МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. А.Г. БАГДОЕВ, А.В. ШЕКОЯН

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЕ С ПОЛОСТЯМИ

Изучено распространение квазипродольной нелинейной волны в слое среды Био, где также есть полости, которые колеблются под воздействием волны. Выведены трехмерные эволюционные уравнения при учете геометрической, упругой, жидкостной, полостной нелинейности, а также нелинейности, связанной со взаимодействием компонент. Найдены солитонные решения и условия их устойчивости. Получены нелинейные модуляционные уравнения с учетом нелинейной диссипации и найдено их решение в рамках узких пучков.

1. Введение. Распространение волн в пористой водонасыщенной среде в линейной и одномерной нелинейной постановке изучалось во многих работах [1–11]. В этих работах в качестве модели среды выбирается твердый упругий каркас с многочисленными расположенными порами, связанными между собой и заполненными жидкостью. Волновой процесс в такой упругопористой насыщенной жидкостью среде описывается системой из двух векторных уравнений, первое из которых описывает движение твердого каркаса, а второе–жидкости. Показано, что в такой среде могут быть две продольные (быстрая и медленная) и одна поперечная волны. Во многих природных средах (туф, пемза и т.д.), а также в искусственных композитах в сочетании с вышеуказанной моделью, которую иногда называют также средой или моделью Био, встречаются многочисленные хаотически расположенные полости, наполненные жидкостью. Как показано в [12, 13] при определенных условиях полости под воздействием упругой волны колеблются и существенно влияют на законы распространения волны. В [12] отмечено, что существенно учитывать полостную нелинейность, а в [13] рассмотрены квазипродольные нелинейные волны в вязкоупругой среде с полостями в трехмерной постановке. В книге [14] дается общая теория нелинейных волн в двухкомпонентной среде. В средах с полостями волновые процессы описываются системой уравнений, в которую входят кроме уравнений, описывающих движение основной среды, также уравнение колебаний полости.

В статье [13] из исходной системы нелинейных уравнений выводится эволюционное, а потом нелинейное уравнение Шредингера или нелинейное модуляционное уравнение с комплексным нелинейным коэффициентом. Найдены аналитические решения в виде солитонов эволюционных уравнений и узких пучков для уравнений Шредингера.

Целью настоящей работы является изучение волновых процессов в среде Био с полостями, учитывая многие существенные нелинейные взаимодействия, а именно полостную нелинейность, нелинейное взаимодействие фаз, а также традиционные (упругая геометрическая, жидкостная) нелинейности.

2. Постановка задачи. Пусть имеется полубесконечная или в форме слоя среда Био, в которой существуют полости с жидкостью. Предполагается, что расстояние между полостями l_1 намного больше радиуса полостей r_2 ($l_1 \gg r_2$), но гораздо меньше распространяющейся в среде длины волны λ_1 ($l_1 \ll \lambda_1$). Вокруг полостей есть твердый материал каркаса.

Предполагается, что в указанной выше среде распространяется интенсивная, квазипродольная волна. Ось x_3 выбрана по нормали к невозмущенной волне, оси x_1, x_2 касательно к ней. Под воздействием такой волны полости начинают колебаться, что обусловлено продольным напряжением каркаса $\sigma'_{33} = (\lambda + 2\mu)/\partial u_3/\partial x_3 - z_1(\lambda + 2\mu)$, где $z_1 = N\upsilon$; N – количество полостей в единице объема, $\upsilon' = \upsilon_0 + \upsilon$; υ_0 – начальный объем полости; υ – объем полости возмущенной волной; λ, μ – коэффициенты Ламе окружающей полость среды, причем $\mu \ll \lambda$, что связано с наличием жидкости в среде Био.

Лагранжиан такой обобщенной среды Био можно написать в следующем виде:

$$L = K_1 - \Pi_1 + (K_2 - \Pi_2)N \tag{2.1}$$

где K_1 и Π_1 соответственно кинетическая и потенциальная энергия среды без полостей, аналогично K_2 и Π_2 – для полостей. Выражение для K_1 дано в [1], а для K_2 и Π_2 – в [12]. В выражении для Π_1 учитываются деформационная энергия, энергия взаимодействия между фазами и среды с полостями.

