

УДК 539.3:534.1

© 2004 г. Д.В. БОЙКО, Л.П. ЖЕЛЕЗНОВ, В.В. КАБАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КРУЧЕНИИ

Некруговые оболочки, в отличие от круговых, недостаточно исследованы на устойчивость. Если число публикаций по круговым оболочкам исчисляется тысячами, то по некруговым оболочкам это число равно нескольким десяткам. Такое разительное несоответствие публикаций можно объяснить с одной стороны меньшим использованием некруговых оболочек, с другой стороны трудностями решения задач, связанных с переменностью их радиуса кривизны, что приводит к появлению переменных коэффициентов в уравнениях устойчивости. Известные решения задач устойчивости получены аналитическими методами и, как правило, в линейном приближении без учета моментности и нелинейности докритического состояния оболочек, т.е. в классической постановке. Современная вычислительная техника позволяет решать задачи в более корректной постановке. В статье излагается конечно-элементная постановка решения таких задач.

Интегрированием уравнений, полученных приравниванием нулю компонентов линейных деформаций, получены явные выражения для перемещений элементов некруговых цилиндрических оболочек как твердых тел. Полученные выражения использованы при построении функций формы эффективного четырехугольного конечного элемента. На основе этого элемента разработан алгоритм исследования нелинейного деформирования и устойчивости оболочек. Исследована устойчивость при кручении цилиндрической оболочки с эллиптическим контуром поперечного сечения. Выяснено влияние эллиптичности и нелинейности деформирования оболочки в докритической стадии.

1. Перемещения конечных элементов некруговых цилиндрических оболочек как твердых тел. При перемещениях элементов как твердых тел компоненты деформаций равны нулю. Приравнивая нулю линейные компоненты деформаций, изменений кривизны и кручение [1], получаем уравнения

$$\varepsilon_1 = u_x = 0 \quad (1.1)$$

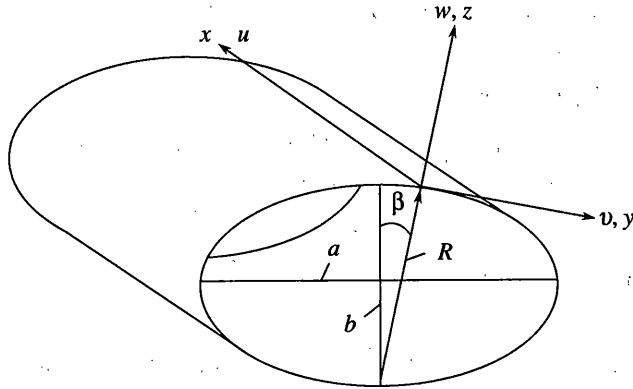
$$\varepsilon_2 = k_2(v_\beta + w) = 0 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_3 = v_x + k_2 u_\beta = 0 \quad (1.3)$$

$$\chi_1 = w_{xx} = 0 \quad (1.4)$$

$$\chi_2 = k_2[k_2(v - w_\beta)]_\beta = 0 \quad (1.5)$$

$$\chi_3 = [k_2(v - w_\beta)]_x = 0 \quad (1.6)$$



Фиг. 1

Здесь u, v, w – тангенциальные перемещения и прогиб; $R, k_2 = R^{-1}$ – радиус и кривизна поперечного сечения; β – угол нормали к поперечному сечению с осью b поперечного сечения; x – продольная координата (фиг. 1). В индексах x, β означают дифференцирование.

Проинтегрируем уравнения (1.1)–(1.6). Из уравнения (1.5) имеем

$$v = w_\beta + RC_5, \quad C_5 = \text{const} \quad (1.7)$$

Из (1.2) следует

$$w = -v_\beta \quad (1.8)$$

С учетом этого равенства из (1.7) получаем уравнение

$$v_{\beta\beta} + v = RC_5 \quad (1.9)$$

Его решение имеет вид

$$v = C_3c + C_4s + v_n, \quad c = \cos\beta, \quad s = \sin\beta \quad (1.10)$$

где частное решение v_n неоднородного уравнения находится методом вариации произвольных постоянных C_3, C_4 . Пусть

$$v_n = C_3c + C_4s \quad (1.11)$$

где C_3, C_4 – функции от x и β .

