

УДК 539.3

© 2004 г. А.Г. ГОРШКОВ, АМАР АБДУЛ КАРИМ САЛМАН, Д.В. ТАРЛАКОВСКИЙ,
Г.В. ФЕДОТЕНКОВ

УДАР ДЕФОРМИРУЕМЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ТЕЛОМ ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

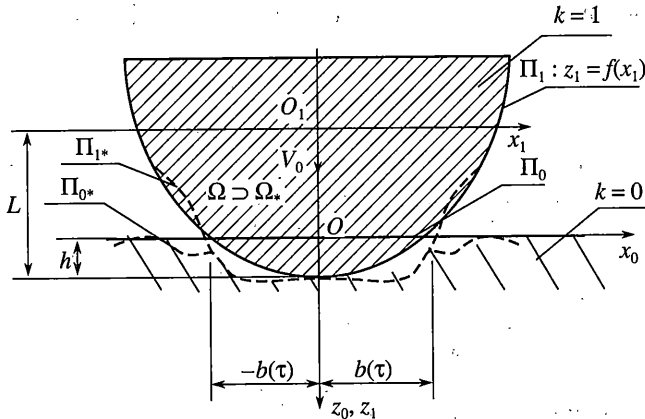
Исследуется плоская нестационарная контактная задача о взаимодействии упругого цилиндра (ударника), ограниченного гладкой выпуклой поверхностью, с упругим полупространством (основанием). Для определения контактного давления как следствие граничных условий в области контакта строится интегральное уравнение с ядром в виде разности поверхностных функций влияния для полупространства и цилиндра. К нему добавляется приближенное равенство для радиуса области (отрезка) контакта, которое вытекает из условия пересечения недеформированных границ цилиндра и основания. В связи с этим привлекается также уравнение поступательного движения ударника как абсолютно твердого тела. Для построения решения функциональной системы уравнений предлагается пошаговый численный метод. При этом для интегралов строятся специальные квадратурные формулы, учитывающие сингулярные особенности ядра. Предложен и реализован на ЭВМ итерационный алгоритм уточнения области контакта. Приводится пример расчета.

1. Постановка задачи. В начальный момент времени бесконечно длинный ударник, ограниченный гладкой выпуклой цилиндрической поверхностью, касается по образующей граничной плоскости полупространства. До момента контакта полупространство находится в невозмущенном состоянии, а все точки ударника обладают равными скоростями V_0 , вектор которых направлен по нормали к свободной поверхности полупространства. Полупространство и ударник заняты однородными изотропными линейно упругими средами с постоянными Ламе λ_k и μ_k и плотностями ρ_k ($k = 0, 1$). Здесь и далее все величины с индексом $k = 0$ относятся к полупространству, а с $k = 1$ – к ударнику.

Движение полупространства будем рассматривать в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_0y_0z_0$ с базисом e_{10}, e_{20}, e_{30} , у которой ось z_0 направлена в глубь полупространства, а плоскость Ox_0y_0 совпадает с его границей. Для описания движения ударника будем использовать прямоугольную декартову систему координат $O_1x_1y_1z_1$ с базисом e_{11}, e_{21}, e_{31} , у которой ось z_1 совпадает с осью симметрии ударника и с осью z_0 (фиг. 1).

Далее всем переменным и параметрам придадим безразмерную форму (штрихом обозначены безразмерные величины)

