

УДК 539.3

© 2004 г. Г.А. ВАНИН

## МОМЕНТНАЯ МЕХАНИКА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

На основе моментной или градиентной теории упругости сред со структурой [1–3] строится моментная механика тонких оболочек двойкой кривизны. Для определенности задача рассмотрена применительно к оболочкам, упрочненным ориентированными перпендикулярно срединной поверхности полыми цилиндрическими волокнами, образующими на пологой поверхности простую решетку, близкую к гексагональной. Отметим, что волокна с цилиндрической полостью характерны для нанокompозитов. Основные соотношения теории построены путем непосредственного обобщения уравнений теории однородных оболочек В.З. Власова. В асимптотическом приближении искомые соотношения удается получить в явном виде.

**1. Плоское моментное состояние.** *1.* Рассматривается тонкая оболочка, упрочненная на всей поверхности волокнами малого диаметра, так что отношение стрелы подъема срединной поверхности  $f$  к габаритному размеру отдельной ячейки  $l$  будет малой величиной  $fl < 0.2$ , а состояние не зависит от координаты  $x_1$  (фигура). В соответствии с предложенным алгоритмом [2], при плоском напряженном состоянии определяющим объем композита в локальной системе координат находится под действием компонентов тензора напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \sigma_{23}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \nabla_3 \sigma_2 \\ x \nabla_2 \sigma_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \nabla_2 \sigma_2 \\ y \nabla_3 \sigma_3 \\ -x \nabla_3 \sigma_3 - y \nabla_2 \sigma_2 \end{pmatrix} + \dots \quad (1.1)$$

Последующие члены в разложении (1.1) определяют уже компоненты мультимоментных состояний. Первый столбец соответствует однородному состоянию элемента, второй – моментному, а третий – градиентному состоянию растяжение – сдвиг. Для удобства решение задачи о напряжениях и деформациях ячейки представим в виде суммы трех составляющих. В первом случае определяются напряжения и эффективные модули упругости ячейки [4]. Средний модуль сдвига в плоскости ячейки

$$\begin{aligned} G_{23}/G &= \hat{G}/G = \\ &= \frac{(1-q^2)[(\kappa+\zeta)(1-\omega_0) - (1-\zeta)\omega_0 G/G_a] + (1-\zeta)(1+\kappa_a q^2)G/G_a}{(1+\zeta\kappa)(1+q^2\kappa_a)G/G_a + (1-q^2)[(1-\zeta)\kappa(1-\omega_0) - (1+\kappa\zeta)\omega_0 G/G_a]} + \dots \\ q^2 &= a_0/a, \quad \omega_0 = 3q^2(1-q^2)(1-G/G_a)[1+\kappa_a G/G_a - (1-G/G_a)q^2]^{-1} \end{aligned}$$

Здесь и везде в дальнейшем параметры волокон отмечаются индексом  $a$ , без индекса – к матрице или ко всем компонентам одновременно,  $a_0$  и  $a$  – внутренний и внеш-

ний радиусы полых волокон; отмечаются усредненные по ячейке значения  $G$ ,  $\zeta$  – объемное содержание волокон. Модули нормальной упругости будут

$$\frac{1}{\hat{E}} = \frac{1}{\hat{E}_2} = \frac{1}{\hat{E}_3} = \frac{v_{21}^2}{\hat{E}_1} + \frac{1}{4\hat{G}} + \frac{1}{8\hat{G}} \frac{2(1-\zeta)(1-q^2)(\kappa-1) + [\zeta(\kappa+1)(\kappa_a-1) + (1-\zeta)(\kappa-1)(\kappa_a-1+2q^2)]G/G_a}{(1-q^2)(2-\zeta+\kappa\zeta) + (1-\zeta)(\kappa_a-1+2q^2)G/G_a} + \dots$$

$$\hat{v}_{21} = (1-\zeta q^2)v - \zeta(1-q^2)(v-v_a) \frac{\kappa+1-q^2[2-\zeta+\kappa\zeta-2(1-\zeta)G/G_a]}{(1-q^2)(2-\zeta+\kappa\zeta) + (1-\zeta)(\kappa_a-1+2q^2)G/G_a} + \dots$$

$$\hat{v}_{23} = -1 + \hat{E}/2G + \dots$$

$$\hat{E}_1 = \zeta(1-q^2) \left( E_a + (1-\zeta)E + \frac{8G\zeta(1-\zeta)(1-q^2)(v_a-v)^2}{(1-q^2)(2-\zeta+\kappa\zeta) + (1-\zeta)(\kappa_a-1+2q^2)G/G_a} \right) + \dots$$

Модуль продольного сдвига равен

$$\hat{G}_{12}/G_{12}^0 = 1 + 180 \left( \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^6 \frac{G_{12}^0}{G} \left( \frac{1-G_0/G}{1-\zeta+(1+\zeta)G_a/G} \right)^2 \left[ \zeta^2 - \zeta^{12} \left( \frac{1-G_a/G}{1+G_a/G} \right)^2 \right] + \dots$$

$$G_2^0 = G[1-\zeta+(1+\zeta)G_a/G][1+\zeta+(1-\zeta)G_a/G]^{-1}$$

При этом определяются локальные компоненты напряженного состояния в отдельной ячейке.