Варьируя соотношение (2.1), учитывая вязкость твердого каркаса по модели Фойхта и взаимное трение между двумя фазами, можно получить следующую систему уравнений:

$$\rho_{11}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2 \upsilon_3}{\partial t^2} + b_0\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial \upsilon_3}{\partial t}\right) = \mu\Delta_\perp u_3 + b_3\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2\partial t} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} +$$

$$+ (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + Q\frac{\partial^2 \upsilon_3}{\partial x_3^2} + \rho\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - N(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \upsilon}{\partial x_3} + \tag{2.2}$$

$$+ Q\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2}\right) + q\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 \upsilon_3}{\partial x_3^2} + \chi_0\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}\right)$$

$$\rho_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2 \upsilon_3}{\partial t^2} - b_0\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial \upsilon_3}{\partial t}\right) =$$

$$= Q\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + R\frac{\partial^2 \upsilon_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[Q\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + R\left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2}\right)\right] + \tag{2.3}$$

$$+ \chi_0\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + s\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 \upsilon_3}{\partial x_3^2} + q\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}\right)$$

$$\rho_{11}\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2 \upsilon_{1,2}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3\partial x_{1,2}} + Q\frac{\partial^2 \upsilon_3}{\partial x_3\partial x_{1,2}} + \mu\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x_3^2} \tag{2.4}$$

$$\rho_{12}\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2 \upsilon_{1,2}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_{1,2}}(Qu_3 + R\upsilon_3) \tag{2.5}$$

$$\ddot{v}+\omega_s^2 v - r_2 c_l^{-1}\dddot{v} - G_g v^2 - \beta_0(2v\ddot{v}+\dot{v}^2) = \\ = 4\pi r_2\rho_0\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-Nv\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}(Qv_3+Ru_3)\right] \quad (2.6)$$

где p_0 – начальное давление в жидкости внутри полости, ρ_0 – плотность твердой фазы, ρ_{11}, ρ_{22}, ρ_{12}, Q и R известные коэффициенты, характеризующие жидконасыщенную среду, их связи с плотностями компонент среды, пористостью и т.д., даны в [1, 3], p q, χ_0 и s нелинейные коэффициенты, – b_3 коэффициент вязкости твердой фазы, – b_0 коэффициент трения компонент, v_i и u_i – соответственно перемещения жидкой и твердой фазы

$$\omega_3^2 = (r_2^2\rho_0)^{-1}(3\gamma p_0+4\mu), \quad \beta_0 = (8\pi r_2^2)^{-1}$$

$$G_s = \beta_0[9\gamma p_0\rho_0^{-1}r_2^2(1+\gamma)+2(9+2b_4)\mu r_2^{-2}\rho_0^{-1}], \quad c_l = (\lambda+2\mu)\rho_0^{-1}$$

Здесь b_4 – константа, причем $0 < b_4 < 1/2$ [12]; γ – показатель адиабаты жидкости, $\Delta_\perp$ – лапласиан по координатам x_1 и x_2, c_l – нормальная скорость линейной волны в матрице.

В уравнениях (2.2), (2.3), (2.6) учитываются; нелинейные члены наивысшего порядка, а в (2.3) не учтена ньютоновская вязкость жидкости в силу ее малости. Так как изучаются квазипродольные волны, то в уравнениях (2.4), (2.5) оставлены только линейные члены.

Нелинейные коэффициенты q, χ_0 и s следует определять экспериментально, что можно сделать в одномерной постановке.

В случае слоя предполагается, что среда находится между плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = l$, где l – толщина слоя. В плоскости $x_3 = l$ задается внешнее возмущение, а плоскость $x_3 = 0$ свободна от напряжений.

3. Нелинейное трехмерное эволюционное уравнение. Для общности эволюционные уравнения будем писать для слоя, откуда полубесконечный случай получится заменой $l \mp x_3$ на x_3. Введем новые координаты

$$\tau_{1,2}^{(a),(b)} = (l \mp x_3)(c^{(a),(b)})^{-1} - t = \tau'^{(a),(b)}_{1,2} - t$$

В выражении для $\tau_{1,2}^{(a),(b)}$ индекс 1 соответствует волне, распространяющейся от плоскостей $x_3 = l$ до $x_3 = 0$, тогда перед x_3 знак должен быть минус, а нижний индекс два соответствует обратной волне и перед x_3 должен быть знак плюс. Верхние индексы (a) и (b) соответствуют быстрой и медленной продольной волне. Ниже будет доказано, что эволюционные уравнения для всех волн одинаковы по форме, поэтому в дальнейшем индексы будут опущены. Их будем отмечать при необходимости.