$$\begin{aligned}
 x'_k &= \frac{x_k}{L}, \quad z'_k = \frac{z_k}{L}, \quad \mathbf{u}'_k = \frac{\mathbf{u}_k}{L}, \quad \tau = \frac{c_{10}t}{L}, \quad \varphi'_k = \frac{\varphi_k}{L^2}, \quad \psi'_k = \frac{\Psi_k}{L}, \quad \Psi_k = \sum_{i=1}^3 \Psi_{ik} e_{ik} \\
 \sigma'_{ij}{}^{(k)} &= \frac{\sigma_{ij}^{(k)}}{\lambda_0 + 2\mu_0} \quad (i, j = 1, 3), \quad h_k^2 = \frac{c_{10}^2}{c_{2k}^2}, \quad \kappa_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 2\mu_k}, \quad V'_0 = \frac{V_0}{c_{10}} \\
 \gamma_k^2 &= \frac{c_{10}^2}{c_{1k}^2}, \quad c_{1k}^2 = \frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\rho_k}, \quad c_{2k}^2 = \frac{\mu_k}{\rho_k}, \quad m' = \frac{m}{\rho_0 L^2}, \quad \xi_k = \frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\lambda_0 + 2\mu_0}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Здесь L – расстояние от центра масс до лобовой точки ударника, c_{1k} – скорость распространения волны растяжения-сжатия, c_{2k} – скорость распространения волны сдвига, Φ_k и Ψ_k – скалярный и векторный потенциалы упругих смещений, $\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений; m – погонная масса ударника. Далее везде штрихи опускаем.

Поскольку задача является плоской, то уравнения движения полупространства и ударника относительно скалярных потенциалов Φ_k и ненулевых компонент $\Psi_k = \Psi_{2k}$ векторных потенциалов будут иметь вид [1]:

$$\gamma_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \tau^2} = \Delta \Phi_k, \quad \eta_k \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial \tau^2} = \Delta \Psi_k, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_k^2} \quad (1.2)$$

Связь компонент вектора перемещений с упругими потенциалами определяется так

$$u_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \Psi_k}{\partial z_k}, \quad w_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial z_k} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_k} \quad (1.3)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений связаны с перемещениями следующими дифференциальными соотношениями:

$$\sigma_{11}^{(k)} = \xi_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \kappa_k \frac{\partial w_k}{\partial z_k} \right), \quad \sigma_{22}^{(k)} = \xi_k \kappa_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial z_k} \right) \quad (1.4)$$

$$\sigma_{33}^{(k)} = \xi_k \left(\kappa_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial z_k} \right), \quad \sigma_{13}^{(k)} = \xi_k \frac{\gamma_k^2}{\eta_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial z_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \right)$$

Соотношения (1.2)–(1.4) образуют замкнутые системы уравнений движения полупространства и ударника. Для постановки начально-краевой задачи к ним необходимо добавить начальные и граничные условия, первые из которых имеют вид

$$u_k|_{\tau=0} = w_k|_{\tau=0} = \dot{u}_k|_{\tau=0} = \dot{w}_k|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{w}_1|_{\tau=0} = V_0 \quad (1.5)$$

Из (1.3) следует, что для удовлетворения условий (1.5) достаточно потребовать выполнения следующих равенств:

$$\Phi_k|_{\tau=0} = \Psi_k|_{\tau=0} = \dot{\Phi}_0|_{\tau=0} = \dot{\Psi}_k|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\Phi}_1|_{\tau=0} = V_0 z \quad (1.6)$$

Первая группа граничных условий состоит в отсутствии возмущений на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_k = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_k = 0, \quad r^2 = x_k^2 + z_k^2 \quad (1.7)$$

Вторая группа этих условий – условия контакта ударника и основания. Для их задания положим, что гладкая выпуклая в той части, которая вступает в контакт с полупространством, граница Π_1 ударника задана в явной форме (фиг. 1):

$$\Pi_1: z_1 = f(x_1), \quad f(0) = 1 \quad (1.8)$$

В линейной постановке задачи поверхность контакта Π_* отождествляем с плоской областью $\Omega_*(\tau)$, принадлежащей плоскости невозмущенной поверхности полупространства $z_0 = 0$: $\Pi_* = \Omega_*(\tau)$. С учетом плоской постановки задачи она в общем случае представляет собой систему отрезков, принадлежащих прямой $z_0 = 0$ (фиг. 1).

