неопределенно. Однако, как известно, неизмеряемая величина может быть наблюдаемой, т.е. ее значение в любой момент времени (в том числе, и в начальный) может быть восстановлено в силу динамической системы по данным о тех координатах, которые доступны измерению (в первую очередь,  $y$  и  $\dot{y}$ ).

Сила  $N$ , действующая на тело со стороны объекта  $G$ , является внутренней для системы “тело + среда”. Естественно считать, что она зависит лишь от относительных фазовых координат  $\eta$  и  $\dot{\eta}$ . Тогда ее структуру в линейном приближении можно представить следующим образом:

$$N = k\eta + d\dot{\eta}$$

На объект  $G$  действует сила  $N$  со стороны тела и сила  $R$ , действующая на поток среды со стороны бесконечно удаленной границы (реакция связи, обеспечивающая постоянство скорости вдали от тела). Будем предполагать, что эта сила имеет ту же структуру, что и в стационарном случае, т.е.

$$R = 1/2\rho SVn(-\dot{\eta} - \dot{y}) \quad (3.1)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $S$  – площадь единицы длины пластины,  $n$  – безразмерный коэффициент нормальной силы (так называемая производная от коэффициента нормальной силы по углу атаки).

Перейдем к безразмерному времени  $\bar{t} = tV/b$  ( $b$  – ширина пластины) и введем следующие безразмерные величины и параметры:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{b}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{m} = \frac{2m}{\rho Sb}, \quad \bar{M} = \frac{2M}{\rho Sb}, \quad \bar{k} = \frac{2kb}{\rho V^2 S}, \quad \bar{d} = \frac{2d}{\rho VS}, \quad \bar{\kappa} = \frac{2\kappa b}{\rho V^2 S}$$

Далее для упрощения записи будем опускать черту над безразмерными величинами. Составим для пластины и объекта  $G$  уравнения движения:

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= -\kappa y + k\eta + d\dot{\eta} \\ m(\ddot{y} + \ddot{\eta}) &= -k\eta - d\dot{\eta} + n(-\dot{\eta} - \dot{y}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Таким образом, относительное движение среды заменяется “присоединенным осциллятором”. Заметим, что подобные модели, но в другой форме, уже строились в прикладной аэродинамике.

Так, в [1] было показано, что для описания зависимости нормальной составляющей аэродинамической силы от времени достаточно аппроксимировать ядро функционала, описывающего эту силу, суммой всего двух экспонент. Опираясь на это обстоятельство, авторы [1] присоединили к исходной системе такую динамическую систему второго порядка, в которой сила  $N$  является одной фазовой координатой, а другой фазовой координатой является величина  $\dot{N}$ . Позднее подобный подход развивался в задачах динамики плохообтекаемых тел [2], где к исходным уравнениям также добавляли обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно силы (как правило, типа уравнения Дюффинга).

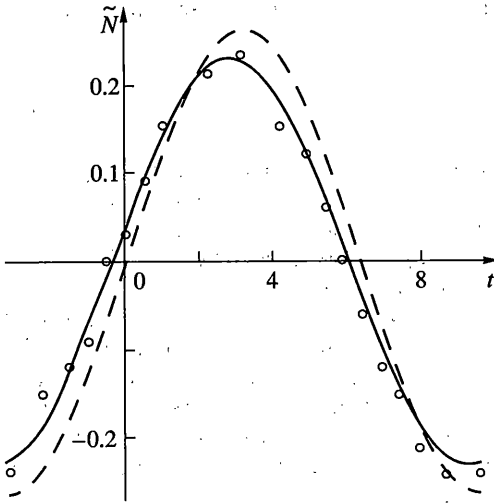
**4. Тестирование модели.** Далее задача состоит в том, чтобы подобрать значения параметров  $m$ ,  $k$ ,  $d$  таким образом, чтобы результаты расчетов по предложенной схеме по возможности хорошо описывали поведение нормальной силы в экспериментах.