После перехода к τ в главных порядках, при пренебрежении нелинейными, диссипативными и диспергирующими членами и удержании лишь производных по переменной τ можно получить скорости продольных линейных волн. Они имеют вид

$$c^{(a),(b)} = \{\Lambda \pm [(\lambda+2\mu)R(\rho_{12}^2-\rho_{11}\rho_{22})(1-NFD^{-1})+\Lambda^2-Q^2]^{1/2}\}^{1/2}(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)^{1/2}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\rho_{22}(\lambda+2\mu)(1-NFD^{-1})+\frac{1}{2}\rho_{11}R-\rho_{12}Q$$

$$F = 4\pi r_2\rho^{-1}[(\lambda+2\mu)+Q\kappa+R], \quad D = \omega_3^2-(\lambda+2\mu)4\pi r_0\rho^{-1}$$

где $c^{(a)}$ – скорость быстрой линейной продольной волны (перед корнем стоит знак плюс), а $c^{(b)}$ – скорость медленной волны. Если в формуле для этих скоростей положить $F = 0$, т.е. считать среду без полостей, то они совпадут с известными скоростями Био [1, 3]. Для краткости обозначим $c^{(a),(b)} \equiv c$. Главные члены по порядку дают связь между величинами

$$\upsilon_3 = \kappa u_3, \quad \kappa = (Q - \rho_{12}C^2)(\rho_{22}c^2 - R)^{-1}$$

Представим решение системы уравнений (2.2)–(2.6) в виде

$$u_3 = u_1^{(a)}(\tau_{31}^{(a)}, x_1, x_2, t) + u_{32}^{(a)}(\tau_2^{(a)}, x_1, x_2, t) + u_{31}^{(b)}(\tau_1^{(b)}, x_1, x_2, t) + u_{32}^{(b)}(\tau_2^{(b)}, x_1, x_2, \tau)$$

где $u_{31}^{(a),(b)}$ – соответствует волне, распространяющейся слева направо, а $u_{32}^{(a),(b)}$ наоборот.

Используя соотношения (3.1), последовательно исключая функции в системе уравнений (2.1)–(2.6), для величин $\psi_1^{(a),(b)} = \partial u_3^{(a),(b)}/\partial\tau_1^{(a),(b)}$, $\psi_2^{(a),(b)} = \partial u_3^{(a),(b)}/\partial\tau_2^{(a),(b)}$ можно получить идентичное эволюционное уравнение в следующем виде [13, 15]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial x_3} + L\Delta_\perp\psi = \alpha_1\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right) + \delta_1\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3} + \beta_1\frac{\partial^4\psi}{\partial\tau^4} + \gamma_1\frac{\partial^5\psi}{\partial\tau^5} + b_1\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \tag{3.1}$$

В [13, 15] доказано, что уравнения для ψ_1 и ψ_2 разделяются. Уравнения для быстрых и медленных волн также разделяются, поскольку нелинейные члены соответствующие слагаемым $\psi^{(a)}$ и $\psi^{(b)}$ в основном порядке должны содержать производные по $\tau^{(a)}$ $\tau^{(b)}$ соответственно, т.е. $\partial\psi^{(a)}/\partial\tau^{(a)} \approx 1$, $\partial\psi^{(b)}/\partial\tau^{(b)} \approx 1$, в то время, как $\partial\psi^{(a)}/\partial\tau^{(b)}$ и $\partial\psi^{(b)}/\partial\tau^{(a)}$ малы.

