

© 2004 г. Л. Г. ЛОБАС, Л. Л. ЛОБАС

БИФУРКАЦИИ, УСТОЙЧИВОСТЬ И КАТАСТРОФЫ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ АСИММЕТРИЧНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Исследуется топологическая структура фазового пространства перевернутого двухзвенного математического маятника с упруговязкими шарнирами. Существенными параметрами являются угловой эксцентриситет, параметр ориентации и модуль следящей силы, а также жесткость упругой заделки верхнего конца маятника. Методом продолжения по параметру построены многообразия состояний равновесия. Выделены бифуркационные точки. При плавном изменении эксцентриситета следящей силы возможны скачкообразные переходы от одного устойчивого состояния равновесия к другому. Для вертикального состояния равновесия указаны границы применимости статической концепции Л. Эйлера в случае моделирования упругого стержня, сжатого следящей силой, двухзвенным маятником.

Попытка А. Пфлюгера [1] перенести статический метод Эйлера на задачу устойчивости консольного стержня, сжатого силой, зависящей от конфигурации упругой системы (остающейся касательной к изогнутой оси стержня), привела к неожиданному выводу о том, что в данной задаче критической нагрузки вообще не существует. Такое заключение противоречит физическим соображениям.

Парадокс Пфлюгера разрешил Г. Циглер [2], исследовавший вместо континуального стержня его дискретную модель – двухзвенный математический маятник. Однако возник другой парадокс: формальная устойчивость состояния равновесия упругой системы теряется при введении в систему бесконечно малой диссипации. В [3] обнаружен дестабилизирующий эффект также и нелинейного демпфирования в неконсервативных системах со следящими силами. В [4] авторы обратили внимание на неодинаковую роль внутреннего и внешнего трений. Г. Херманн и И.-Ч. Чжон [5] установили, что в то время как наличие малого затухания может оказывать дестабилизирующее влияние, правильная интерпретация предельного перехода при бесконечно малом затухании дает то же значение критической нагрузки, что и в отсутствие затухания. Согласно [6] говорить о парадоксе дестабилизации представляется уместным лишь в узко ограниченном смысле, поскольку при стремлении параметров диссипации к нулю критическая сила потери устойчивости как функция двух переменных не имеет предела. Влияние на критическое значение следящей силы диссипативных сил с неполной диссипацией исследовано в [7]. В [8] доказана устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, кроме, быть может, двух значений модуля следящей силы. Результаты [9] можно трактовать как распространение на случай сочлененного маятника в поле неконсервативных позиционных сил известных результатов по динамической стабилизации верхнего положения равновесия одиночного маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса. Наличие упругой заделки верхнего конца маятника [10, 11] приводит к необходимости введения еще одного существенного параметра (жесткости заделки). Каскад бифуркаций удвоения периода и детерминированный хаос изучены в [12]. Предельные циклы с использованием нормальных форм построены в [13].

В [14–16] исследованы локальные и глобальные бифуркации двойного маятника Циглера при наличии асимметрии следящей силы и соединительных пружин. Основное внимание уделено окрестности двойного нулевого собственного значения матрицы линеаризации.

1. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения маятника под воздействием асимметричной следящей силы. Пусть модуль следящей силы P постоянен, а ее направление не является ни вертикальным (“мертвая” нагрузка), ни касательным к изогнутой оси стержня (симметричная нагрузка). Угол между силой P и вертикалью обозначим через $\alpha = \delta + k\varphi_2$, $\delta = \text{const}$, $k = \text{const}$. На фиг. 1,а представлена дискретная аппроксимация континуального стержня в виде двухзвенного маятника. Границы применимости и степень адекватности такой аппроксимации здесь не рассматриваются.

Пусть m_1 и m_2 – массы материальных точек A_1 и A_2 ; звенья $OA_1 = l_1$ и $A_1A_2 = l_2$ невесомые; c_1 и c_2 – жесткости спиральных пружин в шарнирах O и A_1 соответственно; μ_1 – коэффициент вязкости в нижнем шарнире O , учитывающий действие внешнего трения; μ_2 – коэффициент вязкости в промежуточном шарнире A_1 , отражающий влияние внутреннего трения в системе; c – жесткость упругой заделки верхнего конца маятника. Будем считать, что в вертикальном положении звеньев ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$) горизонтальная пружина недеформирована. Углы φ_1 и φ_2 отклонения звеньев маятника от вертикали удовлетворяют уравнениям