В [3–6] описаны результаты экспериментов с тонкими крыльями, совершающими вынужденные поступательные гармонические колебания в потоке среды ( $y = a\cos\Omega t$ , где  $\Omega$  – так называемое число Струхала). В этих работах использовались крылья с различными удлинениями (все тонкие) и аэродинамическими характеристиками. При разных амплитудах и частотах колебаний измерялись компоненты силы воздействия среды. Как показывают результаты экспериментов, при  $\Omega < 2$  гармоническое движение пластины вызывает гармонический же отклик среды, т.е. оператор соответствующего преобразования, скорее всего, является линейным. Это позволяет ожидать, что при таких  $\Omega$  можно пользоваться линейной моделью.

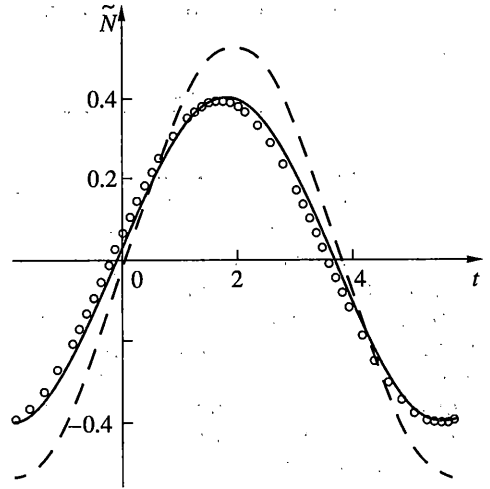
Для того, чтобы описать такое движение, необходимо в первом из уравнений (3.2) заменить упругую силу  $-\kappa y$  на вынуждающую силу  $F_e$ , которая и будет поддерживать гармоническое колебательное движение.

Для аппроксимации экспериментальной зависимости безразмерной нормальной силы от времени имеем

$$\bar{N}(t) = 2N(t)/(\rho SV^2) = k\eta + d\dot{\eta} \quad (4.1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Так как пластина совершает гармонические поступательные колебания, то из второго уравнения (3.2) получим

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t) = & \frac{a\Omega(nk^2 + dm^2\Omega^4 + dn\Omega^2(d+n))}{(k - m\Omega^2)^2 + (d+n)^2\Omega^2} \sin(\Omega t) + \\ & + \frac{a\Omega^2(mk(k - m\Omega^2) - kn + m\Omega^2 d^2)}{(k - m\Omega^2)^2 + (d+n)^2\Omega^2} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Как видно из (4.2), первое слагаемое находится в противофазе со скоростью пластины, а второе имеет относительно нее сдвиг фазы на  $\pi/2$ . При малых  $\Omega$  второе слагаемое становится пренебрежимо малым по сравнению с первым, что свидетельствует о применимости квазистатической модели.

Примем массу объекта  $G$  равной известной из теории присоединенной массе тонкой пластинки, обтекаемой идеальной жидкостью, с учетом удлинения этой пластинки ( $m = 1-1.57$ ). При этом оказывается, что, несмотря на отличия аэродинамических характеристик испытывавшихся профилей (значения коэффициента  $n$  изменялись от 2.8 до 7.0) и параметров колебаний ( $a = 0.15-0.3$ ,  $\Omega = 0.5-2$ ) можно положить для всех экспериментов  $k = 2$  и  $d = 12$ . Результаты расчетов по формуле (4.2) достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными (см. фиг. 2 ( $a = 0.2$ ,  $\Omega = 0.492$ ,  $n = 2.8$ ) и фиг. 3 ( $a = 0.15$ ,  $\Omega = 0.825$ ,  $n = 4.3$ ), где расчетные кривые изображены сплошными линиями, квазистатическая зависимость – штриховыми, а экспериментальная – кружками).

При этом амплитуда колебаний присоединенного осциллятора находится в диапазоне 0.04–0.07.

