

УДК 539.3

© 2004 г. Л.В. МУРАВЛЕВА С.В. ШЕШЕНИН

## **ОБ ОСРЕДНЕНИИ ТОНКОСТЕННЫХ ТЕЛ**

Представлено развитие известной методики осреднения [1, 2] для тел, которые имеют периодическую структуру не во всех направлениях. Многие тонкостенные тела имеют периодическую структуру в двух (или одном) направлениях, и не имеют периодичности структуры в третьем направлении. Такие элементы конструкций имеют широкое распространение в технике. Например, это штампованные и ребристые пластины, железобетонные плиты (или балки) или протектор шины. Для всех таких тел кажется естественным использовать эффективные механические характеристики. Конечно, во многих случаях осредненные или эффективные характеристики могут быть найдены, исходя из инженерного понимания эффективных свойств, которое фактически соответствует экспериментальному определению упругих модулей в опытах с представительными образцами материала. Однако желательно находить не только средние характеристики периодической структуры, средние напряжения и деформации, но и флуктуации этих полей в компонентах структуры. Такую возможность представляет методика осреднения, имеющая давнюю историю. В большинстве работ метод применялся для структур, периодических во всех направлениях, хотя в [3] метод применен для осреднения плоской задачи теории упругости для неоднородной пластины постоянной толщины. В [4] метод применен для однородных пластин переменной толщины. Периодические ребристые пластины рассматривались в [5, 6], однако использованные там методики не опирались на метод осреднения. В [7] внимание уделено пластинам, неоднородным по толщине.

В настоящей работе, следуя [3, 4] методика осреднения вначале применена к неоднородным пластинам произвольной толщины (например, штампованным пластинам) для определения продольных и изгибных жесткостей. При этом обнаружено интересное свойство осреднения таких пластин, состоящее в том, что средние деформации растяжения и сдвига не могут быть найдены осреднением по объему. Далее методика осреднения применена для вычисления продольных и изгибных жесткостей штампованной алюминиевой пластины.

Другой объект, к которому применена развитая методика – железобетонные плиты, арматура которых не имеет периодической структуры по направлению поперек толщины. Причем, для конкретной плиты (для которой известны экспериментальные данные исследования поперечного изгиба [8]) найдены эффективные характеристики в упругой и пластической областях.

И, наконец, методика развита для определения эффективных свойств протектора пневматических шин. Известно, что рисунок протектора может быть весьма сложным. Дискретизация такой сложной области при численном моделировании шин ведет к большим вычислительным затратам и не является оправданной. Использование эффективных свойств протектора позволяет сократить вычислительные затраты.

1. Предварительно рассмотрим задачу о плоской деформации пластины, периодической в плане. Пример ячейки периодичности такой пластины показан на фиг. 1. Методику осреднения применяем в первом приближении, чтобы не загромождать изложение длинными формулами со многими индексами. С другой стороны, первое приближение является наиболее используемым в практике.

Поле перемещений аналогично [8] представим в виде

$$u_i = v_i(\mathbf{x}) + \alpha N_{iPQ}(\xi) v_{P,Q}(\mathbf{x}) + \alpha^2 u_i^{(2)}(\xi, \mathbf{x}) \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{v}$  – гладкая составляющая перемещения,  $\alpha$  – малый параметр. Отличительной чертой данного выражения является то, что функция  $\mathbf{v}$  зависит только от двух координат  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , тогда как функция  $N_{iPQ}$  – от  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  (эти координаты, как известно, называются быстрыми:  $\xi_i = x_i/\alpha$ ). В выше приведенной формуле суммирование по малым индексам ведется в пределах от одного до трех, а по большим индексам – от одного до двух. Функция  $u^{(2)}$  нужна для обоснования точности первого приближения [1]. Стороны ячейки периодичности в плане равны, соответственно  $l_I$  ( $I = 1, 2$ ), причем при  $\xi_I = \pm l_I/2$  заданы условия периодичности. Эту часть границы обозначим  $\Sigma_{\text{per}}$ , а свободную часть границы –  $\Sigma_p$ . На ней задано условие отсутствия нагрузки. Везде в статье большими латинскими буквами обозначены индексы, принимающие значения 1,2, а малыми – значения 1, 2, 3. Суммирование по малым индексам ведется в пределах от одного до трех, а по большим индексам – от одного до двух.