В уравнении (3.1) коэффициенты имеют следующий вид:

$$L = d^{-1}\{(\rho_{12} - Qc^{-2})[(\chi_1 - \varphi_1\kappa)Q + (\chi_2 + \varphi_2\kappa)R] -$$

$$-(\rho_{22} - Rc^{-2})[Q(\chi_2 - \varphi_2\kappa) - c\mu + (\lambda + \mu)(\chi_1 + \varphi_1\kappa)]\}$$

$$\chi_1 = (cd_1)^{-1}[(\lambda + \mu)\rho_{22} - Q\rho_{22}], \quad \varphi_1 = (cd_1)^{-1}(R\rho_{12} - Q\rho_{22})$$

$$\chi_2 = (cd_1)^{-1}[(\lambda + \mu)\rho_{22} - Q(\rho_{11} - \mu c^{-2})], \quad \varphi_2 = (cd_1)^{-1}[Q\rho_{12} - R(\rho_{11} - \mu c^{-2})]$$

$$d_1 = \rho_{22}(\rho_{11} - \mu c^{-2}), \quad \delta_1 = b_3(dc)^{-1}(\rho_{22} - Rc^{-2})$$

$$b_1 = cb_0d^{-1}(\kappa - 1)(\rho_{22} - Rc^{-2} + \rho_{12} - Qc^{-2})$$

$$\alpha_1 = (dc^2)^{-1}[(\rho_{22} - Rc^{-2})(p + 2\chi_0\kappa - NGF^2D^{-3}(\lambda + 2\mu) + q\kappa^2) -$$

$$-(\rho_{22} - Qc^{-2})(\chi_0 + s\kappa^2 + 2q\kappa)]$$

$$\beta_1 = FN(\lambda + 2\mu)(dD^2c)^{-1}(\rho_{22} - Rc^{-2})$$

$$\gamma_1 = Nr_2F(\lambda + 2\mu)(dcc_lD^2)^{-1}(Rc^{-2} - \rho_{22})$$

$$d = \frac{2}{c}\{(\rho_{22} - Rc^{-2})[(\lambda + 2\mu)(1 - NFD^{-1}) + Q\kappa] - (\rho_{12} - Qc^{-2})(Q + \kappa R)\}$$

Как видно из значений коэффициентов уравнений (3.1) β_1 обусловлен дисперсией, связанной с полостями; δ_1, γ_1 и b_1 характеризуют диссипацию, обусловленную вязкостью твердой фазы, полостями и трением твердых фаз, причем $b_1 < 0$.

Уравнение (3.1) отличается по форме от аналогичных уравнений, полученных в работах [13, 15], кроме значений коэффициентов, а также слагаемым $b_1\partial\psi/\partial\tau$. Последнее существенно влияет на поведение волны.

4. Солитонные решения эволюционного уравнения и их поперечная устойчивость. Уравнение (3.1) будем решать для одной волны и при малой диссипации. Решение ищется в виде [13, 16]:

$$\psi = -6\alpha^{-1}u_0(\xi)[1-T(\xi)]$$

$$\xi = k_1\tau + n_1x_1 + n_2x_2 - kx_3$$

$$T_1 = \frac{1}{3}(C\beta)^{-1/2}\left[6\gamma_1C\beta_1^{-1}\operatorname{th}\eta_1 - (\delta_1 + \gamma C\beta_1^{-1})\operatorname{sh}2\eta_1 + \frac{4}{3}b_1\beta^{1/2}C^{-3/2}k_2\operatorname{ch}^4\eta_1\operatorname{th}\eta_1\right.$$

$$C = [k_2k - L(n_1^2 + n_2^2)]k_2^2, \quad \eta_1 = (C\beta)^{1/2}(2k_1)^{-1}\xi$$

где u_0 – решение уравнения (3.1) при $\delta = \gamma_1 = b_1 = 0$; k_1, n_1, n_2 и k – постоянные. Выражение T_1 вблизи вершины солитона, когда $\xi \approx 0$, можно разложить в ряд, тогда получим

$$T_1 = [(6k_1\beta)^{-1}(4\gamma_1\beta_1^{-1}C - 2\delta_1) + 2b_1C^{-1}k_1^{-2}]\xi \tag{4.1}$$

Выражение (4.1), как и в твердой среде с полостями [13] пропорционально ξ, но коэффициент содержит слагаемое, обусловленное трением фаз, которое может влиять на знак квадратной скобки. Вершина диссипативного солитона остается неподвижной по сравнению с недиссипативным солитоном, а ветви в зависимости от знака квадратной скобки продвинутся вперед или назад.