Из всех возможных условий контакта ударника и полупространства ограничимся одним предельным случаем: по всей поверхности контакта происходит контакт без трения (имеет место свободное проскальзывание). Тогда, полагая, что вне зоны контакта границы полупространства и ударника свободны от напряжений, приходим к следующим условиям ($x = x_0 = x_1$, $z_0 = z$, R – множество действительных чисел):

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(0)}|_{z=0} = \sigma_{13}^{(1)}|_{z=0} = 0 \quad (x \in R) \\ \sigma_{33}^{(0)}|_{z=0} = \sigma_{33}^{(1)}|_{z=0} = 0 \quad (x \in R \setminus \Omega_*) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\sigma_{33}^{(0)}|_{z=0} = \sigma_{33}^{(1)}|_{z=0}, \quad w_0|_{z=0} = w_1|_{z=0} = f(x) - 1 \quad (x \in \Omega_*)$$

Область контакта Ω_* в общем случае является многосвязной и определяется так

$$\Omega_* = \{x \in \Omega | \sigma_{33}^{(0)}|_{z=0} = \sigma_{33}^{(1)}|_{z=0} < 0\}, \quad \Omega(\tau) = [-b(\tau), b(\tau)] \quad (1.10)$$

Здесь $b(\tau)$ – ширина области контакта. Она определяется из условия пересечения деформируемых поверхностей Π_{k*} ударника и полупространства (фиг. 1):

$$2b(\tau) = \text{diampr}_{Oxy} \Pi_{0*} \cap \Pi_{1*} \quad (1.11)$$

В начальном приближении при определении величины $b(\tau)$ пренебрегаем деформациями свободных поверхностей полупространства и ударника. Для этого находим уравнение недеформированной границы ударника в неподвижной системе координат (фиг. 1):

$$z = f(x) + h - 1 \quad (1.12)$$

где h – глубина погружения ударника как недеформируемого тела.

Поскольку $x = b(\tau)$ соответствует $z = 0$, то $b(\tau)$ удовлетворяет уравнению $f(b) + h - 1 = 0$ и ширина области контакта определяется так

$$b(\tau) = f^{-1}[1 - h(\tau)] \quad (1.13)$$

Отметим, что существование функции $f^{-1}(x)$, обратной к $f(x)$, обеспечивается гладкостью и выпуклостью поверхности Π_1 .

Глубина погружения h определяется из задачи Коши, соответствующей движению ударника как абсолютно твердого тела

$$m\ddot{h}(\tau) = P, \quad h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = V_0, \quad P = \int_{\Omega} p dx, \quad p = \sigma_{33}^{(0)}|_{z=0} \quad (1.14)$$

где p – контактное давление на плоскости $z = 0$, а P – соответствующая погонная результирующая сила.

Таким образом, уравнения движения среды и ударника (1.2)–(1.4), начальные условия (1.6) совместно с граничными условиями (1.7)–(1.9), условие (1.10), геометрическое соотношение (1.11) или (1.13) совместно с уравнением движения ударника как абсолютно твердого тела (1.14) полностью определяют динамическую контактную задачу для упругого цилиндрического ударника и упругого полупространства.

2. Система разрешающих уравнений для начального приближения. В этом приближении полагаем, что контактная область односвязная. Тогда ее ширина определяется равенством (1.13).

Начально-краевую задачу (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7), (1.9) для ударника ($k = 1$) сводим к задаче с однородными начальными условиями. Для этого в потенциале φ_1 выделим слагаемое

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + V_0 \tau z \tag{2.1}$$

Функции $\tilde{\varphi}_1$ и ψ_1 удовлетворяют уравнениям (1.2), перемещение u_1 определяется первой из формул в (1.3) с заменой φ_1 на $\tilde{\varphi}_1$, а перемещение w_1 имеет вид

$$w_1 = \tilde{w}_1 + V_0 \tau \tag{2.2}$$

где \tilde{w}_1 вычисляется по второй формуле в (1.3) опять с заменой φ_1 на $\tilde{\varphi}_1$.