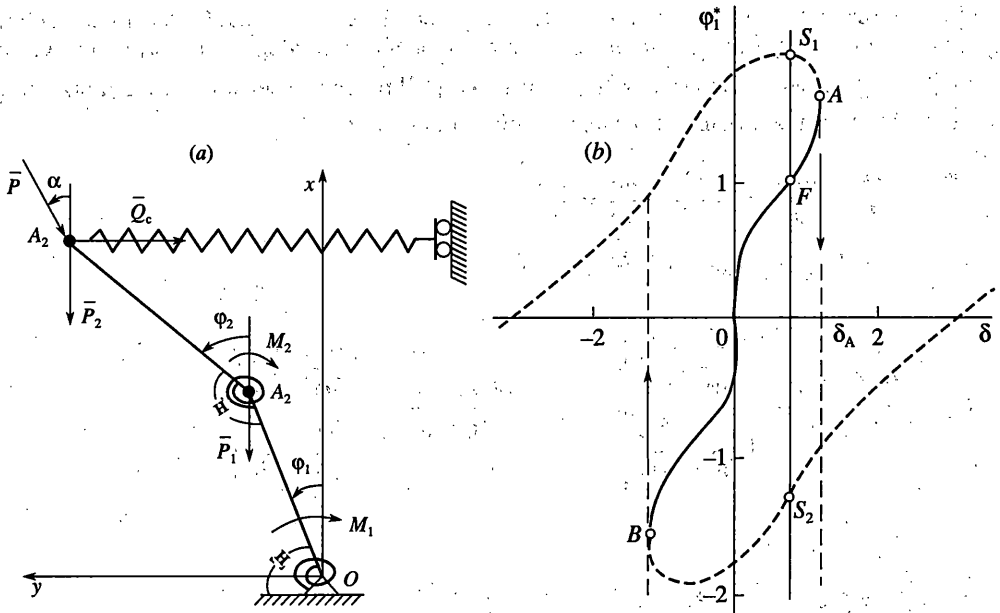
$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ & - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 + cl_1(l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 + (c_1 + c_2)\varphi_1 - \\ & - c_2\varphi_2 + (\mu_1 + \mu_2)\dot{\varphi}_1 - \mu_2\dot{\varphi}_2 - Pl_1 \sin(\varphi_1 - k\varphi_2 - \delta) = 0 \\ & m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2gl_2 \sin \varphi_2 + \\ & + cl_2(l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) \cos \varphi_2 - c_2(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + \\ & + Pl_2 \sin(k - 1)\varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Переход к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P \frac{l_2}{c_2}, \quad \bar{m}_1 = \frac{m_1}{m_2}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad \bar{c} = c \frac{l_2^2}{c_2}, \quad \bar{c}_1 = \frac{c_1}{c_2}, \quad \bar{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{l_2 \sqrt{m_2 c_2}} \\ \bar{\mu}_2 &= \frac{\mu_2}{l_2 \sqrt{m_2 c_2}}, \quad \bar{g} = g \frac{m_2 l_2}{c_2}, \quad \bar{t} = \frac{t}{l_2} \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}, \quad \frac{d}{d\bar{t}} = (') = l_2 \sqrt{\frac{m_2 d}{c_2 dt}} \end{aligned}$$

позволяет уменьшить общее количество параметров с 12 в (1.1) до 9 в системе дифференциальных уравнений движения в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} & (1 + \bar{m}_1)\bar{l}_1^2\varphi_1'' + \bar{l}_1\varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \bar{l}_1(\varphi_2')^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ & - \bar{g}\bar{l}_1(1 + \bar{m}_1) \sin \varphi_1 + \bar{c}\bar{l}_1(\bar{l}_1 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 + (1 + \bar{c}_1)\varphi_1 - \\ & - \varphi_2 + (\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)\varphi_1' - (1 + \bar{\mu}_2)\varphi_2' - \bar{P}\bar{l}_1 \sin(\varphi_1 - k\varphi_2 - \delta) = 0 \\ & \bar{l}_1\varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2'' - \bar{l}_1(\varphi_1')^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \bar{g} \sin \varphi_2 + \\ & + \bar{c}(\bar{l}_1 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \cos \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_2 - \bar{\mu}_2\varphi_1' + \bar{\mu}_2\varphi_2' - \\ & - \bar{P} \sin[(1 - k)\varphi_2 - \delta] = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

2. Эволюция состояний равновесия маятника при изменении его параметров. Найдем такое решение системы (1.2), для которого $\varphi_1 = \varphi_1^* = \text{const}$, $\varphi_2 = \varphi_2^* = \text{const}$. Значения φ_1^* , φ_2^* являются решениями системы трансцендентных уравнений

$$f_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \delta) = 0, \quad f_2(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \delta) = 0 \quad (2.1)$$

$$f_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \delta) = -\bar{g}\bar{l}_1(1 + \bar{m}_1)\sin\varphi_1^* + \bar{c}\bar{l}_1(\bar{l}_1\sin\varphi_1^* + \sin\varphi_2^*)\cos\varphi_1^* + (1 + \bar{c}_1)\varphi_1^* - \varphi_2^* + \bar{P}\bar{l}_1\sin(\delta - \varphi_1^* + k\varphi_2^*), \quad f_2(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \delta) = -\bar{g}\sin\varphi_2^* + \bar{c}(\bar{l}_1\sin\varphi_1^* + \sin\varphi_2^*)\cos\varphi_2^* - \varphi_1^* + \varphi_2^* + \bar{P}\sin[\delta - (1 - k)\varphi_2^*] \quad (2.2)$$

Одно решение системы (2.1) известно заранее: если $\delta = 0$, то $\varphi_1^* = 0$, $\varphi_2^* = 0$, что соответствует вертикальным положениям обоих звеньев маятника. Зафиксируем все параметры маятника, кроме δ , и будем искать зависимости

$$\varphi_1^* = \varphi_1^*(\delta), \quad \varphi_2^* = \varphi_2^*(\delta) \quad (2.3)$$