Подставляя (1.1) в закон Гука, получим известные выражения, отбросив члены, содержащие  $\alpha$ :

$$\sigma_{ij} = P_{ijPQ} v_{P,Q}, \quad P_{ijPQ} = C_{ijkl} N_{kPQ,i} + C_{ijPQ} \quad (1.2)$$

в которых запятая обозначает, в зависимости от контекста, частную производную либо по быстрым, либо по медленным координатам. Там, где требуется уточнение, по какой переменной производится дифференцирование, производная обозначается либо как  $u_{\xi_i}^{(2)}$ , либо как  $u_{x_i}^{(2)}$ .

Подставляя (1.1) в уравнения равновесия и граничные условия на свободной поверхности, будем иметь

$$(1/\alpha) P_{ijPQ,j}(\xi) v_{P,Q}(\mathbf{x}) + P_{ijPQ}(\xi) v_{P,Qj}(\mathbf{x}) + (C_{ijkl}(\xi) N_{kPQ}(\xi))_{,j} v_{P,QL}(\mathbf{x}) + (C_{ijkl}(\xi) u_{k,\xi_i}^{(2)}(\xi, \mathbf{x}))_{,\xi_j} + f_i(\mathbf{x}) + O(\alpha) = 0 \quad (1.3)$$

$$P_{ijPQ}(\xi) n_j(\xi) v_{P,Q}(\mathbf{x}) + \alpha C_{ijkl}(\xi) N_{kPQ}(\xi) n_j(\xi) v_{P,QL}(\mathbf{x}) + C_{ijkl}(\xi) u_{k,\xi_i}^{(2)}(\xi, \mathbf{x}) n_j(\xi) + O(\alpha) = 0 \quad (1.4)$$

где  $C_{ijkl}$  – упругие модули материала, которые могут зависеть от  $\xi$ ;  $f_i$  – объемные силы ( $f_3 = 0$ ). Из уравнений (1.3), (1.4) следуют задача на ячейке периодичности для определения функции  $N$  и задача во всей области, для определения функции  $\mathbf{v}$ . Задача на ячейке периодичности имеет вид

$$P_{ijPQ,j} = 0 \quad (P, Q = 1, 2) \quad (1.5)$$

$$P_{ijPQ} n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_p \quad (1.6)$$

плюс условия периодичности при  $\xi_I = \pm l_I/2$ .

Осредненные модули на растяжение и сдвиг должны определяться в следующем виде (такое определение соответствует экспериментальному определению эффективных модулей):

$$H_{ijPQ} = \langle P_{ijPQ} \rangle \quad (1.7)$$

где угловые скобки обозначают осреднение по объему ячейки периодичности. Поэтому, чтобы уравнения равновесия имели естественный вид

$$H_{IJPQ} v_{P,QJ} + f_i = 0 \quad (1.8)$$

функция  $u^{(2)}$  должна представляться в виде  $u_i^{(2)} = N_{iPQJ} v_{P,QJ}$ , а функция  $N_{iPQJ}$  — удовлетворять краевой задаче

$$\begin{aligned} (C_{imki} N_{kPQJ})_{,m} + (C_{ilkj} N_{kPQ})_{,l} + P_{iJPQ} - H_{iJPQ} &= 0 \\ (C_{imki} N_{kPQJ}) n_m + (C_{ilkj} N_{kPQ}) n_l &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

с условиями периодичности на границе  $\Sigma_{\text{per}}$ . Действительно, из (1.9) при учете условий периодичности вытекает равенство (1.7). В задачах (1.9), (1.5), (1.6) нагрузка является уравновешенной, поэтому их решения существуют.

Одно замечание относительно вычисления средней деформации следует сделать. В случае среды, периодической по всем направлениям, средняя деформация может быть вычислена как среднее арифметическое по объему ячейки периодичности

$$\frac{1}{V_{\text{cell}}} \int_{V_{\text{cell}}} \varepsilon_{PQ} dV \quad (1.10)$$

При наличии свободных границ эта формула не дает значение осредненной (эффективной) деформации. Чтобы пояснить в чем тут дело, приведем сначала выражения для осредненных напряжений и деформаций, которые вытекают из методики осреднения. Осредняя (1.2) по ячейке периодичности, получим

$$\langle \sigma_{IJ} \rangle = H_{IJPQ} \langle \varepsilon_{PQ} \rangle \quad (1.11)$$