2. Моментное внутреннее поле в ячейке составим из суммы первичной составляющей изгибного состояния, определенного компонентами второго столбца (1.1), и рассеянного поля, зависящего от условий взаимодействия волокно – матрица, механических характеристик и геометрии компонентов. Рассеянную составляющую представим суммой функций, убывающих от оси волокна. Поэтому комплексные потенциалы изгибного состояния в локальной системе координат с центром на оси волокна выберем в виде

$$\Phi_a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n, \quad \Psi_a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n, \quad \Phi(z) = \frac{z}{2} \omega' + \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^{-n}$$

$$Y(z) = \frac{z}{2} \bar{\omega}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n z^{-n}; \quad z = z + iy = x_2 + ix_3 \quad (1.2)$$

$$\omega' = \frac{1}{2} (\nabla_2 \sigma_3 - i \nabla_3 \sigma_2)$$

Коэффициенты разложения потенциалов устанавливаются из системы алгебраических уравнений, вытекающих из краевых условий совершенного контакта

$$|z| = a_0, \quad \sigma_n - i \sigma_{ns} = 0$$

$$|z| = a, \quad (\sigma_n - i \sigma_{ns})^+ = (\sigma_n - i \sigma_{ns})^-, \quad (u_2 + i u_3)^+ = (u_2 + i u_3)^-$$

Уточнение коэффициентов при учете взаимодействия между собой смежных ячеек приводит к громоздким преобразованиям [4]. Для приближенных расчетов, если сохранять только главные члены разложения, удастся найти коэффициенты в асимптотическом виде

$$\begin{aligned}
 A'_1 &= \frac{\kappa+1}{2} \omega' [1 + \kappa_a G/G_a - q^4 (1 - G/G_a)]^{-1} + \dots \\
 B'_3 &= a_0 \frac{4\kappa+1}{2} \bar{\omega}' [1 + \kappa_a G/G_a - q^4 (1 - G/G_a)]^{-1} + \dots \\
 A'_3 &= -4q^4 a^{-2} \omega' \alpha \beta + \dots, \quad B'_{-5} = 4q^6 \omega' \alpha (1 - \beta) + \dots, \quad A'_{-3} = a_0^4 \omega' \alpha + \dots \\
 C'_3 &= a^4 \omega' \delta + \dots, \quad B'_1 = \bar{\omega}' \alpha \left( 1 + q^6 \frac{8(1-q^2)(1-G/G_a)}{1 + \kappa_a G/G_a - q^8 (q - G/G_a)} \right) + \dots \\
 D'_3 &= a^4 \bar{\omega}' \gamma + \dots, \quad D'_5 = a^6 \omega' \Gamma + \dots
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

В первом приближении остальные коэффициенты можно опустить

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{2Q} \frac{\kappa+1}{\kappa + G/G_a}, \quad \delta = -\frac{1}{2\kappa + G/G_a} \frac{1 - G/G_a}{2Q} + \frac{q^4 (\kappa+1)(\kappa_a+1)G/G_a}{(\kappa + G/G_a)^2} \\
 \beta &= \frac{(1-q^2)(1-G/G_a)}{1 + \kappa_a G/G_a - q^8 (1 - G/G_a)}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \frac{\kappa(1-q^4) - (\kappa_a + q^4)G/G_a}{1 - q^4 + (\kappa_a + q^4)G/G_a} \\
 Q &= 1 - q \frac{4\kappa - \kappa_a G/G_a}{\kappa + G/G_a} - 8q^4 \frac{(1-q^2)^2 (1 - G/G_a)}{1 + \kappa_a G/G_a - q^8 (1 - G/G_a)} \\
 \Gamma &= -2 \frac{1 - G/G_a}{\kappa + G/G_a} + 4q^4 \alpha \left[ \frac{\kappa_a + 1}{\kappa + G/G_a} G/G_a - (1 - \beta)(1 - q^2) \right]
 \end{aligned}$$

Для среды с гексагональной симметрией градиентные составляющие усредненных смещений будут

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_2 &= \frac{\hat{\kappa}'_{23}}{2} \left( \frac{\hat{\kappa} - 3}{\hat{\kappa} + 1} x^2 - y^2 \right) - \hat{\kappa}'_{32} xy \\
 u_3 &= \frac{\hat{\kappa}'_{32}}{2} \left( x^2 - \frac{\hat{\kappa} - 3}{\hat{\kappa} + 1} y^2 \right) + \hat{\kappa}'_{23} xy, \quad \hat{\kappa} = 3 - 4\nu
 \end{aligned}$$