В теории солитонов представляет интерес исследовать устойчивость полученных солитонообразных решений. Будем рассматривать случай сильной и слабой диссипации.

В случае слабой диссипации в уравнении (3.1) введем новые обозначения

$$\upsilon = -\alpha_1\psi(6\beta_1)^{-1}, \quad L\beta_1^{-1} = 3\beta\sigma, \quad \sigma = \pm1, \quad x_3 = \beta_1^{-1}t_1, \quad T = \beta t_1 \tag{4.2}$$

$$\theta = \tau - 4\eta^2t, \quad \beta_1^{-1}\delta = \beta^2\chi, \quad \gamma_1\beta_1^{-1} = \beta\zeta, \quad b_1\beta_1^{-1} = \beta^2b_5 \tag{4.3}$$

где β – малый параметр, характеризующий отклонение решения от одномерности и недиссипативности. Соотношения (4.2), (4.3) показывают, что диссипация и дифракция имеют одинаковый порядок. После введения (4.2) и (4.3) уравнение (3.1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + 6\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta} + \frac{\partial^3\upsilon}{\partial\theta^3}\right) = -\beta\frac{\partial^2\upsilon}{\partial T\partial\theta} - 3\beta^2\sigma\Delta_\perp\upsilon + \beta^2\chi\frac{\partial^3\upsilon}{\partial\theta^3} + \beta^2\zeta\frac{\partial^5\upsilon}{\partial\theta^5} + \beta^2b_5\frac{\partial\upsilon}{\partial\theta} \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) без правой части имеет солитонное решение

$$\upsilon_0 = 2\eta^2\operatorname{sech}^2\eta\theta_1, \quad \theta_1 = \theta - \theta_0(T, x_1, x_2) \tag{4.5}$$

где θ_0 характеризует трехмерное возмущение фазы одномерного солитона, а $2\eta^2$ – амплитуда солитона.

Решение уравнения (4.4) ищется в виде

$$\upsilon = \upsilon_0 + \beta\upsilon_1 + \beta^2\upsilon_2 + \ldots$$

Подставляя υ в (4.4), приравняв члены порядка β, можно получить уравнение для υ_1, решение которого имеет вид [17, 18]:

$$\upsilon_1 = \frac{1}{2\eta^2}\frac{\partial\theta_0}{\partial T}\left(2\upsilon_0 + \theta_1\frac{\partial\upsilon_0}{\partial\theta}\right) \qquad (4.6)$$

Из уравнения порядка β следует, что $\eta = \text{const}$ [17, 18]. При этом устойчивость солитона (4.5) зависит от изменения фазы θ_1. Суть этой устойчивости сохранения формы солитона. Уравнение для θ_0 имеет вид [17, 18]:

$$\partial^2\theta_0/\partial T^2 - 16\eta^2\sigma\Delta_\perp\theta_0 + \Lambda_1 = 0 \qquad (4.7)$$

где постоянная Λ_1 ввиду громоздкости не приводится. После ввода новой функции

$$\theta_2 = \theta_0 - \Lambda_1(64\sigma\eta^2)^{-1}(x_1^2 + x_2^2) \qquad (4.8)$$

получим

$$\partial^2\theta_2/\partial T^2 - 16\sigma\eta^2\Delta_\perp\theta_2 = 0 \qquad (4.9)$$

В выражении (4.8) $\theta_2 - \theta_0$ не зависит от T, оно не влияет на устойчивость. Зависимость θ_0 от поперечных координат приводит лишь к сдвигу фаз, как для решения (4.5), так и для (4.6).

Условие поперечной устойчивости имеет вид

$$\sigma = 1, \quad L\beta_1^{-1} > 0 \qquad (4.10)$$

Устойчивость солитона зависит от знака коэффициентов дифракции и дисперсии и не зависит от диссипации. Условие (4.10) совпадает с условием устойчивости квазимонохроматических волн [10]. Отметим, что условие (4.10) получено также в [18], где, однако, в уравнении типа (4.4) отсутствовал член, обусловленный трением фаз ($b_1 = 0$).

