

УДК (539.3+624.07):534.1

© 2004 г. А.П. МАЛЫШЕВ

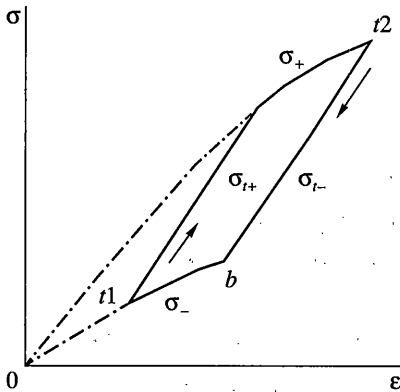
МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИОННОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИКЛЕ

В работе предлагается модель, позволяющая учесть распределенное конструкционное демпфирование, которое не зависит от частоты колебаний, но зависит от амплитуды и среднего уровня напряжений в цикле. Исследуется связь ее параметров с описываемым рассеянием энергии. Модель можно использовать для расчета динамических режимов с любым характером деформирования конструкции по времени. В качестве примера рассмотрены переходные процессы в стержне при внезапном приложении и снятии осевой нагрузки.

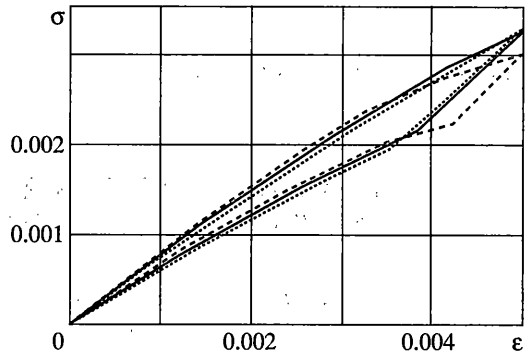
При изучении конструкционного демпфирования обычно рассматривается относительное смещение контактных поверхностей соединенных деталей и анализируется рассеяние энергии, вызванное внешним трением на этих поверхностях. Возможности решения задач в такой постановке ограничивают круг исследуемых объектов небольшим перечнем простых узлов и конструкций, в том числе со слоистой структурой [1–5]. Анализ динамики сложных, многокомпонентных объектов чаще связан с переходом к расчетным схемам с распределенными параметрами, где “размазываются” отдельные конструктивные детали и фрагменты. В этих случаях при учете демпфирования совершенно естественным оказывается переход к модели внутреннего рассеяния энергии в материале с приведенными характеристиками.

Для описания потерь энергии в материалах разработано достаточно много моделей, ориентированных не только на колебания, близкие к гармоническим, но и динамические процессы сложного вида [1, 2, 6–8]. Однако все эти модели эффективны, прежде всего, когда рассматривается слабое затухание. Они не учитывают среднего напряжения в цикле, а соответствующий им декремент колебаний при малых амплитудах стремится к нулю. Такие ограничения несущественны, когда рассматривается рассеяние энергии в большинстве конструкционных материалов, прежде всего – в металлах. Однако, как показывают результаты динамических испытаний, они не выполняются применительно к конструкционному демпфированию в сложных конструкциях. Здесь приходится иметь дело с высоким – порядка 10–20% – декрементом колебаний, в том числе и при малых амплитудах. Кроме того, предварительное статическое нагружение или наличие среднего напряжения в цикле существенно влияют на продолжительность и распространение вибраций. Заметим, что подобные эффекты наблюдаются и для многих современных композитов сложного строения.

1. Анализ зависимостей, полученных в результате решения отдельных задач с учетом внешнего трения и отражающих связь смещений и усилий, показал, что во многих случаях смещения меняются пропорционально усилию, причем одному и тому же смещению на этапе нагрузки соответствует большее усилие, чем на этапе разгрузки. После смены нагрузки на разгрузку усилия терпят разрыв, а при отсутствии



Фиг. 1



Фиг. 2

смещений равны нулю. Такая связь усилий и смещений характерна, например, для деформирования резбовых соединений, различных прокладок, пружин, рессор, а также тросов и канатов [1, 9].