где среднюю деформацию следует вычислять как деформацию осредненного поля перемещений по формуле

$$\langle \varepsilon_{PQ} \rangle = (v_{P,Q} + v_{Q,P})/2 \quad (1.12)$$

а не по формуле (1.10). Действительно, из (1.1) вытекает, что с точностью до  $O(\alpha)$ :

$$\frac{1}{V_{\text{cell}}} \int_{V_{\text{cell}}} \varepsilon_{IJ}(\mathbf{u}) dV = \frac{1}{2} \left[ (v_{I,J} + v_{J,I}) + \frac{1}{V_{\text{cell}}} \int_{V_{\text{cell}}} (N_{IPQ,J} + N_{JPQ,I}) dV v_{P,Q} \right] \quad (1.13)$$

В случае свободной границы очевидно, что интеграл от функции  $N$ , вообще говоря, не равен нулю, так как

$$\int_{V_{\text{cell}}} N_{IPQ,J} dV = \int_{\Sigma_p} N_{IPQ} n_J d\Sigma \neq 0 \quad (1.14)$$

Это замечание и завершает изложение методики осреднения для рассматриваемого случая.

Для численного решения задачи на ячейке периодичности удобнее ввести вместо функции  $N$  функцию  $M$ :

$$M_{kPQ} = N_{kPQ} + (\xi_P \delta_{kQ} + \xi_Q \delta_{kP})/2 \quad (1.15)$$

Для каждой  $P, Q$  функция  $M$  удовлетворяет обычным уравнениям равновесия. По направлениям 1, 2 для функций  $M_{kPQ}$  выполняются модифицированные условия периодичности

$$M_{kPQ}|_{\xi_I = l_I/2} = M_{kPQ}|_{\xi_I = -l_I/2} + (l_P \delta_{kQ} + l_Q \delta_{kP})/2, \quad I = 1, 2 \quad (1.16)$$

На свободной границе функция  $M$  удовлетворяет обычному условию отсутствия нагрузки

$$C_{ijkl} M_{kPQ, i} n_j = 0$$

Функция  $M_{iPQ}$  имеет ясный механический смысл – с точностью до множителя  $\alpha$  это поле перемещений, возникающее в случае макро однородной деформации  $v_I = \epsilon_{IJ}^0 x_J$  (например, при экспериментальном определении эффективных свойств):

$$u_i = \alpha M_{iPQ} \epsilon_{PQ}^0$$

Модули  $H_{IJPQ}$  представляют собой эффективные жесткости пластины, отнесенные к толщине. Полная жесткость пластины в плане определяется из соотношений

$$T_{IJ} = B_{IJPQ} \epsilon_{PQ}^0 \quad (1.17)$$

$$T_{IJ} = \frac{1}{l_1 l_2} \int_{V_{\text{cell}}} \sigma_{IJ} dV, \quad B_{IJPQ} = \frac{1}{l_1 l_2} \int_{V_{\text{cell}}} P_{IJPQ} dV$$

2. Аналогично [4] можно найти решение в первом приближении задачи об изгибе и кручении пластины моментами. Перемещения в этом случае ищем в виде

$$u_I = -x_3 w_{,I}(x) + \alpha^2 N_{IPQ}(\xi) w_{,PQ}(x), \quad u_3 = w(x) + \alpha^2 N_{3PQ}(\xi) w_{,PQ}(x) \quad (2.1)$$

Напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_{ij} = \alpha Q_{ijPQ} w_{,PQ}, \quad Q_{ijPQ} = -\xi_3 C_{ijPQ} + C_{ijkl} N_{kPQ, l} \quad (2.2)$$

а задача на ячейке периодичности имеет вид, аналогичный задаче (1.5), (1.6):

$$Q_{ijPQ, j} = 0 \quad (P, Q = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$Q_{ijPQ} n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_p$$