Для напряжений остаются справедливыми формулы (1.4) при замене w_1 величиной \tilde{w}_1 .

Таким образом, потенциалы $\tilde{\varphi}_1, \psi_1$ так же, как и φ_0, ψ_0 есть решение задачи (1.2)–(1.4), (1.7), (1.9) с однородными начальными условиями

$$\tilde{\varphi}_1|_{\tau=0} = \psi_1|_{\tau=0} = \dot{\tilde{\varphi}}_1|_{\tau=0} = \dot{\psi}_1|_{\tau=0} = 0 \tag{2.3}$$

Используя принцип суперпозиции и равенство (2.2), из последнего граничного условия в (1.9) получаем основное разрешающее интегральное уравнение

$$G_0 ** p = -G_1 ** p + f(x) - 1 + V_0 \tau, \quad G_k ** p = \int_0^{\tau} \int_{-b(t)}^{b(t)} G_k(x - \xi, \tau - t) p(\xi, t) dt d\xi \tag{2.4}$$

где звездочками обозначена свертка по пространственной координате и времени.

Оно вместе с кинематическим условием (1.16) и уравнением движения ударника (1.17) образуют замкнутую систему уравнений.

Ядра $G_0(x, \tau) = w_0|_{z=0}$ и $G_1(x, \tau) = \tilde{w}_1|_{z=0}$ – поверхностные функции влияния. Они являются решениями систем уравнений (1.2)–(1.4), удовлетворяющими однородным начальным условиям и следующим граничным условиям:

$$\sigma_{13}^{(k)}(\tau, x, 0) = 0, \quad \sigma_{33}^{(k)}(\tau, x, 0) = \delta(\tau)\delta(x) \tag{2.5}$$

Функция G_0 найдена в [1]. Определение функции влияния G_1 для ударника с учетом кривизны его границы представляет сложную задачу. Однако, для начального временного интервала взаимодействия с учетом малости ширины области контакта кривизной граничной поверхности ударника можно пренебречь и рассматривать ударник как полуплоскость.

В безразмерном виде функции влияния для полупространства и ударника имеют вид [1]:

$$G_k(x, \tau) = G_{k1}(x, \tau)H(\tau - \gamma_k|x|) + G_{k2}(x, \tau)H(\tau - \eta_k|x|)$$

$$G_{k1}(x, \tau) = \frac{1}{\pi \xi_k \gamma_k^2 \eta_k^4} \frac{(\eta_k^2 x^2 - 2\tau^2)^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_k^2 x^2}}{(x^2 - c_{Rk}^2 \tau^2)(x^4 - 2\alpha_k^2 \tau^2 x^2 + \beta_k^2 \tau^4)} \quad (2.6)$$

$$G_{k2}(x, \tau) = \frac{1}{\pi \xi_k \gamma_k^2 \eta_k^4} \frac{4\tau^2(\tau^2 - 6x^2)^2 \sqrt{\tau^2 - \eta_k^2 x^2}}{(x^2 - c_{Rk}^2 \tau^2)(x^4 - 2\alpha_k^2 \tau^2 x^2 + \beta_k^2 \tau^4)}$$

$$\alpha_k^2 = \frac{4}{\eta_k^2} - \frac{c_{Rk}^2}{2}, \quad \beta_k^2 = \frac{8(1 + \kappa_k)}{\eta_k^2 c_{Rk}^2}$$

где c_{Rk} – скорость распространения волны Рэлея в k -й среде.

Отметим, что функции $G_k(x, \tau)$ имеют сингулярную особенность порядка (-1) на фронтах волн Рэлея: $x = \pm c_{Rk} \tau$ ($k = 0, 1$) [1].