В рассматриваемом приближении полная упругая энергия ячейки состоит из произведений обобщенных напряжений и приведенных моментов и сопряженных им деформаций и кривизн

$$\hat{\sigma}_{ik} \hat{\varepsilon}_{ik} + \hat{m}'_{23} \hat{\kappa}'_{23} + \hat{m}'_{32} \hat{\kappa}'_{32} + \hat{m}''_{23} \hat{\kappa}''_{23} + \hat{m}''_{32} \hat{\kappa}''_{32} = \operatorname{Re} \frac{i}{2F} \oint_{L_F} (\sigma U - \Sigma \bar{U}) dz \tag{1.4}$$

$$\sigma = \sigma_2 + \sigma_3, \quad \Sigma = \sigma_3 - \sigma_2 + 2i\sigma_{23}, \quad U = u_2 + iu_3$$

Первые слагаемые определяют осредненную по площади ячейки классическую энергию,  $L_F$  – контур ячейки, последующие члены со знаком “штрих” – усредненную энергию изгибного состояния ячейки, остальные – энергию градиентного растяжения – сдвигов. Кривизны при изгибе ячейки связаны с поворотами равенствами

$$\kappa_{23} = \partial\Omega/\partial y, \quad \kappa_{32} = \partial\Omega/\partial x, \quad \Omega = 1/2(\partial u_3/\partial x - \partial u_2/\partial y) \quad (1.5)$$

На основе соотношений усреднения установлена связь моментных компонентов состояния с изгибными напряжениями

$$\begin{pmatrix} \hat{m}'_{23} \\ \hat{m}'_{32} \end{pmatrix} = \frac{I_2}{\hat{\kappa} + 1} \begin{pmatrix} \nabla_2 \sigma_3 \\ -\nabla_3 \sigma_2 \end{pmatrix} L, \quad I_2 = \frac{1}{F} \int x^2 dF \quad (1.6)$$

$$L = \hat{\kappa} + 1 + \zeta^2 \left( \frac{1 - G/G_a}{\kappa + G/G_a} - 2q^4 \alpha \frac{\kappa_\alpha + 1}{\kappa + G/G_a} G/G_a - 2\hat{\kappa}\gamma \right)$$

Накопленная изгибная энергия найдена на основе комплексных потенциалов

$$\begin{aligned} \hat{m}'_{23}\hat{\kappa}'_{23} + \hat{m}'_{32}\hat{\kappa}'_{32} &= I_2 \frac{p+q}{8G} [(\nabla_2 \sigma_3)^2 + (\nabla_3 \sigma_2)^2] \\ p &= \hat{\kappa} - 2\zeta^2(\hat{\kappa} - 1)\gamma - 4\zeta^4\gamma^2 + \dots \\ g &= 1 + 2\zeta^2(\kappa^4 - 1)\delta - 4\zeta^4[(\hat{\kappa} + 8)\delta^2 + 1/2\zeta^2\Gamma^2 - 4\zeta\delta\Gamma] + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для отдельной компоненты изгибного состояния имеем

$$\hat{m}'_{23}\hat{\kappa}'_{23} = I_2 \frac{p+g}{8G} (\nabla_2 \sigma_3)^2$$

Если учесть представление (1.6), то найдем связь кривизны с соответствующими компонентами напряжений

$$\hat{\kappa}'_{23} = \frac{\hat{\kappa} + 1}{8GL} (\bar{p} + g) \nabla_2 \sigma_3, \quad \hat{\kappa}'_{32} = -\frac{\hat{\kappa} + 1}{8GL} (p + g) \nabla_3 \sigma_2 \quad (1.8)$$

Откуда следуют определяющие соотношения изгибного состояния и формула для фундаментальной постоянной  $R'_0$ :

$$\begin{aligned} \hat{m}'_{23} &= \frac{8GI_2}{p+g} \left( \frac{L}{\hat{\kappa} + 1} \right)^2 \hat{\kappa}'_{23} = 2R'_0 \hat{\kappa}'_{23} \\ \hat{m}'_{32} &= \frac{8GI_2}{p+g} \left( \frac{L}{\hat{\kappa} + 1} \right)^2 \hat{\kappa}'_{32} = 2R'_0 \hat{\kappa}'_{32}, \quad R'_0 = \frac{4GI_2}{p+g} \left( \frac{L}{\hat{\kappa} + 1} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Условия совместности деформаций для однородного состояния известны [5]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x \partial y}$$

Для первого изгибного состояния они будут

$$\partial \kappa_{23} / \partial y = \partial \kappa_{32} / \partial x$$

и для каждого последующего градиентного состояния строятся отдельно.

