МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2004

УДК 531.383

© 2004 г. В.Ф. ЖУРАВЛЁВ

ДРЕЙФ НЕСОВЕРШЕННОГО ВТГ

Изучается влияние основных механических дефектов изготовления резонатора волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) на его точность. Рассмотрены такие дефекты, как неоднородность материала, неравномерность упругих характеристик, переменность толщины резонатора и отклонение его формы от полусферы.

Показано, что во всех этих случаях дрейф гироскопа пропорционален произведению относительной величины дефекта на квадратуру.

Ранее была установлена связь дрейфа с погрешностями электрической схемы [1]. Влияние погрешностей алгоритмов управления на дрейф рассмотрено в [2, 3].

1. Исходная модель. Механическая модель ВТГ, представляющего собой тонкую полусферическую оболочку, совершающую колебания на основной моде, основывается на полученном Релеем [4] решении для этой моды:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = h_1(\alpha, \theta)q_1(t) + h_2(\alpha, \theta)q_2(t) \tag{1}$$

где векторы собственной формы имеют вид

$$h_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos 2\theta \\ \sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin 2\theta \\ (2+\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad h_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin 2\theta \\ -\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos 2\theta \\ (2+\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin 2\theta \end{pmatrix}$$

В этих формулах смещение точки резонатора с угловыми координатами α и θ определяется вектором с компонентами u, v, w. При этом α отсчитывается по меридиану от оси резонатора, θ – по параллели. Компонента u представляет собой смещение вдоль касательной к меридиану, v – вдоль касательной к параллели и w – смещение по нормали к поверхности резонатора в направлении его оси.

Электрическая модель ВТГ, построенная в [1], будет использоваться в настоящем исследовании в более простой форме. Именно, мы будем пренебрегать перекрестными связями между электродами, а также рассматривать только электроды управления, для которых мало входное сопротивление и им также далее пренебрегаем.

В этих условиях полученная в [1] модель может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} &m\ddot{q}_1 + kq_1 - \frac{1}{2d_0C_0}\sum_1^n (V_iC_i)^2\cos 2\theta_i = 0 \\ &m\ddot{q}_2 + kq_2 - \frac{1}{2d_0C_0}\sum_1^n (V_iC_i)^2\sin 2\theta_i = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь q_1 и q_2, фигурирующие в формуле [1], – обобщенные координаты основной формы колебаний резонатора, равные смещению резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга на угол 45° в угловом измерении по экватору; m – приведенная масса парциального осциллятора, соответствующего основной форме колебаний, равная для тонкой полусферической оболочки в приближении Релея $4.8\rho a R^2$, где ρ – плотность материала резонатора, a – толщина оболочки, R – радиус полусферы; k – приведенная жесткость $k = m/\omega^2$, где ω – частота колебаний; V_i – напряжение, подведенное к i-у электроду; C_i – мгновенная емкость управляющего конденсатора, связанного с i-м электродом, эта емкость зависит от прогиба w_i в месте положения этого конденсатора:

$$C_i = \varepsilon_0 S(d-\omega_i)^{-1} = C_0(1-\omega_i/d)^{-1} \tag{3}$$

где $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ ф/м, S – площадь пластины конденсатора, d – расстояние между пластинами при $w_i = 0$; $\theta_i = 2\pi(i-1)/n$ – угол, определяющий положение i-го электрода (n – число электродов, равное 16 в случае управляющих электродов и 8 в случае информационных электродов).

В формуле для емкости C_i прогиб w_i в месте расположения i-го управляющего конденсатора можно выразить через прогибы q_1 и q_2, фигурирующие в уравнениях (1, 2):

$$w_i = q_1\cos 2\theta_i + q_2\sin 2\theta_i \quad (\theta_i = \pi(i-1)/8).$$

В результате чего уравнения (1) приобретают вид

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + kq_1 - \frac{C_0}{2d_0^3}\sum_1^{16} V_i^2(d + q_1\cos 2\theta_i + q_2\sin 2\theta_i)^2\cos 2\theta_i &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + kq_2 - \frac{C_0}{2d_0^3}\sum_1^{16} V_i^2(d + q_1\cos 2\theta_i + q_2\sin 2\theta_i)^2\sin 2\theta_i &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

2. Неоднородность резонатора. В уравнениях (4) резонатор предполагался идеальным, следствием чего явилось равенство масс m и жестокостей k по каждой из степеней свободы. Если предположить, что плотность резонатора от угла θ зависит по закону

$$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon\cos 4\theta) \tag{5}$$

то в первом и во втором уравнениях (4) произойдет изменение массы, которое можно определить, вычисляя кинетическую энергию резонатора на векторах h_1 и h_2.

Выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = \frac{hR^2}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin\alpha\int_0^{2\pi}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\rho d\theta\right)d\alpha$$

Подставляя сюда (1) и (5) и осуществляя интегрирование, получим

$$T = \frac{M}{96}(2(60\ln 2 - 37)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \varepsilon(12\ln 2 - 5)(\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2))$$

здесь M – масса резонатора.

Следовательно, в первом уравнении системы (4) вместо m должно стоять $m + \Delta m$, а во втором – $m - \Delta m$, где

$$m = \frac{M}{24}(60\ln 2 - 37), \quad \Delta m = \frac{\varepsilon M}{48}(12\ln 2 - 5)$$

В результате чего возникает расщепление частот

$$\omega^2 = \frac{k}{M \pm \Delta m} = \omega_0^2\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2}\frac{12\ln 2 - 5}{60\ln 2 - 37}\right) = \omega_0^2(1 \pm 0.35\varepsilon)$$

Расщепление частот приводит к дрейфу, выражаемому формулой [5]:

$$\dot{\theta} = \frac{h\sigma}{2m\omega_0 r}\cos 4\theta$$

здесь $h = 0.35\varepsilon m\omega_0^2$, а r и σ – соответственно амплитуда колебаний и квадратура.

Следовательно, для максимального ухода получаем формулу

$$\dot{\theta} = 0.17\varepsilon\omega_0\frac{\sigma}{r} = \frac{1}{2}\Delta\omega\frac{\sigma}{r} \tag{6}$$

3. Зависимость модуля Юнга от экваториального угла. Вычисление расщепления собственной частоты резонатора, обусловленное зависимостью упругих констант от экваториального угла, представляет собой значительно более сложную задачу, чем только что рассмотренная.

Между тем задачу можно сильно упростить, если вычислять не само расщепление частоты, а оценку сверху для этого расщепления.

Рассмотрим для этой цели вместо полусферы цилиндр той же толщины и радиуса и той же массы. При одной и той же деформации на кромке деформация во всех остальных точках резонатора будет меньше в случае сферы, нежели в случае цилиндра, если считать, что деформации цилиндра от координаты вдоль образующей не зависят. По этой причине в этих условиях будет большей и потенциальная энергия деформации цилиндра.

Поэтому, если потенциальную энергию резонатора вычислять, считая его цилиндром, а кинетическую энергию подсчитывать для полусферы той же массы, то вычисляемая собственная частота будет мажорировать реальную частоту.

Потенциальная энергия цилиндра выражается следующим образом [6]:

$$\Pi = \frac{EJ}{2R^3}\int_0^{2\pi}(w + w'')^2 d\alpha$$

Полагая, что $E = E_0(1 + \varepsilon\cos 4\theta)$ и записывая форму колебаний в виде $w = q_1(t)\cos 2\theta + q_2(t)\sin 2\theta$, получим

$$\Pi = \frac{E_0 J}{2R^3}\int_0^{2\pi}(w + w'')^2(1 + \varepsilon\cos 4\theta)d\theta = \frac{\pi EJ}{4R^3}\left[q_1^2 + q_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}(q_1^2 - q_2^2)\right]$$

Итак, $\omega^2 = \omega_0^2(1 \pm \varepsilon/2)$, и расщепление частоты равно $\Delta\omega = \omega_0\varepsilon/2$. Эквивалентное расщепление восстанавливающей упругой силы есть $h = m\varepsilon\omega_0^2/2$, что приводит к уходу от дефекта модуля Юнга:

$$\dot{\theta} = \frac{h\sigma}{2m\omega_0 r} = 0.25\varepsilon\omega_0\frac{\sigma}{r} = \frac{1}{2}\Delta\omega\frac{\sigma}{r} \tag{7}$$

4. Зависимость от дефекта толщины резонатора. Изучение зависимости дрейфа от переменой толщины резонатора сводится к рассмотренным выше случаям.

Зависимость толщины от экваториального угла приводит, с одной стороны, к зависимости распределения массы от угла, с другой стороны, изменение толщины приводит к изменению коэффициента EJ в выражении для потенциальной энергии точно так же, как это получено при учете изменения E.