методом продолжения по параметру [17]. По теореме о непрерывной зависимости решений гладкой динамической системы от параметра существует окрестность точки $\delta = 0$, $\varphi_1^* = 0$, $\varphi_2^* = 0$, непрерывным переходом из которой можно попасть в точки $\delta \neq 0$, $\varphi_1^* \neq 0$, $\varphi_2^* \neq 0$. Пусть тройка чисел φ_1^* , φ_2^* , δ является решением системы (2.1). В пространстве величин φ_1^* , φ_2^* , δ совокупность таких троек образует кривую ли-

нию L – множество положений равновесия двухзвенного маятника. Обозначим через s дуговую координату точек кривой L . Параметрические уравнения этой кривой имеют вид $\varphi_1^* = \varphi_1^*(s)$, $\varphi_2^* = \varphi_2^*(s)$, $\delta = \delta(s)$. Согласно [17] решение системы конечных уравнений (2.1) сводится к решению следующей задачи Коши:

$$\frac{d\varphi_1^*}{ds} = \frac{D_1}{D}, \quad \frac{d\varphi_2^*}{ds} = -\frac{D_2}{D}, \quad \frac{d\delta}{ds} = \frac{D_3}{D} \quad (2.4)$$

$$\varphi_1^*|_{s=0} = 0, \quad \varphi_2^*|_{s=0} = 0, \quad \delta|_{s=0} = 0$$

$$D_1 = \frac{D(f_1, f_2)}{D(\varphi_2^*, \delta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2^*} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2^*} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \frac{D(f_1, f_2)}{D(\varphi_1^*, \delta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1^*} & \frac{\partial f_1}{\partial \delta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1^*} & \frac{\partial f_2}{\partial \delta} \end{vmatrix}$$

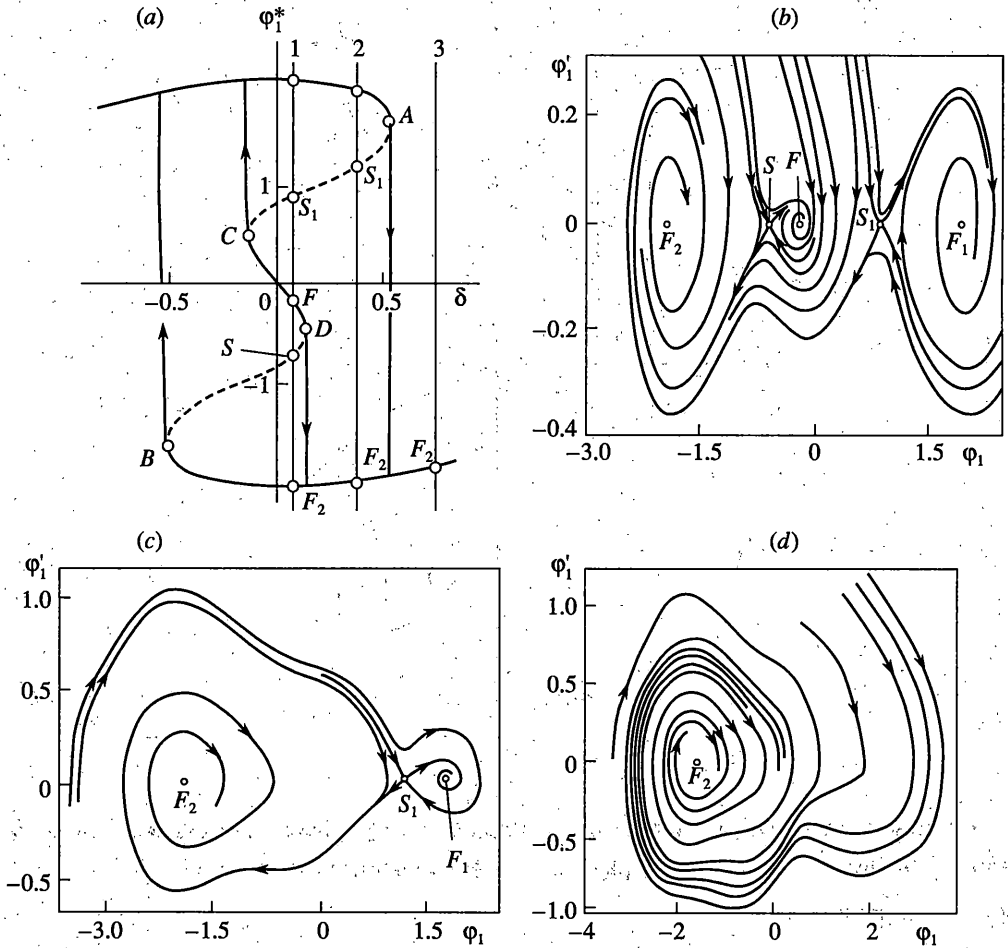
$$D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1^*} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2^*} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1^*} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2^*} \end{vmatrix} = \frac{D(f_1, f_2)}{D(\varphi_1^*, \varphi_2^*)}, \quad D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}$$

Точки, в которых $D_3 = 0$, являются точками мгновенной остановки изменения параметра δ вдоль L . В них кривая (2.3) имеет вертикальную касательную; к таким точкам подходят две ветви кривой; они являются кратными особыми точками системы (1.2) в нормальной форме Коши

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = F_1(x_1, \dots, x_4), \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = F_2(x_1, \dots, x_4) \quad (2.5)$$

в них одно собственное значение матрицы линеаризации равно нулю (критический случай теории Ляпунова). В окрестности этих точек функции (2.2) функционально зависимы, не существуют неявные функции $\varphi_1^*(\delta)$, $\varphi_2^*(\delta)$, выражения (2.3) не определены однозначно. Такие точки являются бифуркационными.