Если снова ввести функцию  $M$

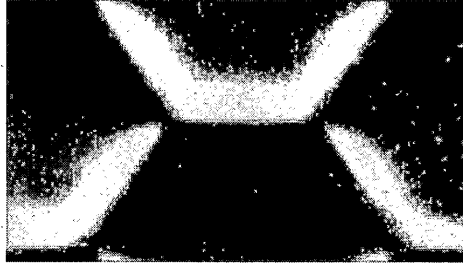
$$N_{kPQ} = M_{kPQ} + \xi_3 (\xi_P \delta_{kQ} + \xi_Q \delta_{kP})/2$$

$$N_{3PQ} = M_{3PQ} - \xi_P \xi_Q/2 \quad (2.4)$$

то условия периодичности переписутся в виде

$$M_{kPQ}|_{\xi_I = l_I/2} = M_{kPQ}|_{\xi_I = -l_I/2} - x_3 (l_P \delta_{kQ} + l_Q \delta_{kP})/2, \quad M_{3PQ}|_{\xi_I = l_I/2} = M_{3PQ}|_{\xi_I = -l_I/2} \quad (2.5)$$

Функции  $M$  удовлетворяют обычным уравнениям равновесия и условию отсутствия нагрузки на свободной границе, а по направлениям 1, 2 – модифицированным условиям периодичности (2.5).



Фиг. 1

Рассмотренная задача является обобщением задачи о чистом изгибе. В случае изгиба моментами, осредненный прогиб  $w$  является квадратичной функцией, поэтому решение (2.2) является точным. Это решение может использоваться для нахождения эффективных жесткостей на изгиб и кручение. Умножая соотношения (2.2) на  $x_3$  и интегрируя по ячейке периодичности, получим

$$M_{IJ} = D_{IJPQ} w_{,PQ} \quad (2.6)$$

$$M_{IJ} = \frac{1}{l_1 l_2} \int_{V_{\text{cell}}} x_3 \sigma_{ij} dV, \quad D_{IJPQ} = \frac{1}{l_1 l_2} \int_{V_{\text{cell}}} x_3 Q_{IJPQ} dV \quad (2.7)$$

Конкретные расчеты были проведены для гофрированной алюминиевой пластины, ячейка периодичности которой изображена на рис. 1. Для алюминия использовался коэффициент Пуассона  $\nu = 0.32$ . В результате были вычислены жесткости на растяжение и изгиб, представленные ниже

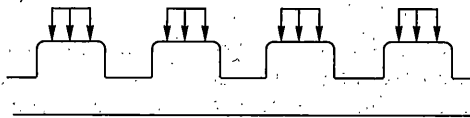
$$\frac{B_{1111}}{B_{Al}} = 0.27$$

$$\frac{B_{1122}}{B_{Al}} = 0.09$$

$$\frac{D_{1111}}{D_{Al}} = 1.54$$

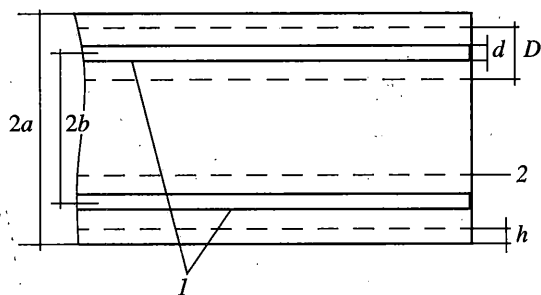
$$\frac{D_{1122}}{D_{Al}} = 0.79$$

Через  $B_{Al}$  и  $D_{Al}$  обозначены продольная и изгибная жесткости однородного алюминиевого листа. Для расчета была выбрана слабо гофрированная пластина, вследствие чего изгибная жесткость возросла только в полтора раза, тогда как продольный модуль уменьшился более, чем в три раза.



Фиг. 2

3. Описанная методика осреднения может также быть применена к гомогенизации протектора пневматической шины, схематически показанного на фиг. 2. Предполагается, что внешняя сила, воздействующая на шину, может быть представлена в виде  $p(\xi)S(x)$ . Чтобы найти напряженно-деформированное состояние протектора в первом приближении и тем самым определить его эффективные жесткости, следу-



Фиг. 3

ет в выражение для поля перемещений (1.1) добавить член  $\alpha R_{iq}(\xi)S_q$ . Прделав необходимые выкладки, получим задачу на ячейке для определения функций  $R_{ip}$  в виде

$$(C_{ijkl}R_{kq,l})_{,j} = 0 \quad (q = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

$$(C_{ijkl}R_{kq,l}) n_j = p(\xi)\delta_{iq}, \quad \xi \in \Sigma_p \quad (3.2)$$