Далее с учетом носителя давления $p(x, \tau)$ удобно записать задачу (1.14) в интегральной форме

$$h(\tau) = V_0 \tau + \frac{1}{m} I_s(\tau, b(\tau)), \quad I_s(\tau, b) = p * * \tau \quad (2.7)$$

Аналогичный вид придадим уравнению (2.4):

$$I_0(x, \tau, b(\tau)) + I_1(x, \tau, b(\tau)) = f(x) - 1 + V_0 \tau \quad (2.8)$$

$$I_k(x, \tau, b(\tau)) = G_k * * p$$

Функции влияния представим в виде суммы сингулярной и регулярной составляющих

$$G_k(x, \tau) = G_{ks}(x, \tau) + G_{kr}(x, \tau)$$

$$G_{ks}(x, \tau) = \frac{\tau}{x^2 - c_{Rk}^2 \tau^2} [a_{ks}^{(1)} H(\tau - \gamma_k|x|) + a_{ks}^{(2)} H(\tau - \eta_k|x|)]$$

$$a_{ks}^{(1)} = \frac{1}{\pi \xi_k \gamma_k^2 \eta_k^4} \frac{(\eta_k^2 c_{Rk}^2 - 2)^2 \sqrt{1 - \gamma_k^2 c_{Rk}^2}}{c_{Rk}^4 - 2\alpha_k^2 c_{Rk}^2 + \beta_k^2} \quad (2.9)$$

$$a_{ks}^{(2)} = \frac{1}{\pi \xi_k \gamma_k^2 \eta_k^4} \frac{4(1 - 6c_{Rk}^2)^2 \sqrt{1 - \eta_k^2 c_{Rk}^2}}{c_{Rk}^4 - 2\alpha_k^2 c_{Rk}^2 + \beta_k^2}$$

3. Разностная схема для начального приближения. Основанная на методе граничных элементов разностная схема решения задачи в начальном приближении построена в [2]. Отличие представленной здесь разностной схемы заключается в том, что в качестве ядра интегрального оператора связи перемещений ударника с контактным давлением выступает функция влияния сплошного упругого ударника (2.6) в отличие от функции влияния оболочки типа Тимошенко, использованной в [2].

Нанося на пространственно-временную область контакта сетку с равномерным шагом δ , заменяя функции одного и двух переменных $b(\tau)$, $h(\tau)$, $w_k(\xi, \tau)$, $p(\xi, \tau)$, $G_k(\xi, \tau)$, $f(\xi)$ сеточными функциями

$$\begin{aligned} h_n &= h(\tau_n), \quad w_{knm} = w_k(\xi_m, \tau_n), \quad b_n = b(\tau_n) \\ p_{nm} &= p(\xi_m, \tau_n), \quad G_{knm} = G(\xi_m, \tau_n), \quad f_m = f(\xi_m) \end{aligned} \quad (3.1)$$

и ставя в соответствие операторам $I_s(x, \tau; b(\tau))$, $I_k(x, \tau; b(\tau))$ их разностные аналоги, основанные на методе прямоугольников

$$\begin{aligned} J_{sn} &= \delta^3 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=l_{1i}}^{l_{2i}-1} (n-i)p_{ij}, \quad J_{knm} = \delta \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{1i}}^{k_{2i}-1} (r_{nmij}^{(k)} + s_{nmij}^{(k)})p_{ij} + a_{nm}^{(k)}p_{nm} \right) \\ a_{nm}^{(k)} &= -\frac{1}{\xi_k \gamma_k}, \quad r_{nmij}^{(k)} = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij} G_{kr} (2n+1-x_p, 2m+1-y_i) \\ \mathbf{x} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} 4/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/36 & 1/36 \\ 1/9 & 1/36 & 1/36 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} s_{nmij}^{(k)} &= \frac{a_{ks}}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{2n+1-u}{(2m+1-\vartheta)^2 - c_{Rk}^2 (2n+1-u)^2} dud\vartheta = \\ &= \frac{a_{ks}}{2c_{Rk}^2} \sum_{i,j,k=0}^1 (-1)^{i+k+1} \vartheta_{m+k,n+i}^j \ln |\vartheta_{m+k,n+i}^j|, \quad \vartheta_{m,n}^j = m + (-1)^j n c_{Rk} \end{aligned}$$