3. Исследование градиентного растяжения – сдвига проводится аналогично изгибному состоянию, поэтому приводим только конечные результаты решения. Составляющие приведенных смещений будут

$$u_2 = \frac{\hat{\kappa}''_{23}}{2} \left( x^2 - \frac{\hat{\kappa} + 5}{\hat{\kappa} + 1} y^2 \right) - \frac{\hat{\kappa} - 3}{\hat{\kappa} + 1} \hat{\kappa}''_{32} xy$$

$$u_3 = \frac{\hat{\kappa} - 3}{\hat{\kappa} + 1} \hat{\kappa}''_{23} + \frac{\hat{\kappa}''_{32}}{2} \left( \frac{\hat{\kappa} + 5}{\hat{\kappa} + 1} x^2 - y^2 \right)$$

Связь градиентных компонентов состояния растяжение – сдвиг с приведенными моментами будет

$$\begin{pmatrix} \hat{m}''_{23} \\ \hat{m}''_{32} \end{pmatrix} = \frac{I_2}{\hat{\kappa} + 1} \begin{pmatrix} \nabla_2 \sigma_2 \\ -\nabla_3 \sigma_3 \end{pmatrix} L_0, \quad L_0 = \hat{\kappa} + 9 + 3\zeta^2(\hat{\kappa} - 1)\delta - \zeta^2(\hat{\kappa} - \zeta)\gamma + \dots \quad (1.10)$$

Уравнения связи кривизн с градиентами напряжений при растяжении – сдвиге установлены аналогично (1.8):

$$\hat{\kappa}''_{23} = \frac{\hat{\kappa} + 1}{8GL_0} (p + 9g) \nabla_2 \sigma_2, \quad \hat{\kappa}''_{32} = -\frac{\hat{\kappa} + 1}{8GL_0} (p + 9g) \nabla_3 \sigma_3 \quad (1.11)$$

С помощью зависимостей (1.10) и (1.11) нетрудно найти уравнение градиентного состояния растяжение – сдвиг

$$\begin{pmatrix} \hat{m}''_{23} \\ \hat{m}''_{32} \end{pmatrix} = 2R_0'' \begin{pmatrix} \hat{\kappa}''_{23} \\ \hat{\kappa}''_{32} \end{pmatrix}, \quad R_0'' = \frac{4GI_2}{p + 9g} \left( \frac{L_0}{\hat{\kappa} + 1} \right)^2$$

Как видно, определяющие соотношения для двух градиентных состояний связаны с деформациями одного вида, поэтому величины соответствующих моментов будут пропорциональны жесткости ячеек. Определяющие соотношения в общем случае будут

$$\begin{pmatrix} \hat{m}_{23} \\ \hat{m}_{32} \end{pmatrix} = 2R_0 \begin{pmatrix} \hat{\kappa}_{23} \\ \hat{\kappa}_{32} \end{pmatrix}, \quad R_0 = \frac{4GI_2}{(p + g)L_0^2 + (p + 9g)L^2} \left( \frac{LL_0}{\hat{\kappa} + 1} \right)^2$$

$$m_{ik} = \frac{m'_{ik} + \lambda m''_{ik}}{1 + \lambda}, \quad \kappa_{ik} = \kappa'_{ik} + \kappa''_{ik} = \kappa'_{ik}(1 + \lambda) \quad (1.12)$$

$$\lambda = \frac{p + 9g}{p + g} \left( \frac{L}{L_0} \right)^2$$

Задача об определении фундаментальных постоянных вида  $R_0$  в моментных теориях упругости рассматривалась в многочисленных работах [6–9]. Отсутствие алгоритма их определения явилось серьезным тормозом в развитии механики и физики твердых тел со структурой. Впервые эти трудности были преодолены в [1–3, 11].

4. Уравнения равновесия плоского состояния среды при учете моментных напряжений и соответствующие естественные краевые условия найдены путем варьирования функционала

$$\delta W = \int_F (\hat{\sigma}_{ik} \hat{\varepsilon}_{ik} - x \delta u_2 - y \delta u_3 + \hat{m}_{ik} \delta \hat{\kappa}_{ik}) df \quad (1.13)$$

Откуда следует система уравнений равновесия

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{23}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{m}_{23}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{m}_{32}}{\partial y \partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_3}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m_{23}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 m_{32}}{\partial x^2} + Y = 0$$

Учитывая определяющие соотношения (1.12), упростим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_2}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{23}}{\partial y} + R_0 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Omega + X &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_3}{\partial y} - R_0 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Omega + Y &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Образуя комбинацию симметричных напряжений и напряжений, вызванных поворотами, определим компоненты несимметричного тензора напряжений  $\tau_{ik} \neq \tau_{ki}$ :

$$\begin{pmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{32} \end{pmatrix} = \sigma_{23} \pm 2R_0 \nabla^2 \Omega, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