По направлениям 1, 2 выполняются условия периодичности для функций  $R_{iq}$ . Уравнения равновесия относительно гладкой составляющей перемещения теперь приобретают вид

$$H_{IJPQ}v_{P,QJ} + \langle C_{IJKl}R_{kq,l} \rangle S_{q,J} + f_I = 0 \quad (3.3)$$

Чтобы найти эффективные свойства протектора в направлении 3, предположим, что все деформации в плоскости 1, 2 равны нулю, т.е.  $v_{P,Q} = 0$ . Тогда напряжения, деформации и их средние имеют вид

$$\epsilon_{ij} = 1/2(R_{iq,j} + R_{jq,i})S_q, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}R_{kq,l}S_q \quad (3.4)$$

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle = 1/2 \langle R_{iq,j} + R_{jq,i} \rangle S_q, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijkl}R_{kq,l} \rangle S_q \quad (3.5)$$

Например, средний модуль жесткости в третьем направлении  $H_{3333}$  может быть вычислен, если решить задачу на ячейке при  $q = 3$ :

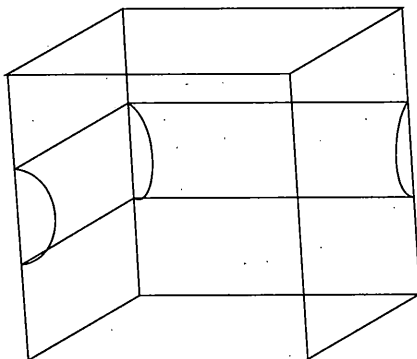
$$H_{3333} = \langle C_{33kl}R_{k3,l} \rangle / \Delta u_3, \quad \Delta u_3 = \langle R_{33,3} \rangle = R_{33}|_{\xi_3=l_3} - R_{33}|_{\xi_3=0} \quad (3.6)$$

Аналогично могут быть вычислены модули  $H_{1133}$  и  $H_{2233}$ :

$$H_{1133} = \langle C_{11kl}R_{k3,l} \rangle / \Delta u_3, \quad H_{2233} = \langle C_{22kl}R_{k3,l} \rangle / \Delta u_3 \quad (3.7)$$

4. Еще один объект, к которому может быть применен разработанный вариант методики осреднения – это железобетонные плиты и балки. Эти элементы конструкций также имеют структуру, периодическую не во всех направлениях. Интерес к таким объектам был вызван работами [8, 9, 10], в которых экспериментально изучалось явление так называемого мягкого удара (soft impact), т.е. удара по железобетонной плите деформируемым телом. Основные выводы экспериментального исследования состоят в том, что это явление может рассматриваться как квазистатический процесс и воздействие деформируемого тела может быть заменено действием силы.

Типичная структура железобетонной плиты показана на фиг. 3 (вид сбоку; 1 – слой железобетона, 2 – эффективный слой). Имеются два слоя арматуры толщиной  $d = 10$  мм. В направлениях 1, 2 эти слои имеют периодическую структуру. Одна четверть ячейки периодичности показана на фиг. 4.



Фиг. 4

Кажется привлекательной идея использовать метод осреднения для решения задачи мягкого удара. Действительно, методика, описанная выше, позволяет найти эффективные жесткости железобетонной плиты на растяжение и изгиб, и при моделировании использовать плиту с эффективными свойствами. Поскольку методика осреднения сводит задачу к задаче для однородного материала, то естественно использовать для численного моделирования изгиба “оболочечные” конечные элементы. Этот путь моделирования использует осреднение плиты целиком по толщине. Однако, возможен другой путь, состоящий в осреднении свойств слоя железобетона и использовании при моделировании многослойной (для данной конкретной структуры – пятислойной) плиты и трехмерных конечных элементов.

Именно такой путь использовался при численном моделировании – путь, состоящий в замене слоя железобетона некоторым эффективным слоем толщины  $D$ . Естественно встает вопрос, как выбрать  $D$ ? Для определения толщины  $D$  использовался следующий подход. Толщина  $D$  выбиралась так, чтобы изгибная жесткость модельной пятислойной плиты равнялась эффективной жесткости исходной плиты, вычисленной по методике, описанной в предыдущих секциях.