В результате находим $v_{n\beta} = C_{3\beta}c - C_3s + C_{4\beta}s + C_4c$. Положим

$$C_{3\beta}c + C_{4\beta}s = 0 \quad (1.12)$$

Тогда

$$v_{n\beta\beta} = -C_{3\beta}s - C_3c + C_{4\beta}c - C_4s$$

Уравнение (1.9) при этом будет таким

$$C_{3\beta}s - C_{4\beta}c = -RC_5 \quad (1.13)$$

Решая систему (1.12), (1.13) и интегрируя, получаем

$$C_3 = C_5\psi_1 + C_7(x), \quad C_4 = -C_5\psi_2 + C_8(x), \quad \psi_1 = \int Rsd\beta, \quad \psi_2 = -\int Rcd\beta \quad (1.14)$$

После этого из (1.10), (1.8) с учетом (1.11) находим

$$\begin{aligned} v &= C_3c + C_4s - C_5(\Psi_1c + \Psi_2s) + C_7c + C_8s \\ w &= C_3s - C_4c - C_5(\Psi_1s - \Psi_2c) + C_7s - C_8c \end{aligned} \quad (1.15)$$

Удовлетворим уравнение (1.4), положив $C_7 = C_2x$, $C_8 = -C_1x$. В результате получаем

$$\begin{aligned} v &= C_3s + C_4s - C_5(\Psi_1c + \Psi_2s) + (C_2c - C_1s)x \\ w &= C_3s - C_4c - C_5(\Psi_1s - \Psi_2c) + (C_2s + C_1c)x \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из уравнения (1.3) находим

$$u = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2 + C_6 \quad (1.17)$$

Функции (1.16), (1.17) удовлетворяют уравнениям (1.1)–(1.6) и, следовательно, в линейном приближении являются перемещениями элементов как твердых тел.

Рассмотрим частные случаи оболочек.

Эллиптическая оболочка

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad R = \frac{a^2b^2}{d^3}, \quad d^2 = a^2s^2 + b^2c^2, \quad \Psi_1 = \frac{b^2c}{d}, \quad \Psi_2 = -\frac{a^2s}{d}$$

Параболическая оболочка

$$z^2 = 2py, \quad R = \frac{p}{c^3}, \quad \Psi_1 = \frac{p}{c^2}, \quad \Psi_2 = ps$$

Гиперболическая оболочка

$$\frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad R = \frac{a^2b^2}{d^3}, \quad d^2 = a^2s^2 - b^2c^2, \quad \Psi_1 = \frac{b^2c}{d}, \quad \Psi_2 = \frac{a^2s}{d}$$

Круговая оболочка

$$z^2 + y^2 = R^2, \quad \Psi_1 = -Rc, \quad \Psi_2 = -Rs$$

2. Конечный элемент и алгоритм решения задачи. Разобьем оболочку линиями главных кривизн по образующей на m , а по направляющей на n частей. Таким образом, оболочку представим набором $m \times n$ криволинейных прямоугольных конечных элементов (фиг. 1). Используя билинейную аппроксимацию деформационных тангенциальных перемещений и бикубическую аппроксимацию для прогиба, с учетом (1.16), (1.17), запишем выражения для полных перемещений точек конечного элемента

$$\begin{aligned} u &= a_1xy + a_2x + a_3y + a_4 + a_6\Psi_2 + a_{20}\Psi_1 \\ v &= a_5xy + a_6xc + a_7y + a_8(\Psi_1c + \Psi_2s) - \alpha_{20}xs + a_{23}c - a_{24}s \\ w &= a_9x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y^3 + a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2 + \\ &+ a_{17}xy^3 + a_{18}xy^2 + a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + a_{22}y^2 + a_{23}s + a_{24}c + a_6xs + a_8(\Psi_1s - \Psi_2c) \end{aligned} \quad (2.1)$$

В матричной форме (2.1) имеет вид

$$\tilde{u} = Pa \quad (2.2)$$

где $\tilde{u} = \{u, v, w\}^T$ – вектор перемещений точек срединной поверхности конечного элемента, $a = \{a_1, \dots, a_{24}\}^T$ – вектор неизвестных коэффициентов полиномов a_i ; P –

матрица связи порядка (3×24) , элементами которой являются множители при коэффициентах a_i в функциях (2.1). Выражая коэффициенты a_i через узловые неизвестные, получаем