Рассмотрим второй важный случай сильной диссипации, тогда вместо (4.3) будет

$$\delta_1\beta_1^{-1} = \beta\chi, \quad \gamma_1\beta_1^{-1} = \beta\zeta, \quad b_1\beta_1^{-1} = \beta b_5 \qquad (4.11)$$

а в уравнении (4.4) в последних трех слагаемых β^2 надо заменить на β. В этом случае нельзя считать η постоянной. Изменение амплитуды дается уравнением

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} = -\frac{8}{15}\eta^2\chi + \frac{32}{21}\eta^4\zeta + \frac{2}{3}b_5 \qquad (4.12)$$

которое получается из измененного для сильной диссипации уравнения (4.4) порядка β. При $\zeta = 0$ из (4.12) следует, что $\eta(T)$ затухает.

Решение измененного уравнения (4.4) в порядке можно представить в виде $\upsilon_2 = \upsilon_1 + q_1$, где q_1 – часть решения, которая обусловлена новыми членами, появившимися из-за новых порядков (4.11). Решение для q_1 определяется в предположении $\zeta = 0$.

Воспользовавшись этим значением q, уравнением (4.12) и решением (4.6) можно получить уравнение для фазы θ_0. Это уравнение после замены (4.8), где в левой части вместо θ_2 стоит θ_3, можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial T^2} - 16\eta^2\sigma\Delta_\perp\theta_3 + (\kappa_1\eta^2 - b_5)\frac{\partial\theta_3}{\partial T} = 0 \qquad (4.13)$$

где κ_1 постоянная, вид которой для сокращения изложения не приводится. Ее вид не существенен для получения условия устойчивости. Можно показать, что $\kappa_1\beta_1^{-1} > 0$.

Уравнение (4.13) преобразуем подстановкой

$$\theta_3 = A(T)\exp[i(K_1x_1 + K_2x_2)], \quad K_1^2 + K_2^2 = K^2$$

к виду

$$\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + (\kappa_1\eta^2 - b_5)\frac{\partial A}{\partial T} - 16\eta^2\sigma K^2 A = 0 \tag{4.14}$$

Уравнение (4.12) при $\zeta = 0$ заменой $B = \eta^{-2}$ приводится форме

$$\frac{1}{2}\frac{dB}{dT} = \frac{8}{15}\chi - \frac{2}{5}b_5B \tag{4.15}$$

Решение уравнения (4.15) имеет вид

$$\eta^2 = \left\{\frac{4\chi}{5b_5}\left[1 - \exp\left(-\frac{4}{5}b_5T\right)\right] + \eta^2(0)\exp\left(\frac{4}{5}b_3T\right)\right\}^{-1} \tag{4.16}$$

Так как $b_5T < 0$ при $|T| \to \infty$, η^2 экспоненциально стремится к нулю. Тогда уравнение (4.14) примет вид

$$d^2A/dT^2 - b_5dA/dT = 0 \text{ (для } T \gg 1)$$

решение которого следующее:

$$A = C_2b_5^{-1}\exp(b_5T) + C_3, \quad b_5 < 0 \tag{4.17}$$

где C_2, C_3 – постоянная интегрирования.

Таким образом в отличие от случая, когда брались порядки (4.3), для которых устойчивость не зависит от наличия диссипации и дается условием (4.10), в случае сильной диссипации при порядках (4.11) солитонное решение всегда устойчиво. Т.е. в рассматриваемом случае в среде Био трение приводит к устойчивости солитонов. Можно показать, что этот имеет место и для случая $\zeta \neq 0$.

5. Пучки квазимонохроматических волн. Наличие диссипации, дисперсии и дифракции дает возможность решение уравнения (3.1) искать в виде [13]:

$$\begin{aligned}\psi_{1,2} &= \frac{1}{2}\{A_{1,2}(\tau'_{1,2}, x_1x_2, t)\exp[i\alpha\tau_{1,2} - (\nu + i\omega)\tau'_{1,2}] + \\ &+ B_{1,2}(\tau'_{1,2}, x_1, x_2, t)\exp[2i\alpha\tau_{1,2} - 2(\nu + i\omega)\tau'_{1,2}] + \text{к.с.}\}\end{aligned} \tag{5.1}$$

где α – основная частота, ω – возмущенная частота, ν – коэффициент поглощения.