В первом случае можно воспользоваться формулой (6), а во втором – формулой (7). Следует только учесть, что момент инерции сечения J пропорционален кубу толщины, поэтому составляющая ухода, обусловленная изменением потенциальной энергии, должна быть в три раза больше, чем определяемая по формуле (7); $\dot{\theta} = 0.75\varepsilon\omega_0\sigma/r$. При этом составляющую ухода, обусловленную изменением потенциальной энергии, следует взять со знаком минус.

Окончательно связь ухода с изменением толщины будет такой:

$$\dot{\theta} = 0.75\varepsilon\omega_0\frac{\sigma}{r} - 0.17\varepsilon\omega_0\frac{\sigma}{r} = 0.58\varepsilon\omega_0\frac{\sigma}{r}$$

5. Влияние дефекта радиуса резонатора. Зависимость радиуса резонатора от экваториального угла, так же как и в предыдущем случае, проявляется двояко.

Во-первых, радиус присутствует в выражении для потенциальной энергии и по этой причине приводит к такому же эффекту, как и погрешность толщины $\dot{\theta} = 0.75\varepsilon\omega_0\sigma/r$, где $\varepsilon = \Delta R/R$. Во-вторых, ΔR приводит к неравномерности зазора, а, следовательно, к неравномерности распределения емкости управляющих конденсаторов.

6. Влияние неравномерности распределения емкости управляющих электродов. Величина зазора, входящая в формулу для емкости (3), в случае переменного радиуса имеет вид $d = R^* - R = d_0 - \varepsilon R_0\cos 4\theta$, где R^* – радиус корпуса.

Следовательно, в формуле (2) вместо V_iC_i следует подставить

$$\frac{V_iC_0}{d_0}(d_0 + \varepsilon R_0\cos 4\theta_i + q_1\cos 2\theta_i + q_2\sin 2\theta_i)$$

Рассчитаем силу, стоящую в правой части первого уравнения системы (2), полагая $V_i = V$:

$$F_1 = \frac{C_0V^2}{2d_0^3}\Sigma(d^2 + 2\varepsilon R_0d_0\cos 4\theta_i + 2d_0q_1\cos 2\theta_i + 2d_0q_2\sin 2\theta_i +$$

$$+ 2\varepsilon R_0q_1\cos 4\theta_i\cos 2\theta_i + 2\varepsilon R_0q_2\cos 4\theta_i\sin 2\theta_i)\cos 2\theta_i$$

Осуществляя суммирование, найдем:

$$F_1 = \frac{8C_0V^2}{d_0^2}\left(1 + \frac{\varepsilon R_0}{2d_0}\right)q_1$$

Аналогичное вычисление приводит к выражению для силы, стоящей в правой части системы (2):

$$F_2 = \frac{8C_0V^2}{d_0^2}\left(1 - \frac{\varepsilon R_0}{2d_0}\right)q_2$$

Таким образом, эквивалентное расщепление упругой силы получилось таким: $h = 4C_0V^2\varepsilon R_0/d_0^3$, откуда и следует формула для ухода в этом случае:

$$\dot{\theta} = \frac{2C_0V^2\varepsilon R_0\sigma}{m\omega_0d_0^3\ r}$$

7. Сводный результат по всем рассмотренным случаям.

$\dot{\theta} = 0.17\varepsilon\omega_0\frac{\sigma}{r}$, $\varepsilon = \frac{\Delta\rho}{\rho}$ – неоднородная плотность;

$\dot{\theta} = 0.25\varepsilon\omega_0\frac{\sigma}{r}$, $\varepsilon = \frac{\Delta E}{E}$ – неравномерность модуля Юнга;

$\dot{\theta} = 0.58\varepsilon\omega_0\frac{\sigma}{r}$, $\varepsilon = \frac{\Delta h}{h}$ – непостоянство толщины;

$\dot{\theta} = \left(0.75\omega_0 + \frac{2C_0V^2R_0}{m\omega_0 d_0^3}\right)\varepsilon\frac{\sigma}{r}$, $\varepsilon = \frac{\Delta R}{R}$ – переменный радиус.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлёв В.Ф., Линч Д.Д.* Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 12–24.
2. *Журавлёв В.Ф.* Об уходе волнового твердотельного гироскопа при наличии фазового сдвига в информационном канале // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 181–186.
3. *Журавлёв В.Ф.* О дрейфе волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) на вращающемся основании при управлении квадратурой в режимах “быстрого” и “медленного” времени // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 13–18.
4. *Рэлей* (*Дж. В. Стретт*). Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 1. 504 с; Т. 2. 476 с.
5. *Журавлёв В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
6. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.05.2002