С помощью вычислительных тестов было выяснено, что зависимость изгибной жесткости пятислойной пластины от  $D$  достаточно слабая в определенном диапазоне значений  $D$ . В табл. 1 приведены продольные и изгибные жесткости пятислойной пластины, отнесенные к соответствующим эффективным жесткостям однородной осредненной плиты для двух значений  $D$ , достаточно сильно отличающихся друг от друга. Таблица показывает, что влияние толщины эффективного слоя не велико. Как следствие, значение толщины эффективного слоя слабо влияет на напряженно-деформационные характеристики всей пластины, что демонстрируют данные, приведенные ниже, где представлены значения

$D/d$	2	1.6
$w/w_{D/d=2.6}$	0.97	0.95

прогиба в центре квадратной пластины, отнесенные к прогибу при значении параметра  $D/d = 2.6$ . Как видно, разница в прогибах не превышает 5%. Влияние параметра  $D$  на упругие константы эффективного слоя, конечно сильнее, но не превышает 14%, как это следует из табл. 2.

Следующий вопрос, который требует решения – это вопрос о типе граничных условий на верхней и нижней поверхностях ячейки периодичности. Если  $D$  достаточно велико, то при изгибе на этих поверхностях поверхностные силы малы и можно ис-

Таблица 1

	$D = 14 \text{ mm}$	$D = 26 \text{ mm}$
$D_{1111}$	1.002	1.01
$D_{1122}$	0.993	1.008
$H_{1111}$	0.9996	1.0004
$H_{1122}$	0.993	1.0000

Таблица 2

$D/d$	2	1.6
$H_{1111}/H_{1111, D/d=2.6}$	1.07	1.14
$H_{1122}/H_{1122, D/d=2.6}$	1.05	1.10
$H_{1133}/H_{1133, D/d=2.6}$	1.04	1.10
$H_{1212}/H_{1212, D/d=2.6}$	1.03	1.07
$H_{1313}/H_{1313, D/d=2.6}$	1.04	1.08

пользовать условия свободной границы. С другой стороны,  $D$  должно быть мало, чтобы пятислойная пластина моделировала реальную железобетонную плиту. Методика осреднения для определения эффективных свойств тонкого слоя для уравнения типа Пуассона развивалась рядом авторов. Некоторые результаты приведены в [1]. В этих работах для исследования асимптотического поведения решения при  $\alpha \rightarrow 0$  предполагалось изменение свойств слоя по закону  $\alpha^\gamma$ . В результате получены различные условия скачка на границах слоя в зависимости от  $\gamma$ , но вопрос о значении  $\gamma$  остается открытым. Поэтому с помощью вычислительных экспериментов было выявлено, что влияние типа граничных условий на упругие свойства эффективного слоя совершенно незначительно. Ниже приводится зависимость модуля Юнга эффективного слоя от типа граничных условий: свободная поверхность –  $E_1^{\text{eff}} = 0.999$ ; контакт с бетоном –  $E_1^{\text{eff}} = 0.9996$ . Приведенные значения безразмерные и отнесены к значению модуля Юнга при условиях периодичности.

Кроме перечисленных тестов, также было выяснено, как влияет взаимное расположение стержней арматуры на свойства эффективного слоя. Для этого жесткостные характеристики эффективного слоя были вычислены для случаев, когда стержни располагаются так, как это показано на фиг. 4, когда они лежат друг на друге и, наконец, когда они располагаются с зазором в 2mm. Разница в эффективных модулях для всех этих случаев не превышала 0.5%.

Приведенные выше тесты убеждают, что модель многослойной пластины имеет право на существование. Поскольку в этой модели упругие свойства эффективного слоя определяются с помощью методики осреднения, то после определения осредненных полей напряжений и деформаций возможно найти эти в первом приближении флуктуации этих полей в компонентах. Это преимущество метода осреднения и является причиной, по которой применялся этот метод, ровно как и трехмерный подход.



Таблица 3

1	2	3	4	5
$E_c = 20000$	$H_{1111}$	24357.6	24380.8	24222.2
$E_s = 200000$	$H_{2222}$	22776.1	22822.5	22422.2
$R = 0.0564$	$H_{1122}$	5702.5	5699.7	5680.5
$(d = 0.1)$	$H_{1212}$	8605.8	8625.2	8333.3
	$H_{1313}$	8684.3	8710.4	8333.3
$E_c = 20000$	$H_{1111}$	30830.1	30897.8	30222.2
$E_s = 200000$	$H_{2222}$	24374.8	24514.2	23022.2
$R = 0.113$	$H_{1122}$	6111.7	6090.3	6055.5
$(d = 0.2)$	$H_{1212}$	9590.1	9677.5	8333.3
	$H_{1313}$	10168.7	10253.3	8333.3
$E_c = 20000$	$H_{1111}$	33033.8	33104.5	32222.2
$E_s = 1600000$	$H_{2222}$	25433.3	25604.7	23472.2
$R = 0.141$	$H_{1122}$	6372.6	6343.1	6336.8
$(d = 0.25)$	$H_{1212}$	10209.0	10338.5	8333.3
	$H_{1313}$	11126.1	11219.9	8333.3