Как видно, перестановка индексов в  $\tau_{ik}$  приводит к взаимным преобразованиям компонентов напряжений вследствие того, что  $\Omega$  – антисимметричный тензор второго ранга. В теориях типа Коссера авторы в качестве аксиомы вводят несимметричные тензоры напряжений. Приведенные соотношения указывают, что подобное обобщение не приводит в рассмотренных задачах к качественно новым результатам и поэтому нецелесообразно. Для случая, когда существует потенциал объемных сил, система уравнений равновесия удовлетворяется двумя разрешающими функциями

$$\sigma_2 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2R_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + V$$

$$\sigma_3 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2R_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + V$$

$$\sigma_{23} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + R_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - R_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$$

Рассматриваемая структура среды обладает гексагональной симметрией, поэтому для однородных компонентов состояния закон упругости будет

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{\hat{E}} - \hat{\nu} \frac{\sigma_3}{\hat{E}}, \quad \varepsilon_3 = -\hat{\nu} \frac{\sigma_2}{\hat{E}} + \frac{\sigma_3}{\hat{E}}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\hat{G}}$$

Уравнения для определения разрешающих функций плоского состояния найдем путем преобразований дифференциальных зависимостей

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial y} &= -\frac{1}{\hat{E}} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi + \frac{R_0}{2\hat{G}} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Omega + \frac{1-\nu \partial V}{\hat{E}} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y} &= \frac{1}{\hat{E}} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Phi + \frac{R_0}{2\hat{G}} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Omega - \frac{1-\hat{\nu} \partial V}{\hat{E}} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Откуда находим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \Phi + (1 - \hat{\nu}) \nabla^2 V &= 0 \\ (1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 \Omega &= 0, \quad l^2 = R_0 / 2\hat{G} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Естественные краевые условия находим в результате преобразования контурных интегралов при варьировании функционала (1.13). В результате приходим к интегралу

$$\begin{aligned} \oint ds (Q_n \delta u_n + Q_s \delta u_s + m_n \delta \Omega) \\ Q_n = \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta + \sigma_{23} \sin 2\theta \\ Q_s = -\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta + \sigma_{23} \cos 2\theta - R_0 \nabla^2 \Omega \\ m_n = 2R_0 \partial \Omega / \partial n \end{aligned} \quad (1.17)$$

Из соотношений (1.17) следует, что кроме краевых условий на  $Q_n$  и  $Q_s$  и смещения  $d\bar{U}/ds$  дополнительно вводятся условия на моменты  $m_n$ , вызванные поворотами и сами повороты  $\Omega$ . Поэтому краевые условия совершенного контакта тел будут составлены из всех указанных величин

$$\begin{aligned} (Q_n - iQ_s)^+ = (Q_n - Q_s)^-, \quad (d\bar{U}/ds)^+ = (d\bar{U}/ds)^- \\ m_n^+ = m_n^-, \quad \Omega^+ = \Omega^- \end{aligned} \quad (1.18)$$

Знаками (+) и (-) отмечены предельные значения  $Q$  при приближении к границе слева (справа).

При исследовании структур сред с различными включениями, особенно, когда эффективны конформные преобразования, более простые решения получаются при использовании функций комплексной переменной. На основе (1.14) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} = (\lambda_0 + \hat{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \hat{G} \nabla^2 u_2 \\ \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial y} = (\lambda_0 + \hat{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \hat{G} \nabla^2 u_3, \quad \lambda_0 = \frac{2\hat{\nu}\hat{G}}{1-\hat{\nu}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Откуда вытекает

$$\begin{aligned} (\lambda_0 + \hat{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \hat{G} \nabla^2 u_2 + R_0 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Omega + X = 0 \\ (\lambda_0 + \hat{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \hat{G} \nabla^2 u_3 - R_0 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Omega + Y = 0 \end{aligned}$$

Комплексное преобразование этой системы дает

$$2\hat{G} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + (\lambda_0 + \hat{G}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{z}} - iR_0 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \nabla^2 \Omega - \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = 0$$

Интегрированием по  $\bar{z}$  найдем

$$2G \frac{\partial U}{\partial z} + (\lambda_0 + \hat{G}) \varepsilon - iR_0 \nabla^2 \Omega - V = f(z)$$

Разделяя вещественные части от мнимых, получим

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}[f(z) - f(\bar{z})] &= -R_0 \nabla^2 \Omega + 2\hat{G}\Omega \\ \frac{1}{2}[f(z) + f(\bar{z})] &= \frac{1}{1+\hat{\nu}}\sigma - V \end{aligned} \quad (1.20)$$