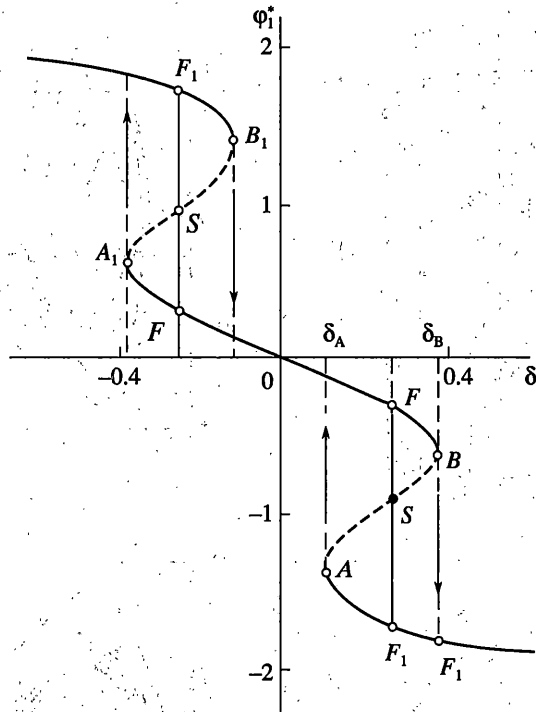
Примем $\bar{m}_1 = 2$, $\bar{l}_1 = 1$, $\bar{c}_1 = 1$, $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0.45$, $\bar{P} = 0.75$, $\bar{c} = 0.25$. Решение задачи (2.4) сопровождалось контролем выполнимости равенств (2.1). При всех значениях дуговой координаты s кривой L значения функций f_1 и f_2 в (2.1) не превосходили 10^{-9} для значений параметра ориентации k , указанных далее. Конфигурация графиков функций $\varphi_1^*(\delta)$ и $\varphi_2^*(\delta)$ одинакова; отличие лишь в том, что $|\varphi_2^*(\delta)| > |\varphi_1^*(\delta)|$ для одних и тех же значений δ . Поэтому ограничимся изображением кривых $\varphi_1^* = \varphi_1^*(\delta)$. Они показаны на фиг. 1, *в* для $k = 0$, на фиг. 2, *а* для $k = 0.25$ и на фиг. 3 для $k = 0.5$. Точки A, B, C, D, A_1, B_1 являются бифуркационными. Сплошные участки кривых (2.3) на этих фигурах отвечают устойчивым состояниям равновесия маятника, штриховые – неустойчивым. При плавном изменении углового эксцентриситета δ следящей силы и прохождении бифуркационных точек в определенном направлении происходит скачкообразные переходы от одного устойчивого состояния равновесия к другому – катастрофы состояний равновесия. Они указаны стрелками на фиг. 1, *в*; 2, *а* и 3.



Фиг. 2

Наиболее богатой является фиг. 2,а. Из нее видно, что при возрастании $|\delta|$ количество состояний равновесия маятника равно пяти (прямая 1: точки F , F_1 и F_2 устойчивы, точки S и S_1 неустойчивы), трем (прямая 2: точки F_1 и F_2 устойчивы, точка S_1 неустойчива) и единице (прямая 3: точка F_2 устойчива). Тип каждой особой точки динамической системы (2.5) устанавливается непосредственным интегрированием системы и построением соответствующего фазового портрета. На фиг. 2,б – д приведены двумерные проекции фазовых потоков системы (2.5) для $\delta = 0.1$ (фиг. 2,а), $\delta = 0.4$ (фиг. 2,с) и $\delta = 0.715$ (фиг. 2,д). Эти значения δ соответствуют прямым 1–3 на фиг. 2,а.

Таким образом, для $k = 0$ (фиг. 1,а) возможно лишь одно устойчивое состояние равновесия F (при $|\delta| < 1.2$). Для $k = 0.5$ (фиг. 3) существует лишь одно (устойчивое) состояние равновесия при $|\delta| < \delta_A = 0.11$, три состояния равновесия (F и F_1 устойчивые, S неустойчивое) при $\delta_A < |\delta| < \delta_B = 0.37$, одно (устойчивое) состояние равновесия при $|\delta| > \delta_B$. Для $k \geq 1$ бифуркационные явления смещаются в область больших значений $|\delta|$. Об этом свидетельствует фиг. 4, построенная для $k = 1$. При этом хотя бы одно устойчивое состояние равновесия существует всегда.