приходим к разностной схеме

$$\begin{aligned} p_{nm} &= \left\{ f(\xi_m) - 1 + V_0 n \delta - \delta \sum_{k=0}^1 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{1i}}^{k_{2i}-1} (r_{nmij}^{(k)} + s_{nmij}^{(k)})p_{ij} \right] \right\} / \delta \sum_{k=0}^1 a_{nm}^{(k)} \\ h_n &= V_0 n \delta + \frac{1}{m} \delta^3 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=l_{1i}}^{l_{2i}-1} (n-i)p_{ij}, \quad b_n = f^{-1}(1-h_n) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Соответствующие начальные условия имеют вид [2]:

$$h_0 = 0, \quad p_{00} = -V_0 \quad (3.4)$$

Приведенные выше разностные аналоги интегральных операторов, построенные с учетом носителей подынтегральных функций, позволяют учесть степенные особенности функций влияния, сосредоточенные на фронте волны Релея (соответствующие интегралы понимаются в смысле главного значения).

4. Уточнение области контакта. Итерационный процесс реализуется по следующей схеме. На каждом новом шаге с помощью интегральной связи (2.4) по найденной на предыдущем шаге функции контактного давления определяются перемещения удар-

ника и полупространства. Уравнение деформированной поверхности ударника выглядит следующим образом:

$$\Pi_{1*}: z = f(x) - 1 + w_1, \quad w_1 = \tilde{w}_1 + V_0 \tau, \quad \tilde{w}_1 = -G_1 ** p \quad (4.1)$$

Деформированная поверхность полупространства в выбранной системе координат выражается зависимостью

$$\Pi_{0*}: z = w_0 = G_0 ** p \quad (4.2)$$

На поверхности контакта $\Pi_* = \Omega_*$ имеет место условие совместности перемещений

$$f(x) - 1 + w_1(x, \tau) = w_0(x, \tau) \quad (4.3)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Delta(x, \tau) = f(x) - 1 + w_1(x, \tau) - w_0(x, \tau) \quad (4.4)$$

которая представляет собой зазор между деформированными поверхностями ударника и полупространства. На поверхности Π_* зазор равен нулю

$$\Delta(x, \tau) = 0 \quad (4.5)$$

Множество точек (x, τ) , в которых $\Delta(x, \tau) > 0$ не принадлежит области контакта Ω_* и исключается при расчете на следующем шаге итерационного процесса. Также из расчета исключаются области с наличием неотрицательных контактных напряжений. Затем повторяется расчет контактного давления по предложенному выше алгоритму с учетом уточненной области взаимодействия. Проводится численный анализ сходимости итерационного процесса, который останавливается при выполнении заданных условий точности.

5. Пример расчета. Для иллюстрации предложенного алгоритма рассмотрим процесс ударного взаимодействия кругового упругого цилиндра с упругим полупространством (L – радиус цилиндра). Условие совместности перемещений в этом случае записывается так

$$\Delta(x, \tau) = \sqrt{1 - x^2} - 1 + w_1 - w_0 = 0 \quad (5.1)$$

Соответствующая $\Delta(x, \tau)$ сеточная функция определяется следующим образом

$$\Delta_{nm} = \sqrt{1 - (m\delta)^2} - 1 + w_{1nm} - w_{0nm} \quad (5.2)$$

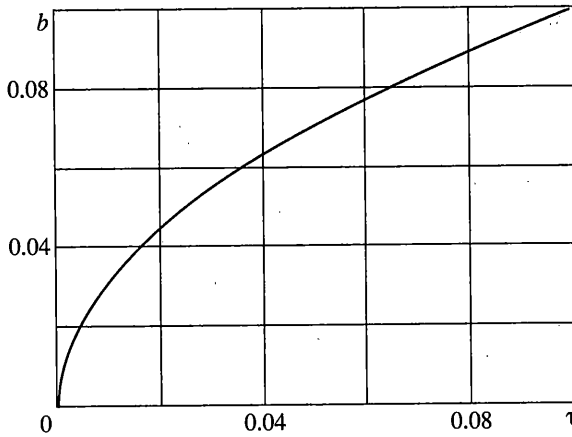
Разностная схема разрешающей системы уравнений в этом случае имеет вид