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{u}} \quad (2.3)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \{u_p, v_p, w_p, \vartheta_{1p}, \vartheta_{2p}, w_{xy}, u_j, v_j, w_j, \vartheta_{1j}, \vartheta_{2j}, w_{xy}, u_k, \dots, w_{xy}, u_n, \dots, w_{xy}\}^T$$

Здесь, $\bar{\mathbf{u}}$ – вектор узловых перемещений, углов поворотов и смешанных производных прогиба; \mathbf{B} – матрица порядка (24×24) , ненулевые элементы которой имеют вид:

$$b_{1j} = p_{1j}, \quad b_{2j} = p_{2j}, \quad b_{3j} = p_{3j}, \quad b_{4j} = (p_{3j})_x, \quad b_{5j} = \frac{1}{R}(p_{2j} - (p_{3j})_y)$$

$$b_{6j} = (p_{3j})_{xy}, \quad x = -a_1, \quad y = -b_1$$

$$b_{7j} = p_{1j}, \quad b_{8j} = p_{2j}, \quad b_{9j} = p_{3j}, \quad b_{10j} = (p_{3j})_x, \quad b_{11j} = \frac{1}{R}(p_{2j} - (p_{3j})_y)$$

$$b_{12j} = (p_{3j})_{x\beta}, \quad x = -a_1, \quad y = b_1$$

$$b_{13j} = p_{1j}, \quad b_{14j} = p_{2j}, \quad b_{15j} = p_{3j}, \quad b_{16j} = (p_{3j})_x, \quad b_{17j} = \frac{1}{R}(p_{2j} - (p_{3j})_\beta)$$

$$b_{18j} = (p_{3j})_{xy}, \quad x = a_1, \quad y = -b_1$$

$$b_{19j} = p_{1j}, \quad b_{20j} = p_{2j}, \quad b_{21j} = p_{3j}, \quad b_{22j} = (p_{3j})_x, \quad b_{23j} = \frac{1}{R}(p_{2j} - (p_{3j})_y)$$

$$b_{24j} = (p_{3j})_{xy}, \quad x = a_1, \quad y = b_1 \quad (j = 1, \dots, 24), \quad a_1 = \frac{L}{2m}, \quad b_1 = \frac{l}{2n}$$

где L, l – размеры образующей и направляющей оболочки.

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем зависимость перемещений точек элемента от узловых неизвестных

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{P}\mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

В каждом узле имеется шесть неизвестных, так что конечный элемент имеет 24 степени свободы. Узловые неизвестные определяем, используя вариационное уравнение Лагранжа $\delta\Pi = 0$, где Π – полная потенциальная энергия оболочки. При записи выражения потенциальной энергии используем нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями [1]. Уравнение $\delta\Pi = 0$ приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных. Эту систему решаем шаговым методом по нагрузке с использованием на каждом шаге метода линеаризации Ньютона–Канторовича; уравнение которого для конечного элемента можно записать [2] в виде

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}}^n) \delta\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{q}_e - \mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}}^n), \quad \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^n + \delta\bar{\mathbf{u}} \quad (2.6)$$

где \mathbf{H} – матрица Гессе конечного элемента, которая определяется из второй вариации потенциальной энергии деформации; \mathbf{q}_e – вектор узловой нагрузки; \mathbf{G} – градиент потенциальной энергии. Уравнения типа (2.6) для всей оболочки строятся [3] обыч-

ным образом с учетом граничных условий. Граничные условия ставятся в следующем виде. Для нулевых узловых граничных перемещений соответствующая им строка матрицы Гессе \mathbf{H} и соответствующий элемент вектора узловых нагрузок обнуляются, а на место диагонального коэффициента в матрице \mathbf{H} ставится большое число. Решение системы линейных алгебраических уравнений (2.6) отыскиваем методом Краута. При этом используется разложение $\mathbf{H} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ матрицы Гессе на диагональную и две треугольные матрицы. По найденным узловым перемещениям по известным формулам определяются напряжения и деформации. Контроль устойчивости осуществляется проверкой на положительную определенность матрицы Гессе, что сводится к проверке положительности элементов диагональной матрицы \mathbf{D} . Появление отрицательных элементов соответствует потере устойчивости оболочки. После того как найдено значение параметра нагрузки, при котором равновесное состояние неустойчиво, отыскивается форма потери устойчивости оболочки из решения системы $\mathbf{H}\delta = 0$, где δ – вектор бифуркационных узловых перемещений. Для этого определяется одна из линейно зависимых строк матрицы \mathbf{H} , для которой минор матрицы впервые становится отрицательным. Эта строка и соответствующий столбец матрицы \mathbf{H} обнуляются. На место диагонального коэффициента заносится единица, а в правую часть системы переносится соответствующий столбец, умноженный на докритическое перемещение, соответствующее вырожденной строке. Из решения полученной таким образом системы и отыскивается форма потери устойчивости оболочки. Изложенный алгоритм реализован программой для персонального компьютера.

3. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости эллиптических оболочек при кручении. Впервые эта задача в классической постановке для бесконечно длинной оболочки малой эллиптичности рассматривалась Х.М. Муштари [4]. Им получена формула для касательного критического усилия

$$S = S_b(1 + \varepsilon^2/6), \quad \varepsilon^2 = 1 - (b/a)^2 \quad (3.1)$$

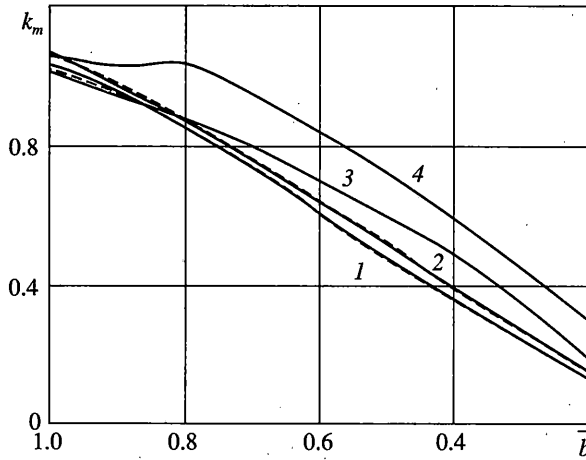
где S_b – критическое усилие круговой оболочки с радиусом, равным наибольшей полуоси эллиптической оболочки.

Рассмотрим задачу нелинейного деформирования и устойчивости защемленной по краям ($u = w = w_x = 0$) цилиндрической оболочки с эллиптическим контуром поперечного сечения при действии крутящих моментов M . Оболочка имеет длину $L = 90$ мм, толщину $h = 0.1-0.5$ мм, радиус поперечного сечения $R_0 = 44$ мм, определяемый как радиус окружности, имеющей такой же периметр L_1 , что и эллипс

$$R_0 = \frac{L_1}{2\pi} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right] \sin^2 \psi \right\}^{1/2} d\psi = \frac{2a}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{b}{a} \right) \quad (3.2)$$

где $E(\pi/2, b/a)$ – полный эллиптический интеграл второго рода, a и b – большая и малая полуоси поперечного сечения оболочки. Оболочка выполнена из материала с модулем упругости $E = 6.7 \cdot 10^4$ МПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Оболочка разрезалась вдоль большой оси плоскостью симметрии, на линии пересечения ставились граничные условия $u = w = w_x = 0$. По длине оболочка разбивалась на 30, а по окружности на 60 конечных элементов. Сходимость результатов (k_m) решения имеет следующий характер:

Сетка ($m \times n$)	30 × 20	30 × 30	30 × 40	30 × 60
$\bar{b} = 1.0$	1.32	1.03	1.03	1.03
$\bar{b} = 0.6$	0.68	0.62	0.62	0.62