**5. Свойства парциальной системы.** Нетрудно видеть, что релаксационный процесс для присоединенного осциллятора (при условии, что пластина покоится) описывается уравнением

$$m\ddot{\eta} = -k\eta - (d+n)\dot{\eta}$$

Отсюда для корней характеристического уравнения получаются следующие выражения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(d+n) \pm \sqrt{(d+n)^2 - 4km}}{2m} \quad (5.1)$$

При указанных значениях параметров осциллятора характеристические корни вещественные и отрицательные ( $\lambda_1 \approx -0.1$ ,  $\lambda_2 \approx -10$ ), следовательно, переход в состояние покоя носит характер аperiодического колебания. Отметим, что в парциальной системе при таких значениях параметров имеет место разделение движений.

Теперь проведем параметрический анализ системы (3.2).

**6. Параметрический анализ.** Очевидно, что упруго закрепленная пластина имеет положение равновесия в стационарном потоке. При этом  $y = \eta = 0$ . Малые колебания в окрестности этого положения равновесия в силу предложенной модели описываются четырьмя экспонентами. Однако уже в парциальной системе движения разделяются, что позволяет надеяться на то, что и в полной системе в некоторых ситуациях можно провести разделение движений. Проанализируем возможности разделения малых движений системы на основе уравнений (3.2).

Напомним, что безразмерные параметры присоединенного осциллятора, как следует из сказанного выше, весьма слабо зависят от параметров пластины и скорости потока. Однако безразмерная масса пластины зависит от геометрических размеров пластины и плотности среды, а безразмерный коэффициент жесткости пружины крепления – еще и от скорости потока.

Пусть масса тела “велика”. Введем малый параметр  $\epsilon = 1/\sqrt{M}$ , перейдем к медленному времени  $\tau = \epsilon t$  и запишем систему (4.2) в виде системы уравнений первого порядка. Для этого введем новые переменные  $y_1 = y$ ,  $v = \dot{y}/\epsilon$ ,  $\eta_1 = \eta$  и  $\eta_2 = \dot{\eta}$ . Получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= v, & \frac{dv}{d\tau} &= -ky_1 + k\eta_1 + d\eta_2 \\ \epsilon \frac{d\eta_1}{d\tau} &= \eta_2 \\ \epsilon \frac{d\eta_2}{d\tau} &= -\frac{k}{m}\eta_1 - \frac{(d+n)}{m}\eta_2 - \frac{n}{m}v + \epsilon^2(ky_1 - k\eta_1 - d\eta_2) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Нетрудно показать, что в случае  $\epsilon \ll 1$  происходит разделение движений на быстрые (движение точки  $G$  на пружине) и медленные (движение пластины), причем движение пластины с точностью до первого порядка малости по  $\epsilon$  описывается уравнением

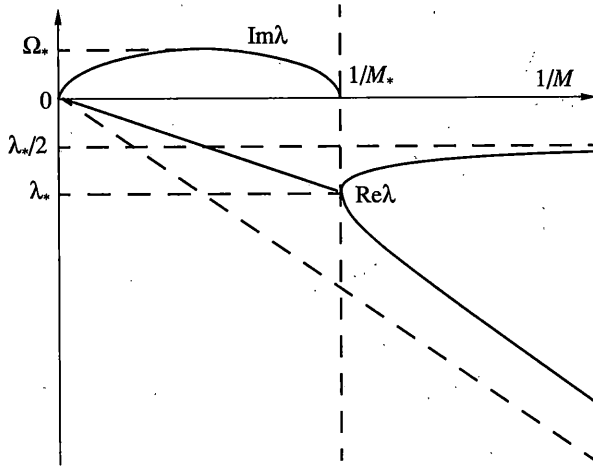
$$d^2y/d\tau^2 = -ky - \epsilon ndy/d\tau$$

или, возвращаясь к обычному времени, уравнением

$$M\ddot{y} = -ky - n\dot{y} \quad (6.2)$$

которое совпадает с уравнением движения профиля в силу квазистатической модели. Таким образом, в случае большой массы пластины поведение пластины достаточно хорошо описывается квазистатической моделью.