Приняв подобные зависимости за отправную точку и соотнося, как обычно, деформации с перемещениями, а усилия с напряжениями, сформулируем следующую модель для описания приведенных свойств материала, которые будут отражать влияние конструкционного демпфирования,

$$\sigma_+ = (E_1 - b|\epsilon|^a)\epsilon, \quad \sigma_- = (E_2 - b|\epsilon|^a)\epsilon$$

$$\sigma_{t+} = (1 - b|\epsilon - \epsilon_{t1}|^a)(\epsilon - \epsilon_{t1}) + \sigma_{t1} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{t-} = (1 - b|\epsilon - \epsilon_{t2}|^a)(\epsilon - \epsilon_{t2}) + \sigma_{t2}$$

Здесь индексами (+) и (-) отмечены напряжения на этапах нагрузки и разгрузки соответственно. Участки диаграммы $\sigma - \epsilon$, которым соответствуют модули E_1 и E_2 , далее будем называть основными ветвями. Дополнительным индексом t отмечены напряжения на участках диаграммы, по которым в ходе нагрузки или разгрузки происходит переход отображающей точки с одной основной ветви на другую. В дальнейшем они будут называться транзитными участками. Индексами $t1$ и $t2$ помечены напряжения и деформации в начале соответственно нагрузки и разгрузки по транзитным участкам. Напряжения отнесены к максимальному модулю упругости, за который принят касательный модуль в начале нагрузки и разгрузки по транзитным участкам. Эти участки заменили упомянутые выше разрывы усилий в задачах с внешним трением. В соответствии с общей концепцией постановки задач о конструкционном демпфировании считаем, что деформации наблюдаются и здесь, но при более высоком значении модуля. Помимо прочего, если при переменных напряжениях полагать деформации постоянными, мы приходим к бесконечно большому модулю и бесконечной скорости распространения возмущений, которая затрудняет анализ волновых переходных процессов.

Характерные точки и участки гистерезисной петли показаны на фиг. 1. Сплошные линии и стрелки соответствуют асимметричному циклу нагружения. Точки пересечения отдельных участков помечены символами, которые используются в качестве индексов соответствующих напряжений и деформаций.

Заметим, что зависимости для σ_{t+} и σ_{t-} описывают как частный случай модель [7, 8].

Параметры a и b определяют изменение с амплитудой текущего касательного модуля. Как будет показано далее, они позволяют учесть вид конкретной зависимости рассеяния энергии от амплитуды. В качестве меры демпфирования будем использовать коэффициент поглощения ψ , равный отношению энергии, рассеянной за цикл гармонических колебаний, к максимальной потенциальной энергии в цикле.

Гистерезисные петли, соответствующие модели (1.1) при изменении деформации по гармоническому закону с амплитудой $A = 0.005$ и различных сочетаниях a и b , приведены на фиг. 2 для $\epsilon \geq 0$. Остальная часть каждой петли симметрична ее изображенной половине относительно начала координат. Сплошные линии соответствуют $a = 1, b = 30$; штриховые – $a = 2, b = 8000$; пунктирные – $a = 0.5, b = 2$. Во всех случаях принималось, что $E_1 = 0.8$ и $E_2 = 0.667$.

Коэффициент поглощения при симметричном цикле изменения деформации определяется следующими зависимостями

$$\begin{aligned}\psi &= 2(F_1 - F_t - F_2)/F_1 \\ F_1 &= [0.5E_1 - bA^a/(a+2)]A^2 \\ F_2 &= [0.5E_2 - b\epsilon_b^a/(a+2)]\epsilon_b^2 \\ F_t &= (E_1 - bA^a)A(A - \epsilon_b) - [0.5 - b(A - \epsilon_b)^a/(a+2)](A - \epsilon_b)^2\end{aligned}\quad (1.2)$$

Здесь ϵ_b – деформация на этапе разгрузки в точке перехода с транзитного участка на основную ветвь (точка b на фиг. 1).