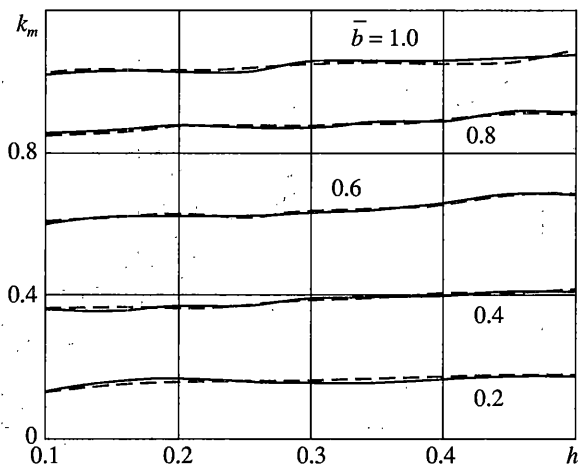


Фиг. 2

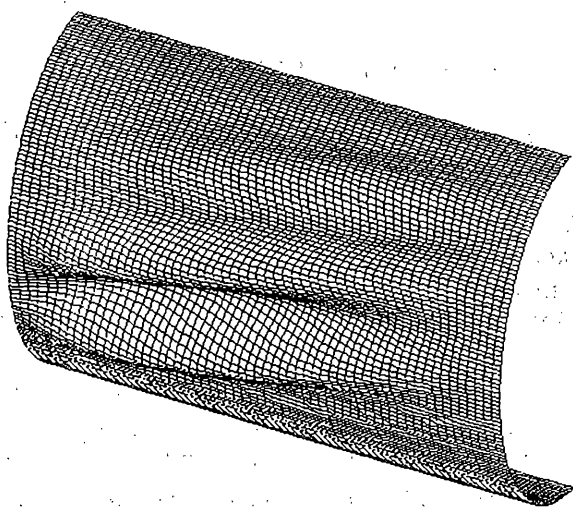
На фиг. 2 представлены графики зависимости параметра $k_m = M^*/M_0$:

$$M_0 = 2\pi C_1 R_0^2 S_0, \quad S_0 = 0.74 \frac{Eh}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h}{R_0}\right)^{5/4} \left(\frac{R_0}{L}\right)^{1/2}, \quad C_1 = 0.953$$

где M_0 – критический момент эллиптической оболочки, согласно [1], M^* – критический момент эллиптической оболочки от параметра $\bar{b} = b/a$ для случая линейного (штриховые кривые) и нелинейного (сплошные кривые) исходных напряженно-деформированных состояний и при различных значениях толщин оболочек (кривые 1 соответствуют $h = 0.1$ мм, а $2 - h = 0.3$ мм). Качественно поведение кривых во всех случаях одинаково. С уменьшением параметра эллиптичности \bar{b} значения параметра k_m снижаются. Влияние нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния несущественно во всем диапазоне рассматриваемых толщин оболочек и параметра \bar{b} . Здесь же нанесены экспериментальные значения параметра k_m , полученные в работе [5] (кривая 3). Видно некоторое отличие в результатах, что обусловлено тем, что в отличие от кругового цилиндра эллиптическая оболочка при кручении имеет несколько форм потери устойчивости. Эксперимент показывает, что в начале при $M = M_1$ появляются небольшие вмятины у краев оболочки в зоне минимальной кривизны (первая форма). При дальнейшем нагружении при $M = M_2$ вмятины развиваются на всю поверхность за исключением зоны максимальной кривизны (вторая форма). При $M = M_3$ вмятины захватывают всю поверхность оболочки. Анализ результатов показывает, что при расчете получается вторая форма потери устойчивости. В диапазоне $1 > \bar{b} > 0.7$ расчетные значения критической нагрузки хорошо согласуются с результатами [5]. Нелинейное решение на фиг. 2 аппроксимируются прямой $k_m = \bar{b}$, кривая 4 на фиг. 2 соответствует формуле (3.1). Если использовать эту формулу с наибольшим радиусом $R_b = a^2/b$ эллиптической оболочки, то $k_m = 1.15\bar{b} - 0.09$. Этот результат близок к нелинейному решению.