Фиг. 3

3. Влияние ориентации следящей силы на области устойчивости верхнего положения равновесия. Линеаризовав уравнения (1.2) в окрестности значений $\delta = 0$, $\varphi_1^* = 0$, $\varphi_2^* = 0$, получим

$$(1 + \bar{m}_1) \bar{l}_1^2 \varphi_1'' + \bar{l}_1 \varphi_2'' + (\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2) \varphi_1' - \bar{\mu}_2 \varphi_2' + [1 + \bar{c}_1 - \bar{g} \bar{l}_1 (1 + \bar{m}_1) + \bar{c} \bar{l}_1^2 - \bar{P} \bar{l}_1] \varphi_1 + (\bar{c} \bar{l}_1 - 1 + k \bar{P} \bar{l}_1) \varphi_2 = 0 \quad (3.1)$$

$$\bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' - \bar{\mu}_2 \varphi_1' + \bar{\mu}_2 \varphi_2' + (\bar{c} \bar{l}_1 - 1) \varphi_1 + [1 + \bar{c} - \bar{g} + (k - 1) \bar{P}] \varphi_2 = 0$$

Система (3.1) отличается от систем, исследованных в [4, 10, 11], наличием параметра k , который может принимать различные значения (включая и $k = 1$). Ее характеристическое уравнение имеет вид

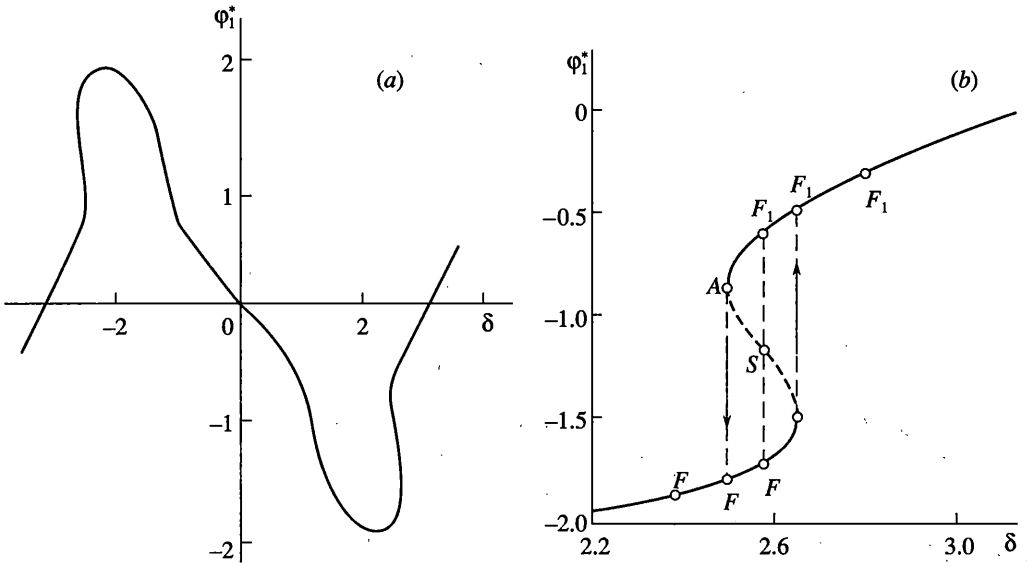
$$\lambda^4 + B_1 \lambda^3 + B_2 \lambda^2 + B_3 \lambda + B_4 = 0 \quad (3.2)$$

$$B_1 = -c_{22} - c_{44}, \quad B_2 = \bar{c} + E_2, \quad B_3 = \bar{c} E_3 + E_4, \quad B_4 = -h_2 \bar{c} + h_1$$

$$E_2 = c_{22} c_{44} - c_{24} c_{42} - c_{21} - b_{43}, \quad E_3 = c_{24} \bar{l}_1 - c_{22}$$

$$E_4 = c_{21} c_{44} - c_{23} c_{42} + c_{22} - b_{43} - c_{24} b_{41}$$

$$h_1 = c_{21} b_{43} - c_{23} b_{41}, \quad h_2 = c_{21} + c_{23} \bar{l}_1, \quad c_{21} = -\frac{1}{\bar{m}_1 \bar{l}_1} [1 + \bar{c}_1 - \bar{g} \bar{l}_1 (1 + \bar{m}_1) + \bar{l}_1 (1 - \bar{P})]$$



Фиг. 4

$$c_{22} = -\frac{1}{\bar{m}_1 \bar{l}_1^2} = [\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + (1 + \bar{l}_1)], \quad c_{23} = \frac{1}{\bar{m}_1 \bar{l}_1^2} [1 + \bar{l}_1(1 - g - \bar{P})], \quad c_{24} = \frac{\mu_2(1 + \bar{l}_1)}{\bar{m}_1 \bar{l}_1^2}$$

$$c_{41} = -\bar{c} \bar{l}_1 + b_{41}, \quad c_{43} = -\bar{c} b_{43}, \quad b_{41} = \frac{1}{\bar{m}_1 \bar{l}_1} [1 + \bar{c}_1 + \bar{l}_1(1 - \bar{g})(1 + \bar{m}_1) - \bar{P} \bar{l}_1]$$

$$b_{43} = -\frac{1}{\bar{m}_1 \bar{l}_1} \{1 + \bar{l}_1(1 - \bar{g})(1 + \bar{m}_1) + \bar{l}_1 \bar{P} [\bar{m}_1(k - 1) - 1]\},$$

$$c_{42} = \frac{1}{\bar{m}_1 \bar{l}_1} \{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 [1 + \bar{l}_1(1 + \bar{m}_1)]\}$$

$$c_{43} = -\frac{1}{\bar{m}_1 \bar{l}_1} \{1 + \bar{l}_1(1 - \bar{g})(1 + \bar{m}_1) + \bar{m}_1 \bar{l}_1 \bar{c} + \bar{l}_1 \bar{P} [\bar{m}_1(k - 1) - 1]\}$$