Величина ϵ_b задается нелинейным уравнением

$$(E_1 - bA^a)A - [1 - b(A - \epsilon_b)^a](A - \epsilon_b) - (E_2 - b\epsilon_b^a)\epsilon_b = 0 \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) решалось с помощью метода Ньютона, причем в качестве нулевого приближения $\epsilon_b^{(0)}$ принималось значение ϵ_b при $b = 0$:

$$\epsilon_b^{(0)} = A \frac{1 - E_1}{1 - E_2}$$

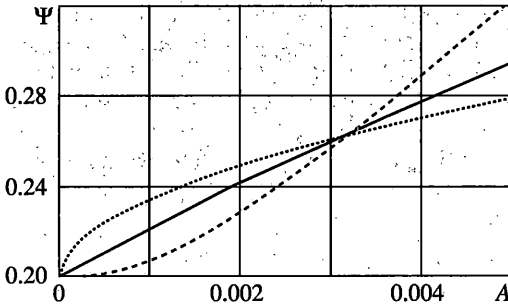
На фиг. 3 показано влияние амплитуды деформации на коэффициент поглощения. Типы линий соответствуют тем же комбинациям параметров модели, что и на фиг. 2. В случае $a = 1$ наблюдается линейная зависимость ψ от A . При $a > 1$ ($a = 2$) кривая $\psi(A)$ принимает вид “жесткой” характеристики, когда с увеличением амплитуды растет не только ψ , но и $d\psi/dA$. Наконец, если $a < 1$ ($a = 0.5$), амплитудная характеристика становится “мягкой”. Графики $\psi(A)$ хорошо аппроксимируются экспоненциальными зависимостями, которые обычно используются для описания экспериментальных данных [2].

Нетрудно показать, что при $A \rightarrow 0$ коэффициент поглощения равен

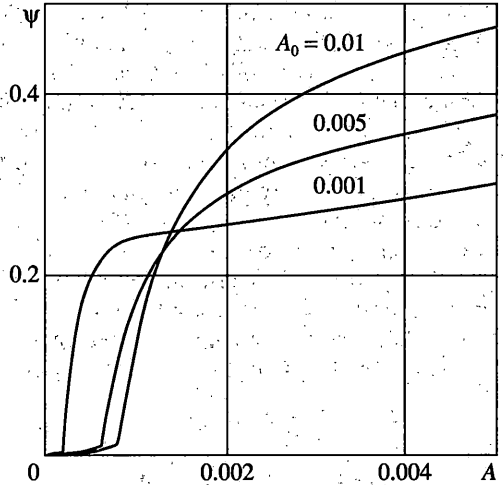
$$\psi_0 = 2 \frac{1 - E_1}{E_1(1 - E_2)}(E_1 - E_2) \quad (1.4)$$

Таким образом, модель (1.1) может задавать значительное рассеяние энергии даже при малых амплитудах колебаний, что также соответствует данным, получаемым при испытаниях конструкций.

Определение параметров модели начинается с модулей E_1 и E_2 . Величину E_1 можно найти по результатам статических испытаний конструкции и ее фрагментов. Тог-



Фиг. 3



Фиг. 4

да E_2 вычисляется на основе экспериментальных данных о коэффициенте поглощения при малых амплитудах по формуле, которая следует из (1.4):

$$E_2 = E_1 \frac{2(1 - E_1) - \psi_0}{2(1 - E_1) - E_1 \psi_0}$$

Когда экспериментальная информация о модуле E_1 отсутствует, его оценку можно получить, если принять, что в процессе колебаний, в том числе с малыми амплитудами, реализуется максимально возможный коэффициент поглощения. Исследование зависимости (1.4) на наличие экстремумов, показало, что ψ достигает максимума при $E_2 = E_1^2$. Разрешив равенство (1.4) относительно E_1 с учетом последнего условия, получим

$$E_1 = \frac{2 - \psi_0}{2 + \psi_0} \quad (1.5)$$

Итак, в этом случае сначала с помощью (1.5) вычисляется E_1 , а затем $E_2 = E_1^2$.