Если ввести новую функцию

$$\frac{1}{1+\hat{\nu}}\varphi'(z) = f(z)$$

то получим

$$\sigma = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + (1+\hat{\nu})V$$

Преобразованием мнимой части (1.20), найдем

$$\begin{aligned} R_0 \nabla^2 \Omega - 2\hat{G}\Omega &= \frac{2i}{1+\hat{\nu}}[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}], \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_H \\ R_0 \nabla^2 \Omega_0 - 2\hat{G}\Omega_0 &= 0, \quad \Omega_H = -\frac{2i}{\hat{E}}[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Преобразуя (1.19) и интегрируя по  $z$ , будем иметь

$$\begin{aligned} 2\hat{G}\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} &= f(z) + V - \frac{1}{2}\sigma + iR_0 \nabla^2 \Omega = \frac{3-\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}}\varphi'(z) - \psi'(z) + \frac{1-\hat{\nu}}{2}V + iR_0 \nabla^2 \Omega \\ 2\hat{G}U &= \frac{3-\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}}\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z) + \frac{1-\hat{\nu}}{2}\int V dz + 4iR_0 \frac{d\Omega}{dz} \end{aligned}$$

Вносим представление  $\Omega$  в основные соотношения

$$\begin{aligned} \sigma &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + (1+\nu)V \\ \Sigma &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] - \frac{1-\nu}{2}\int \frac{\partial V}{\partial z} dz + 8iR_0 \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial z^2} + \frac{16l^2}{1+\nu}\varphi'''(z) \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$2\hat{G}U = \frac{3-\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}}\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{1-\hat{\nu}}{2}\int V dz + 4iR_0 \frac{\partial \Omega_0}{\partial z} - \frac{8l^2}{1+\hat{\nu}}\overline{\varphi''(z)}$$

$$m_{32} + im_{23} = 4R_0 \frac{\partial \Omega_0}{\partial z} - \frac{8il^2}{1+\nu}\varphi''(z) \quad (1.23)$$

$$m_n = m_{32} \cos \theta + m_{23} \sin \theta = 2R_0 \frac{\partial \Omega_0}{\partial n} - \frac{4l^2}{1+\hat{\nu}} \frac{d}{ds} [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]$$

Приведенная система уравнений дополняет известные соотношения Колосова [10]. Эффективный метод решения плоских задач с учетом моментных состояний, основанный на сочетании метода разложения искомого функций по малому параметру и преобразовании конечно-разностных систем предложен в [11]. Функция  $\varphi(z)$  составлена из двух составляющих, одна из которых соответствует изгибному состоянию,



а другая – градиентному растяжению – сдвигу. В асимптотическом приближении, где локальная переменная в ячейке,

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2}(\omega' + \omega'') + \frac{a^4}{z^3}\delta(\omega' - 3\omega'') + \dots, \quad (1.24)$$

$$\omega'' = \frac{1}{2}(\nabla_2\sigma_2 - i\nabla_3\sigma_3)$$

**2. Моментная механика оболочек.** 1. Моментная механика тонких оболочек строится на основе соотношений и упрощений, принятых в классической теории пологих оболочек с учетом изменений в их состоянии, обусловленных влиянием деформаций поворотов в их структуре. Здесь рассматриваются оболочки со структурой, плоское состояние которой определено выше.

Точки на срединной поверхности оболочки отнесем к системе криволинейных координат  $\alpha, \beta$ , образованных линиями главных кривизн  $R_1$  и  $R_2$ . Поэтому первая квадратичная форма будет

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$$

В соответствии с теорией пологих оболочек деформации сдвига и растяжения срединной поверхности определяются через нормальные  $w$  и тангенциальные  $u_2, u_3$  смещения приближенными формулами

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \beta} u_3 + \frac{w}{R_1}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{B} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_2 + \frac{w}{R_2}, \quad \gamma_{23} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_2}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_3}{B} \right)$$

Приближенные соотношения для определения изменения кривизн и кручения срединной поверхности [13] равны

$$\kappa_2 = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial w \partial A}{\partial \beta \partial \beta}$$

$$\kappa_3 = -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial w \partial B}{\partial \alpha \partial \alpha}$$

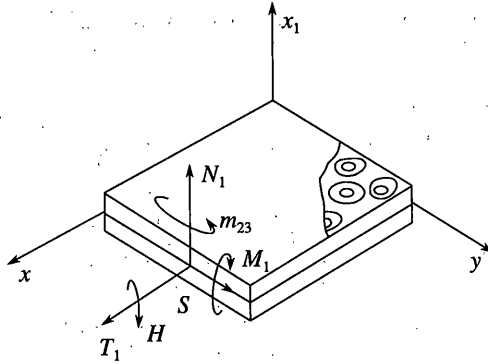
$$\tau = -\frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A \partial w}{\partial \beta \partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B \partial w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)$$