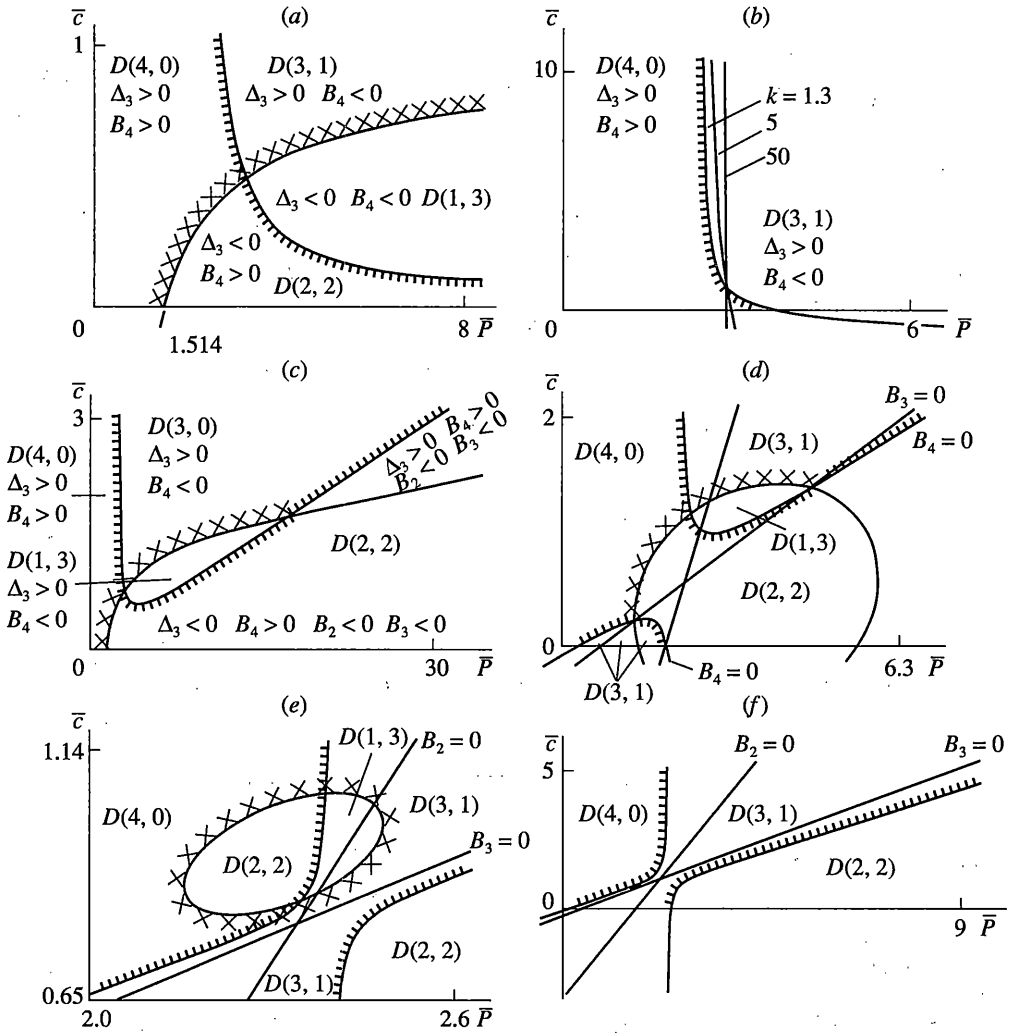
$$c_{44} = -\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{m}_1 \bar{l}_1} [1 + \bar{l}_1(1 + \bar{m}_1)]$$

Гиперповерхности пространства параметров, являющиеся границами области устойчивости, при выполнении условий $B_1 > 0, B_2 > 0, B_3 > 0$ описываются уравнениями

$$\Delta_3 = 0, \quad \Delta_3 = B_3(B_1 B_2 - B_3) - B_1^2 B_4 \tag{3.3}$$

$$B_4 = 0 \tag{3.4}$$

На плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} каждому из уравнений (3.3) и (3.4) соответствуют две алгебраические уникурсальные кривые, являющиеся для большинства значений параметра k гиперболами. Лишь для некоторых значений k кривая (3.3) становится эллипсом. Пусть $D(s, 4 - s)$ – область плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} , в которой s корней уравнения (3.2) имеют отрицательные действительные части. D -разбиение этой плоскости показано на фиг. 5,а для $k = 1$. При переходе кривой (3.3) действительная часть двух



Фиг. 5

комплексных корней меняет знак, т.е. на самой кривой имеем два чисто мнимых корня. На кривой (3.4) один корень уравнения (3.2) равен нулю. Переход через нее сопровождается изменением знака одного корня, поэтому она заштрихована один раз. Ее переход с незаштрихованной стороны на заштрихованную увеличивает на единицу количество корней с отрицательной действительной частью. Конфигурация кривых (3.3) и (3.4) весьма чувствительна к параметру ориентации следящей силы. Даже небольшое увеличение значений k приводит к тому, что кривая (3.3) опускается из первого квадранта в четвертый, поэтому в D -разбиении участвует лишь одна ветвь кривой (3.4) (фиг. 5,б).