Параметры a и b определяются путем проведения нелинейной регрессии с помощью модели (1.1) по экспериментальным зависимостям $\psi(A)$. В процессе деформирования касательный модуль должен оставаться неотрицательным. Это требование аналогично условию выпуклости поверхности нагружения в теории пластичности. Оно налагает ограничения на максимальную величину деформации, вплоть до которой может применяться модель (1.1). Воспользовавшись выражениями для касательных модулей на этапах нагрузки и разгрузки, получим

$$E_1 \geq kA, \quad E_2 \geq kE_b, \quad k = (a + 1)b$$

Рассмотрим теперь рассеяние энергии, когда среднее напряжение в цикле не равно нулю. Пусть деформация изменяется во времени согласно зависимости $\varepsilon = A_0 + A \sin \omega t$. Амплитудные характеристики $\psi(A)$, полученные на основании модели (1.1) для различных уровней A_0 , приведены на фиг. 4. Они соответствуют $a = 1$, $b = 30$, $E_1 = 0.80$ и $E_2 = 0.667$. При $A_0 \neq 0$ в области малых амплитуд появляется интервал A , где рассеяние энергии существенно ниже, чем в остальном диапазоне. С ростом A_0 этот ин-

тервал расширяется. Подобная ситуация, когда вибрации с малой амплитудой затухают в нагруженной конструкции слабее, чем в свободной, хорошо известна из испытательной практики. Согласно модели (1.1) пониженному демпфированию соответствуют гистерезисные петли, ограниченные только транзитными участками и полностью лежащие в промежутке между основными ветвями диаграммы не касаясь их или касаясь только своими вершинами. С увеличением среднего напряжения возрастает предельная амплитуда, при которой происходит такое касание, и расширяется интервал амплитуд колебаний с пониженным затуханием. Появление амплитудных диапазонов с пониженным демпфированием указывает на необходимость воспроизведения средних и статических нагрузок во время вибрационных испытаний.

2. Рассмотрим продольные колебания и волновые процессы в тонком однородном призматическом стержне. Движение стержня описывается моделью (1.1) совместно с системой уравнений

$$\sigma' = \dot{U}, \quad \dot{\epsilon} = U' \quad (2.1)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по осевой координате x , а точка – производную по времени t ; U – скорость поперечных сечений стержня вдоль оси. Напряжения, как и ранее, отнесены к максимальному модулю упругости, скорость U отнесена к максимальной скорости звука в стержне, x – к длине стержня, t – к времени пробега акустической волны вдоль стержня.

К торцу $x = 0$ прикладывается внешнее напряжение, а торец $x = 1$ закреплен. В исходном состоянии стержень неподвижен и в нем отсутствуют внутренние напряжения и деформации.

Система уравнений (1.1), (2.1) интегрировалась численно методом С.К. Годунова [10]. На сетке с ячейками размером $h = x_n - x_{n-1}$ и $\tau = t^* - t_*$:

$$U^* = U_* + (\sigma_n - \sigma_{n-1})\tau/h, \quad \epsilon^* = \epsilon_* + (U_n - U_{n-1})\tau/h \quad (2.2)$$