Приведем сравнение вычисленных модулей эффективного слоя с модулями, вычисленными по приближенным аналитическим формулам, полученным на основе результатов работы [11]. Не вдаваясь в детали, приведем окончательные формулы для модулей упругости эффективного слоя, которые получены, исходя из результатов данной работы

$$\begin{aligned}
 H_{1111} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + \tilde{v}^2 \mu_1 \left( 2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \right), & H_{2222} &= H_{1111} \\
 H_{3333} &= \lambda_0 + 2\mu_0 + \tilde{d}^2 \mu_0 \left( 2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0} \right), & H_{1212} &= \mu_0 (1 + \tilde{d}) \\
 H_{1122} &= \lambda_0 + 4\tilde{d}^2 \mu_0 / (\lambda_0 + \mu_0), & H_{1313} &= H_{2323} = H_{1212}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Асимптотические оценки не могут дать точность формул (4.1) при конкретных значениях параметров. Поэтому было проведено исследование точности вышеприведенных формул на основе сравнения с вычисленными значениями эффективных модулей. Частично это сравнение приведено в табл. 3. В этой таблице используются следующие обозначения:  $E_c$  – модуль бетона,  $E_s$  – модуль стальной арматуры. Результаты приведены для различных значений радиуса арматуры  $R$ ; через  $d$  обозначена сторона арматуры квадратного сечения (в [11] асимптотический метод развит только для стержней квадратного сечения). Коэффициент Пуассона для стали равняется 0.3 и для бетона – 0.2.

В табл. 3 в первой колонке приведены упругие и геометрические параметры ячейки периодичности, во второй – названия компонент модулей упругости эффективно-

го слоя. В колонке 3 содержатся компоненты, вычисленные для круглого сечения арматуры, в колонке 4 – для квадратного. Различия между ними весьма незначительны. Наконец, в пятой колонке приводятся значения, вычисленные по формулам (4.1).

Как видно из таблицы, точность аналитических формул для сдвиговых модулей (около 10%)  $H_{1212}$  и  $H_{1313}$  ниже, чем для модулей на растяжение  $H_{1111}$  и  $H_{3333}$ , которая не более 2%. Однако влияние сдвиговых модулей при изгибе не существенно.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Интас (проект 96-2306) и РФФИ (проект 02-01-00240).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Победра Б. Е., Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
3. Панасенко Г. П., Резцов М. В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С.1061 – 1065.
4. Kohn R. V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids. Struct. 1984. V. 20. № 4. С. 333–350.
5. Лесничая В. А., Маневич Л. И., Андрианов И. В. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
6. Амиро И. В., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 367 с.
7. Горбачев В. И., Симаков В. А. Об одном подходе к решению задач для упругого неоднородного по толщине анизотропного слоя // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ. С. 426–427.
8. Tsubota H., Mizuno J., Kusama K., Brandes K., Herter J., Limberger E., Yamashita T., Fujita T., Sagimoto Y. Experimental studies on inelastic behavior of reinforced concrete panels under high-speed loading. P. 1. Effects of dynamic loading. P. 1. Effects of dynamic loading // Structures under shock and impact. Thessaloniki: Greece, 1998. P. 743–759.
9. Brandes K. Strain rate effects appearing in the mechanical behaviour of reinforced concrete structures under impact load // Mech. Inelastic Med. and Struct.: Proc. Intern. Symp. Warszawa/Poznan, 1982. P. 73–85.
10. Brandes K. Blast – resistant structures // Intern. Workshop on Blast – Resistant Structures. Beijing: Tsinghua Univ. 1992.
11. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Эффективные модули композитов, армированных системами пластин и стержней // Ж. вычисл. математики и матем. физики. 1998. № 38. № 5. С. 813–834.

Москва

Поступила в редакцию  
7.02.2002