При уменьшении значения параметра  $M$  может оказаться невозможным выделить из полной системы “квазистатическую” подсистему, т.е. квазистатическая модель будет неприменима. Попытаемся более точно очертить границы ее применимости.



Фиг. 4

На фиг. 4 приведены графики зависимости характеристических корней квазистатического уравнения (6.2) от величины  $1/M$  (в верхней полуплоскости изображены мнимые части, в нижней – вещественные). При  $M \geq M_* = 1/4 n^2/k$  корни являются комплексными, при  $M \leq M_*$  – вещественными. Ясно, что движение системы будет близко к тому, которое дается квазистатической моделью, только если характеристические корни этой модели по модулю много меньше наименьшего по модулю ( $\sim 0.1$ ) характеристического корня присоединенного осциллятора.

Нетрудно видеть, что если выполнено условие

$$-\lambda_* = \frac{2k}{n} \sim \frac{k}{d+n} \sim 0.1 \tag{6.3}$$

то квазистатическая модель оказывается применимой только для больших  $M$ :

$$M \gg M_* = 1/4 n^2/k \sim 5n \tag{6.4}$$

В этом случае во всей области применимости квазистатической модели “медленные” движения представляют собой колебания с экспоненциально убывающей амплитудой.

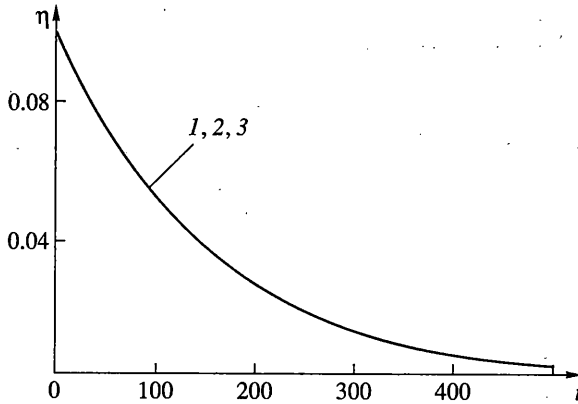
Если же значение параметра  $k$  достаточно мало, т.е. выполнено условие

$$-\lambda_* \ll 0.1 \tag{6.5}$$

то область применимости квазистатической модели “включает” в себя область аперiodических колебаний и определяется условием

$$\frac{n}{2M} + \frac{\sqrt{n^2 - 4kM}}{2M} \ll 0.1 \tag{6.6}$$

Отметим, что в случае (6.5) при малых значениях  $M$  в (6.2) отделяется «медленное» движение с малым по модулю характеристическим показателем ( $\lambda_1 \approx -k/n$ ). Это отделение сохраняется и в силу полной системы (3.2). Квазистатическая модель оказывается неприменимой. Однако почти при всех начальных условиях движение системы описывается главным образом экспонентой с показателем  $\lambda_1$ .



Фиг. 5

Как было замечено выше, предложенная модель адекватно описывает воздействие среды на пластину при  $\Omega \leq 2$ . Поскольку  $\Omega$  представляет собой мнимую часть характеристических корней, то еще одно условие применимости модели будет выглядеть так:

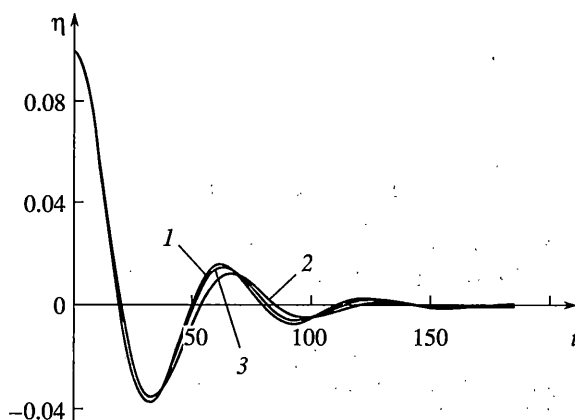
$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4\kappa M - n^2}}{M} \leq 2 \quad (6.7)$$

Поскольку  $\Omega \leq \Omega_* = \kappa/n$ , то при выполнении условия (6.5) неравенство (6.7) выполняется для всех  $M \geq M_*$ . Если же выполнено условие (6.3), неравенство (6.7) справедливо, только если  $M$  достаточно велико.