Будем отслеживать изменения в D -разбиении, вызванные уменьшением параметра k . Они начинаются со значения $k = 0.8$ (фиг. 5,с) и обусловлены тем, что при достаточно больших значениях \bar{P} кривая (3.4) не опускается (как на фиг. 5,а), а поднимается. В результате возникает дополнительная точка пересечения кривых (3.3) и (3.4). Еще

более разительные изменения возникают при последующем уменьшении параметра k и приближении к “мертвой” силе \mathbf{P} (когда $k = 0$). Тогда происходит перестройка обеих кривых (3.3) и (3.4), вызывающая иную конфигурацию областей $D(s, 4 - s)$. Хотя при $k = 0.6$ общее разбиение плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} в принципе аналогично разбиению при $k = 0.8$, однако соотношение между размерами областей отличается, поскольку соответствующая ветвь кривой (3.3) опускается для $\bar{P} > 11$.

На фиг. 5,d приведено разбиение плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} при $k = 0.4$. Принципиально новыми являются два обстоятельства: во-первых, кривая (3.3) становится эллипсом, во-вторых, в разбиении принимают участие обе ветви гиперболы (3.4). При меньших значениях параметра k ориентация ветвей гиперболы (3.4) сохраняется до $k = 0.19$, но для $k \leq 0.18$ она изменяется. В отличие от случая $k = 0.4$, в D -разбиении при $k = 0.18$ (фиг. 5,e) принимает участие вся кривая (3.3). Дальнейшее уменьшение параметра k приводит к тому, что кривая (3.3) исчезает из первого квадранта, и D -разбиение производится лишь кривой (3.4). Такая ситуация показана на фиг. 5,f для $k = 0$ (случай Эйлера), и она сохраняется до $k = -0.4$. Однако при $k = -0.5$ (фиг. 6,a) на плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} появляется граница (3.3) области $D(4, 0)$, являющаяся теперь эллипсом. Поэтому область $D(4, 0)$ асимптотической устойчивости вертикального состояния равновесия маятника становится двухсвязной и получается вырезанием области $D(2, 2)$ из части первого квадранта, расположенного левее ветви кривой $B_4 = 0$. С уменьшением k эта область смещается вправо. Поэтому уже при $k = -0.52$ D -разбиение качественно такое же, как на фиг. 5,e.

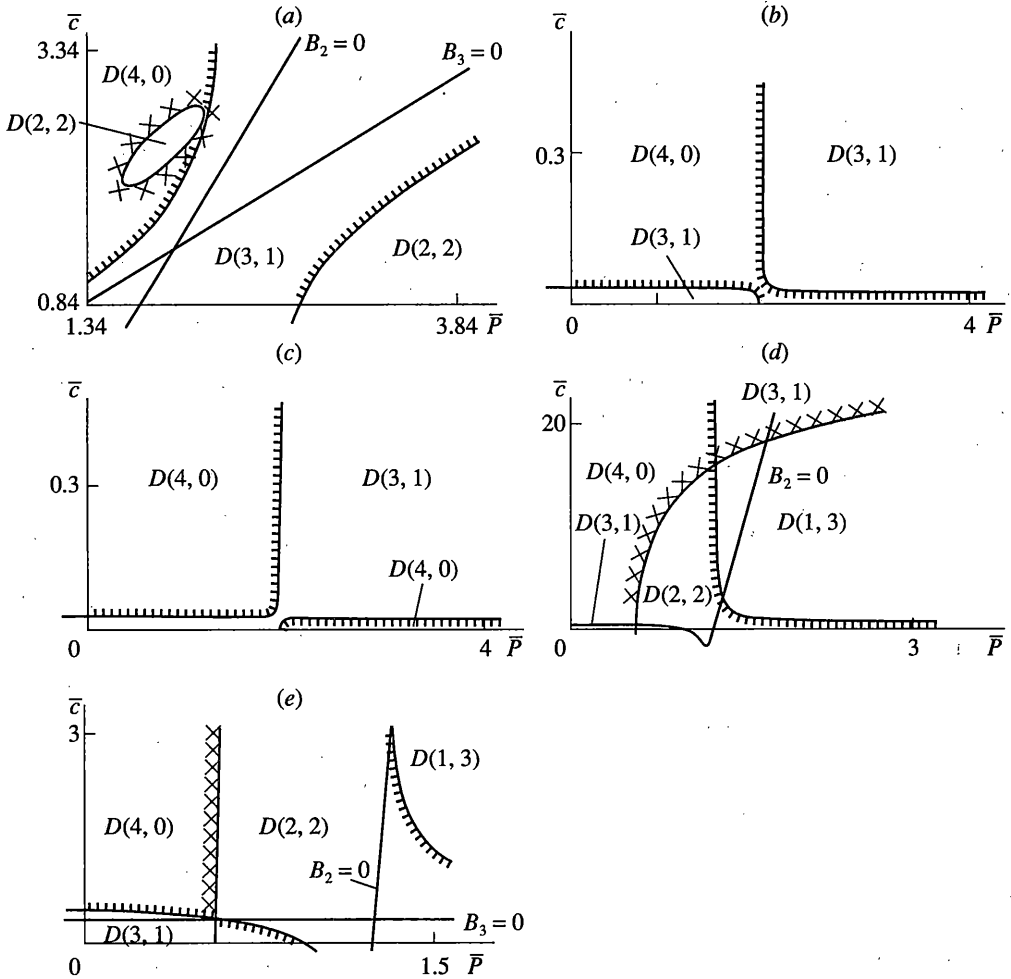
При $k = -1.5$ и $k = -10$ ориентация ветвей гиперболы $B_4 = 0$ такая, как на фиг. 5,f, однако кривая $\Delta_3 = 0$ опять изменяется: из эллипса она превращается в гиперболу.