Вводим напряжения, усредненные по толщине оболочки  $h$ :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} dx_1$$

Соотношения между усилиями, моментами и деформациями срединной поверхности преобразуются к виду [13]:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\hat{G}h}{1-\hat{\nu}}(\varepsilon_2 + \hat{\nu}\varepsilon_3), & T_2 &= \frac{2\hat{G}h}{1-\hat{\nu}}(\varepsilon_3 + \hat{\nu}\varepsilon_2), & S &= \hat{G}h\gamma_{23} \\ M_1 &= \frac{\hat{G}h^3}{G(1-\hat{\nu})}(\kappa_2 + \hat{\nu}\kappa_3), & M_2 &= \frac{\hat{G}h^3}{G(1-\hat{\nu})}(\kappa_3 + \hat{\nu}\kappa_2), & H &= \hat{G}h^3\tau \end{aligned} \quad (2.1)$$



Перерезывающие силы, найденные с учетом пренебрежения тангенциальными смещениями в соотношениях для кривизн и кручения, будут

$$N_1 = \frac{\hat{G}h^3}{G(1-\hat{\nu})A} \frac{1}{\partial\alpha} \nabla^2 w, \quad N_2 = -\frac{\hat{G}h^3}{G(1-\hat{\nu})B} \frac{1}{\partial\beta} \nabla^2 w$$

Отметим, что при учете влияния поворотов возникают дополнительные моментные состояния в касательной плоскости к срединной поверхности (фигура). Упрощенные уравнения равновесия элемента оболочки с учетом нагрузки от поворотов элементов среды примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial B T_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial A S}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} S - \frac{\partial B}{\partial\alpha} T_2 \right) + R_0 h \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \nabla^2 \Omega &= -p_1 \\ \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A S}{\partial\alpha} + \frac{\partial A T_2}{\partial\beta} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} S - \frac{\partial A}{\partial\beta} T_1 \right) - R_0 h \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \nabla^2 \Omega &= -p_2 \\ \frac{\hat{G}h^3}{G(1-\hat{\nu})} \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} &= p_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. Решение системы уравнений ищем в виде суммы функций, учитывающих как классические, так и напряжения от поворотов элементов структуры стенки оболочки

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \frac{1}{\partial\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} - 2 \frac{R_0 h}{AB} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\alpha \partial\beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial\beta} \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \frac{\partial\Omega}{\partial\beta} \right) \\ T_2 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} \frac{1}{\partial\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + 2 \frac{R_0 h}{AB} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial\alpha \partial\beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial\beta} \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \frac{\partial\Omega}{\partial\beta} \right) \\ S &= \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\alpha \partial\beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} \right) + R_0 h \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} \frac{1}{\partial\alpha} \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} \frac{1}{\partial\beta} \frac{\partial\Omega}{\partial\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial\Omega}{\partial\beta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подстановка этих выражений в первые два уравнения системы (2.2) приводит к неоднородным уравнениям

$$\frac{1}{AB} \left( \frac{\partial AT_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial AS}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S - \frac{\partial A}{\partial \alpha} T_2 \right) + \frac{R_0 h \partial \nabla^2 \Omega}{B \partial \beta} = \frac{1}{R_1 R_2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + 2 \frac{R_0 h \partial \Omega}{B \partial \beta} \right)$$

$$\frac{1}{AB} \left( \frac{\partial BS}{\partial \alpha} + \frac{\partial AT_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 \right) - \frac{R_0 h \partial \nabla^2 \Omega}{A \partial \alpha} = \frac{1}{R_1 R_2} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - 2 \frac{R_0 h \partial \Omega}{A \partial \alpha} \right)$$

Для преобразования последнего уравнения системы (2.2) воспользуемся соотношениями Коддаци – Гаусса, в результате получим

$$T_1/R_1 + T_2/R_2 = -D\Phi - 2R_0 h D_0 \Omega$$

$$D = \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{R_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \right)$$

$$D_0 = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{R_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right)$$

Последнее уравнение системы (2.2) преобразуется к виду

$$\frac{\hat{G}h^3}{G(1-\hat{\nu})} \nabla^2 \nabla^2 w - D\Phi - 2R_0 h D_0 \Omega = q_n \quad (2.4)$$

Следующее уравнение для нахождения введенных функций получим на основе уравнения совместности деформаций, предложенного А.Л. Гольденвейзером [12]:

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_2}{R_2} + \frac{\kappa_3}{R_1} + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left[ B \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) - \frac{1}{2} A \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma_{23} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left[ A \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - \frac{1}{2} B \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_{23} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя выражения компонентов деформаций через усилия, уравнение совместности с учетом соотношения Коддаци – Гаусса приводим к виду

$$\begin{aligned} & \hat{E}hDw + \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{1+\hat{\nu}}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{R_1 R_2} \frac{B \partial \Phi}{A \partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{R_1 R_2} \frac{A \partial \Phi}{B \partial \beta} \right) \right] + \\ & + 2R_0 h \frac{1+\hat{\nu}}{A^2 B^0} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \frac{AB}{R_1 R_2} \right] \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} - \left[ \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \frac{AB}{R_1 R_2} \right] \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Как видно, состояние полой оболочки определено тремя функциями  $w$ ,  $\Phi$ ,  $\Omega$ .