**7. Примеры.** В [1] приведены результаты расчета положения профиля в зависимости от времени в случае, когда профиль совершает затухающие колебания на пружине в потоке среды. Были рассмотрены два случая: (1)  $M = 2$ ,  $\kappa = 0.02$ ,  $n = 3.14$  и (2)  $M = 100$ ,  $\kappa = 1$ ,  $n = 6.28$ .

Для первого случая результаты приведены на фиг. 5. Здесь кривая с индексом 1 обозначает расчет работы [1], кривая с индексом 2 – расчет по квазистатической модели, а кривая с индексом 3 – расчет по предложенной модели. Видно, что все три кривые практически совпадают. Отметим, что в данном случае условие (6.5) выполнено, т.е. при некоторых значениях массы профиля ( $M > 200$ ) квазистатическая модель применима, причем движение описывается двумя экспонентами с вещественными показателями, однако для данного значения массы ( $M = 2$ ) не выполняется условие (6.6). Тем не менее, движение для почти всех начальных условий главным образом описывается экспонентой с наименьшим показателем ( $\lambda_1 \approx 0.007$ ), что и обуславливает совпадение всех трех расчетных кривых.

Для второго случая результаты приведены на фиг. 6 (обозначения те же). Видно, что первая и третья кривые практически совпадают. В этом случае выполняется условие (6.3), т.е. в области применимости квазистатической модели медленные движения профиля описывается двумя экспонентами с комплексными показателями. Условие же (6.4) для данного значения массы принимает вид  $100 \gg 31.4$ , что говорит о том, что точность квазистатической модели в данном случае не очень высока. И, как явствует из фигуры, отличие квазистатической зависимости от зависимостей, даваемых более точными моделями, имеет порядок 10%.



Фиг. 6

**8. Заключение.** Таким образом, показано, что в случае поступательного движения пластины предложенная модель нормальной составляющей силы воздействия потока среды обладает определенной универсальностью. Она дает вполне адекватное описание отклика среды для того диапазона значений числа Струхала, в котором этот отклик является линейным.

Эта модель использована для эффективного параметрического анализа задачи о колебаниях пластины в потоке среды. Сформулированы критерии применимости квазистатической модели в этой задаче.

Выражаем признательность В.П. Карликову, А.Н. Хомякову, обративших внимание авторов на обсуждаемую проблему, и Э.П. Гребешову за облегчение доступа к экспериментальной информации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00190), программы “Университеты России” и гранта Президента РФ МК-263.2003.01.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Локтев Б.Е., Томшин В.М. Линейные и квазилинейные задачи динамики жесткого аппарата с отклоняющимися рулями // Тр. ВВИА им. Жуковского. 1971. Вып. 1302. С. 110–146.
2. Рябинин А.Н. Некоторые задачи аэродинамики плохообтекаемых тел // СПб.: Изд-во СПб. Ун-та, 1997. 141 с.
3. Гребешов Э.П., Шакарвене Е.П. Нестационарные аэродинамические характеристики трех прямоугольных крыльев различного удлинения // Тр. ЦАГИ. 1990. Вып. 2485. С. 3–31.
4. Махортых Г.В., Шеглова М.Г. Экспериментальное исследование коэффициентов производных нормальной силы прямоугольных крыльев при поступательных колебаниях // Учен. зап. ЦАГИ. 1990. Т. 21. № 1. С. 11–20.
5. Liiva J. Unsteady aerodynamic and stall effects on helicopter rotor blade airfoil section // J. Aircraft. 1969. V. 6. № 1. P. 46–51.
6. Ericsson L.E., Reding J.P. Dynamic stall analysis in light of recent numerical and experimental results // AIAA Paper. 1975. № 75–26. 19 p.