4. О границах применимости статической концепции Эйлера в теории упругих стержней со следящими силами. Метод Эйлера нахождения критической нагрузки сжатого стержня, предложенный для $k = 0$, оказался непригодным для $k = 1$. Однако динамическая система (2.4) гладко зависит от параметров маятника (в том числе и параметра k ориентации следящей силы). Должна существовать поэтому область пространства параметров, в которой концепция Эйлера пригодна также и в случае следящих сил. В данной работе описана методика определения такой области. Для принятых выше числовых значений параметров маятника указанная область значений параметра k такова: $-0.4 \leq k \leq 0.17$ или $k \geq 1.3$. Неустойчивость при этом может быть лишь дивергентной.

5. О влиянии инерционных параметров маятника. Даже для симметричной следящей силы ($k = 1$) можно так подобрать соотношения между массами точек m_1 и m_2 , что D -разбиение плоскости параметров \bar{P} и \bar{c} повторит многие ситуации, показанные на приведенных выше фигурах. Асимметрия следящей силы лишь увеличит соответствующие эффекты.

Влияние инерционных параметров обусловлено, в частности, тем, что при $m_2 \rightarrow 0$ происходит сингулярное вырождение системы (1.1). Рассмотрим это влияние для $k = 1$. Будем увеличивать \bar{m}_1 (например, уменьшая m_2). При $\bar{m}_1 = 16.3$ (фиг. 6,в) кривая $\Delta_3 = 0$ покидает первый квадрант, область асимптотической устойчивости $D(4, 0)$ существует при “больших” значениях \bar{P} и “малых” значениях \bar{c} (в отличие от ситуации, изображенной для $\bar{m}_1 = 2$ на фиг. 5,a), возможна лишь дивергентная неустойчивость. Для “малых” \bar{c} и ограниченных \bar{P} часть первого квадранта превращается в область $D(3, 1)$.

При $\bar{m}_1 = 16.32$ (фиг. 6,с) ветви гиперболы $B_4 = 0$ меняют ориентацию, а область $D(4, 0)$ становится разделенной на две части.



Фиг. 6

Уменьшение \bar{m}_1 до значения 0.5 не приводит к качественным изменениям. Но при $\bar{m}_1 = 0.05$ наблюдается качественно новая ситуация, отличающаяся от приведенных выше. Она изображена на фиг. 6, *d, e*, причем фигура (*e*) является фрагментом фигуры (*d*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pflüger A. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer, 1950. 339 s.
2. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing.-Arch. 1952. Bd. 20. H. 1. S. 49–56.
3. Hagedorn P. On the destabilizing effect of the non-linear damping in non-conservative systems with follower forces // Int. J. Non-Linear Mech. 1970. V. 5. № 2. P. 341–358.
4. Пановко Я.Г., Сорокин С.В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 135–139.
5. Herrmann G., Jonh I.-C. On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // Trans. ASME. Ser. E: J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 3. P. 592–597.

6. Сейранян А.П. О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределенности критической нагрузки // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 3. С. 323–326.
7. Жинжер Н.И. Влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 149–155.
8. Агафонов С.А. Об устойчивости и автоколебаниях двойного маятника с упругими элементами, находящегося под действием следящей силы // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 185–190.
9. Агафонов С.А. Эффект стабилизации равновесия маятника Циглера параметрическим возбуждением // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 36–40.
10. Scheidl R., Troger H., Zeman K. Coupled flutter and divergence bifurcation of a double pendulum // Int. J. Non-Linear Mech. 1984. V. 19. № 2. P. 163–176.
11. Troger H., Steindl A. Nonlinear stability and bifurcation theory. Wien; New York: Springer, 1991. 407p.
12. Bi Q., Yu P. Double Hopf bifurcations and chaos of a nonlinear vibration system // Nonlinear Dynamics. 1999. V. 19. № 4. P. 313–332.
13. Hsu L., Min L.J., Favretto L. A recursive approach to compute normal forms // J. Sound and Vibrat. 2001. V. 243. № 5. P. 909–927.
14. Jin J.-D., Matsuzaki Y. Bifurcations in a two-degree-of freedom elastic system with follower forces // J. Sound and Vibrat. 1988. V. 126. № 2. P. 265–277.
15. Jin J.-D., Matsuzaki Y. Stability and bifurcations of a double pendulum subjected to a follower force // AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 30th Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Mobile, Ala, 1989: Collect. Techn. Pap. Pt. 1. Washington, 1989. P. 432–439.
16. Matsuzaki Y., Futura S. Codimension three bifurcation of a double pendulum subjected a follower force with imperfection // AIAA Dyn. Spec. Conf., Long Beach, Calif., 1990: Collect. Techn. Pap. Washington (D.C.), 1990. P. 387–394.
17. Shinohara Y. A geometric method for the numerical solution of non-linear equations and its application to non-linear oscillations // Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 1972. V. 8. № 1. P. 13–42.

Киев

Поступила в редакцию
7.03.2002