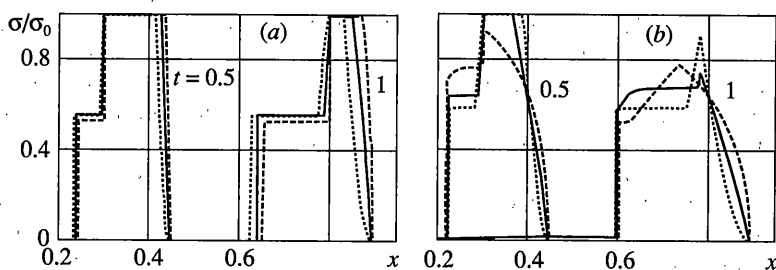
Здесь звездочкой в верхнем и нижнем индексах отмечены среднеинтегральные величины на сторонах ячейки при t^* и t_* соответственно, а индексами $n-1$ и n – среднеинтегральные величины на сторонах ячейки x_{n-1} и x_n . Значения σ^* определялись с помощью модели (1.1) при $\epsilon = \epsilon^*$. Напряжения и деформации в момент смены нагрузки на разгрузку и наоборот фиксировались, когда $\epsilon^* \epsilon_* < 0$. При определении напряжений и деформаций в точках перехода с транзитных участков на основные ветви диаграммы принималось во внимание, что эти переходы сопровождаются нарушением условия $|\sigma_{t+}^*| < |\sigma_+^*|$ или $|\sigma_{t-}^*| > |\sigma_-^*|$.

Скорости и напряжения в сечениях x_{n-1} и x_n находились путем расчета распада контактного разрыва с помощью соотношений на характеристиках системы (1.1), (2.1) для упругого материала

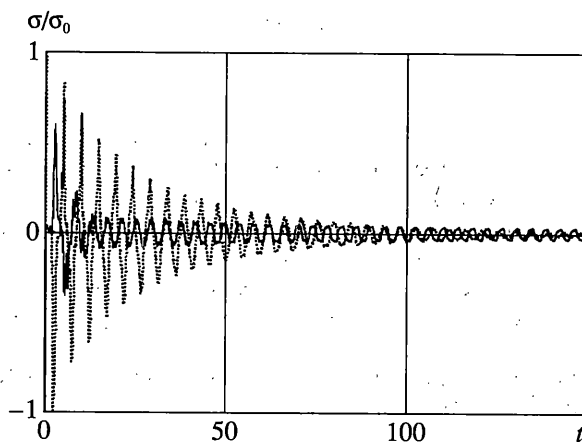
$$\sigma_n \pm U_n = (\sigma \pm U)_{n \pm 1/2}$$

где индексами $n-1/2$ и $n+1/2$ отмечены параметры на сторонах ячеек при t_* соответственно слева и справа от x_n .

Построенная таким образом разностная схема имеет первый порядок аппроксимации и устойчива, когда число Куранта не превышает единицы. Все расчеты проводились на квадратной сетке $\tau = h$. Численная проверка сходимости показала, что при шагах, равных 10^{-4} и 10^{-5} , разница в результатах не превышала двух – трех единиц четвертого значащего разряда. Максимальное расхождение наблюдалось в местах наибольшего изменения производной, например, в основании и в верхней части переднего фронта прямоугольного импульса. Когда волна напряжений имела более гладкую форму синусоиды, такая же точность достигалась при шагах, равных 10^{-3} .



Фиг. 5



Фиг. 6

Сначала было исследовано влияние конструкционного демпфирования на вид одиночных импульсов, бегущих по стержню. Импульсы создавались внезапно приложенным к торцу $x = 0$ постоянным напряжением σ_0 , которое действовало в течение времени $t = 0.2$. Затем оно снималось, и торец оставался свободным. Расчеты проводились с шагом, равным 10^{-5} .

На фиг. 5 показана форма импульсов в моменты времени $t = 0.5$ и $t = 1$: Фиг. 5, *a* соответствует $\sigma_0 = 0.001$, а фиг. 5, *b* — $\sigma_0 = 0.005$. Напряжения в импульсе нормированы по σ_0 . Условные обозначения такие же, как на фиг. 2 и фиг. 3.

Передний фронт импульса, бегущий со скоростью $(E_1)^{1/2}$, по мере распространения отклоняется назад, приобретая при $a = 2$ выпуклую, а при $a = 5$ вогнутую форму. С тыльной стороны импульса образуются два фронта разгрузки. Один из них, соответствующий разгрузке по транзитному участку диаграммы, движется с максимальной скоростью, равной единице, и догоняет передний фронт, сужая тем самым часть импульса, где действуют максимальные напряжения. Второй фронт разгрузки имеет скорость $(E_2)^{1/2}$ и, наоборот, все сильнее отстает от переднего фронта. За счет этого общая длительность импульса возрастает.