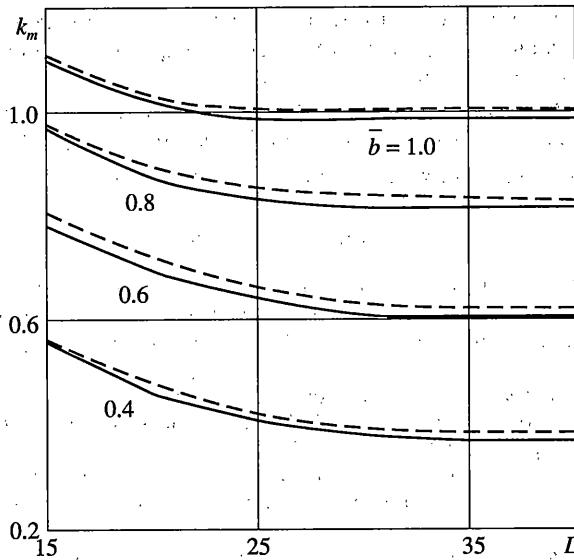
Фиг. 3



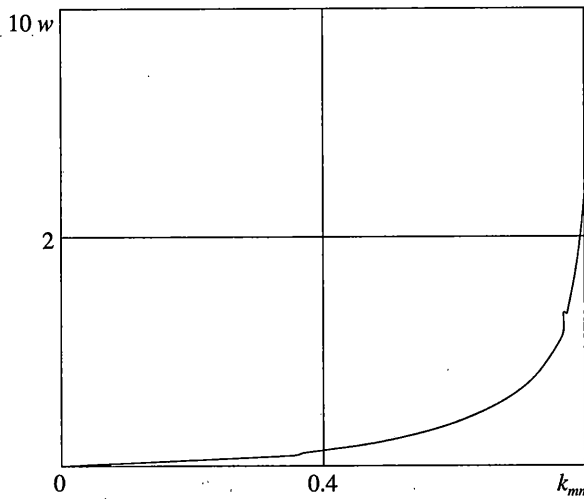
Фиг. 4

На фиг. 3 представлены графики зависимости параметра $k_m = M^*/M_0$ от толщины оболочки h для различных значений параметра \bar{b} для случая линейного и нелинейного исходных напряженно-деформированных состояний.

Результаты расчетов показывают, что в докритическом состоянии при значениях параметра $\bar{b} > 0.5$ и для всех исследованных толщин оболочка деформируется с интенсивным развитием прогиба у края. При значениях $\bar{b} < 0.5$ характер деформирования оболочки в исходном состоянии изменяется. Оболочка в этом случае деформируется с образованием двух продольных волн в районе максимальной кривизны, обусловленных появлением значительных касательных усилий в этой зоне. Эти волны распространяются на всю длину оболочки.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 4 представлена характерная форма потери устойчивости оболочки. Она соответствует экспериментальной форме. Характер волнообразования сильно зависит от толщины оболочки, чем тоньше оболочка, тем больше число волн. У оболочек с малой эллиптичностью волнообразование захватывает почти всю поверхность, а при большой эллиптичности основное волнообразование наблюдается в районе малой кривизны оболочки.

Распределение нормальных и касательных усилий в оболочке имеет существенно неоднородный характер. У оболочек с большой эллиптичностью наблюдается концентрация осевых нормальных усилий в районе большой полуоси у края оболочки.

Наибольшие значения окружных нормальных усилий наблюдаются у края оболочки в районе малой полуоси. Для касательных усилий характерно наибольшее их значение у края оболочки в районе большой полуоси.

На фиг. 5 показаны результаты исследования влияния длин оболочек L [мм].

На фиг. 6 представлен характерный график зависимости прогиба w [мм] от параметра нагрузки для оболочки, имеющей $h = 0.3$ мм, $\bar{b} = 0.6$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолоук Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
2. Астрахарчик С.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости оболочек и панелей ненулевой гауссовой кривизны // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 102–108.
3. Кабанов В.В., Астрахарчик С.В. Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при изгибе // Пространственные конструкции в Красноярском крае. / Красноярск: КИСИ, 1985. С. 75–83.
4. Муштары Х.М. Об одном возможном подходе к решению задач устойчивости тонких цилиндрических оболочек произвольного сечения // Сб. науч. тр. Казанский авиац. ин-т, 1935. № 4. С. 19–31.
5. Коноплев Ю.Г., Копп А.В. Устойчивость цилиндрической оболочки эллиптического сечения при кручении // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. Вып. 13. С. 83–91.

Новосибирск

Поступила в редакцию
31.01.2002

Зав. редакцией В.М. Кутырева

Сдано в набор 25.05.2004 Подписано к печати 20.07.2004 Формат бумаги $70 \times 100^{1/16}$
Офсетная печать Усл.печ.л. 14,3 Усл.кр.-отт. 4,6 тыс. Уч.-изд.л. 17,0 Бум.л. 5,5
Тираж 313 экз. Зак. 8480

Учредители: Российская академия наук,
Институт проблем механики РАН

Адрес издателя: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
Адрес редакции: 117526, Москва, проспект Вернадского, д. 101. Тел. 434-35-38
Оригинал-макет подготовлен МАИК "Наука/Интерпериодика"
Отпечатано в ППП "Типография "Наука", 121099, Москва, Шубинский пер., 6