Дисперсионное соотношение и коэффициент поглощения имеют вид

$$\omega = \alpha^3\beta_1, \quad \nu = \alpha^2\delta_1 - \alpha^4\gamma_1 - b_1 \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) в (3.1) можно получить стационарное уравнение для амплитуды первой гармоники [13]:

$$\begin{aligned}& i\alpha\frac{\partial A_{1,2}}{\partial \tau'_{1,2}} + L\Delta_\perp A_{1,2} = (\nu_1 + i\nu_2)|A_{1,2}|^2A_{1,2} \\ & \nu_1 = -3\omega\zeta_3, \quad \nu_2 = -(\nu - 6\alpha^4\gamma_1 + 3b_1/2)\zeta_3\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\zeta_3 = \frac{\alpha_1^2\alpha^3}{8}\left[9\omega^2 + \left(\nu - 6\alpha^4\gamma_1 + \frac{3}{2}b_1\right)^2\right]^{-1}\exp(-2\nu\tau'_{1,2}) \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) будем изучать в пределах теории узких пучков [13]. При этом можно получить уравнения для радиуса кривизны фронта волны и безразмерной ширины пучка. Они имеют вид:

$$R^{-1} = \frac{\alpha}{2Lf}\frac{df}{d\tau'} + \frac{\nu_2 a_{01,02}^2}{2Lf^2} \tag{5.5}$$

$$d^2f/d\tau'^2 = M/f^3 + 2\nu_2\alpha^{-1}f^{-1}a_{01,02}^2 \tag{5.6}$$

$$N = \alpha^{-2}(4L^2r_0^{-4} + 4\nu_1 a_{01,02}^2 Lr_0^{-2} - \nu_2^2 a_{01,02}^4) \tag{5.7}$$

где $a_{01,02}$ – исходные амплитуды волн, r_0 – начальный радиус пучка.

Известно [13], что на поведение пучка существенно влияет знак M. Как видно из соотношений (5.4) и (5.5), наличие трения между фазами, даваемое b_1 влияет на значение ν_2^2 и при значительных начальных амплитудах может влиять на знак M и привести к самофокусировке.

6. Граничные условия. Из постановки в случае слоя ясно, что должны быть два граничных условия. В плоскости $x_3 = l$ задается гармоническое колебание, которое распространяется как в твердой, так и в жидкой фазе.

Итак при $x_3 = l$ в силу узости пучков достаточно задать условия на оси в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu)\partial u_3/\partial x_3 + Q\partial v_3/\partial x_3 = -|Q_0|\cos\alpha t \\ \sigma_3 &= Q\partial u_3/\partial x_3 + R\partial v_3/\partial x_3 = -|P_0|\cos\alpha t \end{aligned} \tag{6.1}$$

где σ_{33} – линейная часть напряжения в каркасе, σ_3 – давление в жидкой фазе. Учитывая, что $\partial u_3/\partial x_3$ складывается из быстрых и медленных волн для амплитуд идущих вправо волн из (6.1) и (5.1) получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^{(a)}}(\lambda + 2\mu + Q\kappa^{(a)})a_0^{(a)} + \frac{1}{c^{(b)}}(\lambda + 2\mu + Q\kappa^{(b)})a_0^{(b)} = |Q_0| \\ &\frac{1}{c^{(a)}}(Q + \kappa^{(a)}R) + \frac{1}{c^{(b)}}(Q + \kappa^{(b)}R)a_0^{(b)} = |P_0| \end{aligned} \tag{6.2}$$

Из (5.2) можно найти $a_0^{(a)}$ и $a_0^{(b)}$ фигурирующие в уравнениях (5.5)–(5.7).

Используя (5.5), граничные условия при $x_3 = l$ можно записать в виде

$$f_1(0) = 1, \quad \frac{df_1(0)}{d\tau'_1} = F, \quad F = 2L\alpha^{-1}\left[R_1^{-1}(0) - \frac{1}{2}\nu_2 a_0^2(L\alpha)^{-1}\right] \tag{6.3}$$

Граничные условия на свободной от напряжения границе $x_3 = 0$ имеют вид $\sigma_{33} = \sigma_3 = 0$. Откуда автоматически следует $\partial u_3/\partial x_3 = \partial v_3/\partial x_3 = 0$ и для быстрых и медленных волн получим

$$\begin{aligned} &a_{01} = -a_{02}, \quad f_1(l/c) = f_2(l/c), \quad R_1(l/c) = R_2(l/c) \\ &\sigma_1(l/c) = \sigma_2(l/c), \quad df_1(l/c)/d\tau'_1 = df_2(l/c)/d\tau'_2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Причем последнее условие получено с учетом (5.5).