Увеличение σ_0 усиливает рассеяние энергии и ведет к значительному искажению формы импульса. Как видно на фиг. 5, *b* он приобретает вид, далекий от исходного прямоугольника. После смыкания переднего фронта и догнавшего его быстрого фронта разгрузки начинается резкое уменьшение максимальных напряжений. Обращает на себя внимание "след" с низким уровнем напряжений, который формируется позади бегущего импульса и отчетливо виден на фиг. 5, *b* при $t = 1$.

Помимо эволюции одиночных импульсов были рассмотрены собственные продольные колебания стержня и влияние осевой нагрузки на их затухание. В момент $t = 0$ к торцу $x = 0$ внезапно прикладывалось постоянное напряжение $\sigma_0 = 0.003$. Оно оставалось постоянным вплоть до $t = 150$, а затем снималось. Возникшие при этом переходные процессы в сечении $x = 0.25$ показаны на фиг. 6. Для наглядности они наложены друг на друга. С этой целью из полных напряжений при $t \leq 150$ была вычтена постоянная составляющая σ_0 , а колебания, которые сопровождают снятие нагрузки (они показаны пунктирной линией), сдвинуты по оси времени до совмещения их начала с моментом приложения σ_0 . Большое время наблюдения было обеспечено расчетом с шагом, равным 10^{-4} .

После снятия внешней нагрузки колебания стержня затухают по единообразному экспоненциальному закону с высоким декрементом. В то же время, когда действует постоянное осевое усилие, амплитуда колебаний сначала резко снижается, а затем убывает значительно медленнее, чем в свободном стержне.

Этот пример является еще одной иллюстрацией уменьшения рассеяния энергии при наличии средней нагрузки в цикле и формирования диапазона амплитуд, в котором вибрации слабо затухают. Параметры такого ослабленного затухания, в принципе, можно уточнить, введя для транзитных участков свои значения параметров a и b . Обозначим их a_i и b_i . Если в результате вибрационных испытаний были получены амплитудные характеристики $\psi(A)$ при наличии статической нагрузки, то для определения a_i и b_i достаточно провести регрессию по этим характеристикам в соответствующем интервале малых амплитуд. Затем путем регрессии по $\psi(A)$ для гармонических колебаний с симметричным циклом находятся параметры a и b для основных ветвей диаграммы $\sigma - \varepsilon$. Когда конструкция изготовлена из одного материала, в первом приближении можно принять в качестве a_i и b_i соответствующие параметры для этого материала [7, 8].

Приведенные результаты показывают, что предложенная модель позволяет эффективно учесть конструкционное демпфирование в рамках расчетных схем с распределенными параметрами и внутренним рассеянием энергии. Модель адекватно отражает его характерные особенности, в том числе влияние среднего напряжения в цикле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
2. Вибрации в технике. Справочник. Т. 6. / Под ред. К.В. Фролова. М.: Машиностроение, 1995. 460 с.
3. Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Моск. лицей, 1998. 272 с.
4. Мальшиев А.П. Моделирование распределенного конструкционного демпфирования при установившихся и переходных процессах // Изв. АН. МТТ. 2001. № 4. С. 143–150.
5. Мальшиев А.П. Продольные колебания двухслойного стержня с зависящим от смещения сухим трением между слоями // Изв. АН. МТТ. 2002. № 5. С. 131–136.
6. Писаренко Г.С. Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. Киев: Наук. думка, 1985. 236 с.
7. Мальшиев А.П. Дифференциальная модель частотно-независимого рассеяния энергии при колебаниях // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 127–133.
8. Мальшиев А.П. Построение модели частотно-независимого демпфирования по амплитудной характеристике коэффициента поглощения // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 1. С. 134–141.
9. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1. / Под. ред. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
10. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.

Москва

Поступила в редакцию
18.03.2003