3. В случае пологих или оболочек нулевой гауссовой кривизны ( $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ ) разрешающие функции удовлетворяют однородным уравнениям. В принятом приближении полная система уравнений теории пологих оболочек имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{E}hc^2\nabla^2\nabla^2w - D\Phi - 2R_0hD_0\Omega &= q_n \\ \nabla^2\nabla^2\Phi + \hat{E}hDw &= 0 \\ \nabla^2\Omega - l^2\nabla^2\nabla^2\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Данная система построена в приближении, что изгибающие и крутящие моменты в оболочке в явном виде не влияют на функцию поворотов  $\Omega$ , поэтому представляется возможным общее состояние разделить на классическое и дополнительное, вызванное влиянием поворотов. В соответствии с этим функцию напряжений представим в виде суммы

$$\Phi = \Phi_0 + 2R_0\Phi_1$$

где функция  $\Phi_1$  определяет плоское состояние при учете поворотов, поэтому

$$\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\Phi_1 &= 0 \\ \nabla^2\nabla^2\psi - \frac{i}{c}D\psi &= \frac{i}{c}q_n + 2R_0\frac{i}{c}(D\Phi_1 + hD_0\Omega) \end{aligned}$$

$$\psi = \Phi_0 + i\hat{E}hcw, \quad c = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$$

В соответствии с принятыми приближениями компоненты напряженного состояния будем искать в виде

$$T_k = T_k' + R_0T_k'', \quad S = S' + R_0S'', \quad M_k = M_k' + R_0M_k''$$

$$H = H' + R_0H'', \quad N_k = N_k' + R_0N_k''$$

Знак “штрих” отмечает составляющие классического состояния, два штриха – поправки на влияние поворотов в структуре. Краевые условия составляем с учетом соотношений, полученных в случае плоского состояния (1.19), а также краевых уравнений, установленных в классической теории оболочек. Например, условия совершенного контакта оболочек будут

$$m_n^+ = m_n^-, \quad \Omega^+ = \Omega^-, \quad (d\bar{U}/ds)^+ = (d\bar{U}/ds)^-, \quad T_1^+ = T_1^-$$

$$S^+ = S^-, \quad M_1^+ = M_1^-, \quad \left(N_1 + \frac{\partial H}{\partial s}\right)^+ = \left(N_1 + \frac{\partial H}{\partial s}\right)^-$$

Условия свободного края оболочки

$$m_n = 0, \quad T_1 = 0, \quad s = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 + \partial H/\partial s = 0$$

Из уравнения (2.9) следует, что функции напряженного состояния зависят от макроскопических параметров  $h, R, \hat{E}$ . Изменение функции поворотов  $\Omega$ , как это следует из последнего уравнения (2.7), определяется как микроскопическими, так и макроскопическими характеристиками среды согласно (1.12) и (1.16). В классической теории оболочек пренебрегают влиянием моментных состояний от поворотов элементов структуры, поэтому их роль в напряженном состоянии оболочек остается неизученной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ванин Г.А.* Градиентная теория сдвига многоуровневых композитов // Изв. АН МТТ. 1985. № 1. С. 120–128.
2. *Ванин Г.А.* Градиентная теория плоского деформированного состояния многоуровневых сред // Изв. АН МТТ. 1996. № 3. С. 5–15.
3. *Ванин Г.А.* Градиентная теория упругости // Изв. АН МТТ. 1999. № 1. С. 46–53.
4. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
5. *Савин Г.Н.* Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев: Изд. Киев. ун-та, 1965. 162 с.
6. *Аэро Э.Л., Кувишинский Е.В.* Основные уравнения теории сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 11. Вып. 7. С. 1399–1409.
7. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117–1120.
8. *Миндлин Р.Д.* Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика. Период сб. переводных иностр. статей. 1964. № 4. С. 115–128.
9. *Эринген А.К.* Теория микрополярной упругости // Разрушение. М.: Мир. 1975. Т. 2. С. 646–751.
10. *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной к теории упругости. М.; Л.: Главн. ред. общетехнических дисциплин, 1935. 224 с.
11. *Ванин Г.А.* Градиентное межфазное взаимодействие неоднородной пластинки с включением // Изв. АН МТТ. 1998. № 2. С. 146–151.
12. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
13. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

Москва

Поступила в редакцию  
4.05.2003