7. Решение для узких пучков. Уравнение (5.6) для f_1 будем решать при условии (6.3), считая что диссипация мала, так что коэффициенты можно считать постоянными и отбрасывать второе слагаемое в правой части (5.6).

Тогда решение примет вид

$$f_1^2 = M(F^2+M)^{-1} + (F^2+M)[\tau_1' + F(F^2+M)^{-1}]^2 \qquad (6.5)$$

Уравнение для f_2 следует решать при условиях (6.4). Можно показать, что решение f_2 дается (6.5), где следует заменить τ_1' на τ_2'. Из (6.5) следует, что при $M < 0$ имеет место фокусирование пучка, причем (5.7) показывает, что для значительных амплитуд наличие трения фаз, входящее в коэффициент ν_2 приводит к самофокусировке.

8. Заключение. Получена система нелинейных уравнений для жидконасыщенной среды с полостями. Для быстрых и медленных волн в слое выведены раздельные эволюционные уравнения. Получены и исследованы на устойчивость солитонные решения. Показано, что при слабой диссипации, условие устойчивости солитона от диссипации не зависит. Оно зависит от знака отношений коэффициентов дифракции и дисперсии. В случае сильной диссипации из-за наличия трения между фазами диссипативный солитон всегда устойчив.

Два квазимонохроматических пучков выведены стационарные уравнения Шредингера. Сформулированы связанные граничные условия для слоя для быстрых и медленных квазипродольных волн.

Получены решения уравнения Шредингера в рамках теории узких пучков и показано, что трение при больших значениях амплитуды может привести к самофокусировке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M.A.* Mechanics of deformation and propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 4. P. 1482–1498.
2. *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Серия географ. и геофиз. 1944. Т. 8. № 4. С. 133–150.
3. *Косачевский Л.Я.* О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // ПММ. 1959. Т. 53. Вып. 6. С. 1115–1123.
4. *Городецкая Н.С.* Затухание симметричных волн при распространении в пористо-упругом слое со свободными поверхностями // Акуст. вестн. 1998. Т. 1. № 4. С. 4–18.
5. *Багдоев А.Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван. Изд-во АН АрмССР, 1961. 276 с.
6. *Leclairo F., Cohen-Tenou dji, Aguirre-Puente Y.* Extension of Biot's theory of waves propagation to frozen porous media // J. Acoust. Soc. America. 1994. V. 96. № 6. P. 3753–3768.
7. *Shapiro S.A., Audigane, Royer Y.* Large-scale in situ permeability tensor of rocks from induced microseismicity // Geophys. J. Int. 1999. V. 137. № 1. P. 207–213.
8. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970, 335 с.
9. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. С приложениями к проблемам газовых и нефтяных пластов. М.: Недра, 1996. 447 с.
10. *Быков В.Г.* Сейсмические волны в пористых насыщенных породах. Владивосток: Дальнаука, 1999. 108 с.
11. *Быков В.Г.* Нелинейные волновые процессы в геологических средах. Владивосток: Дальнаука, 2000. 190 с.
12. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 237 с.
13. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* Нелинейные волны в твердой вязкой среде с полостями // Акуст. ж. 1999. Т. 45. № 2. С. 149–156.

14. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
15. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* Нелинейные волновые пучки в упругом, вязком дисперсионном и теплопроводящем пьезодиэлектрическом слое. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т. 48. № 1. С. 64–72.
16. *Шекоян А.В.* Приближенное трехмерное солитонное решение при наличии дисперсии и диссипации // Изв. НАН Армении. Физика. 1998. Т. 33. № 4. С. 187–190.
17. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 478 с.
18. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* Поперечная устойчивость солитонов и волн модуляции с учетом диссипации // Изв. НАН Армении. Физика. 2000. Т. 35. № 2. С. 85–89.
19. *Багдоев А.Г., Петросян Л.Г.* Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости // Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 33. № 5. С. 3–16.

Ереван

Поступила в редакцию
28.11.2001