$$p_{nm} = \sqrt{1 - (m\delta)^2} - 1 + V_0 n \delta - \delta \sum_{k=0}^1 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{1i}}^{k_{2i}-1} (r_{nmij}^{(k)} + s_{nmij}^{(k)}) \right] / \delta \sum_{k=0}^1 a_{nm}^{(k)}$$

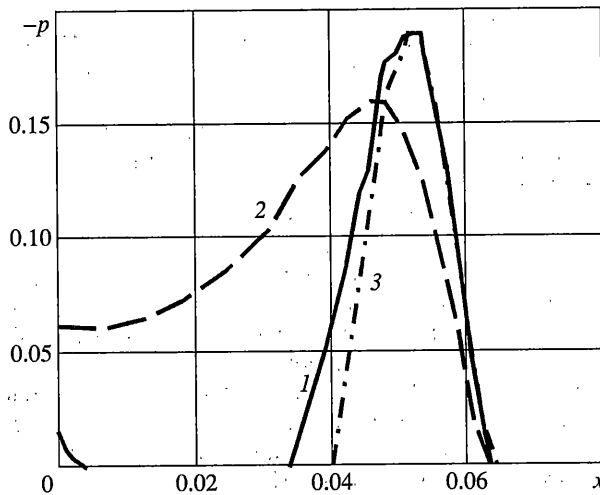
$$h_n = V_0 n \delta + \frac{1}{m} \delta^3 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=l_{1i}}^{l_{2i}-1} (n-i) p_{ij}, \quad b_n = \sqrt{h_n(2-h_n)}$$

$$w_{0nm} = \delta \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{1i}}^{k_{2i}-1} (r_{nmij}^{(0)} + s_{nmij}^{(0)}) p_{ij}, \quad \tilde{w}_{1nm} = \delta \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{1i}}^{k_{2i}-1} (r_{nmij}^{(1)} + s_{nmij}^{(1)}) p_{ij}$$

$$\Delta_{mn} = 0, \quad p_{mn} < 0 \quad (5.3)$$



Фиг. 2



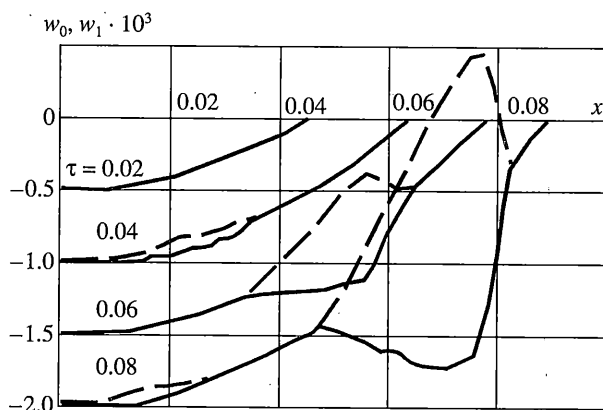
Фиг. 3

Начальные условия для нее задаются следующим образом:

$$h_0 = 0, \quad p_{00} = -V_0 \quad (5.4)$$

В расчетах рассматриваются три варианта материалов ударника: сталь, алюминий и медь. Материал полупространства – сталь. При этом приняты следующие характеристики материалов: сталь – $\rho = 7200 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга – $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона – $\nu = 0.3$, погонная масса ударника – $m = 3.14$; алюминий – $\rho = 2702 \text{ кг/м}^3$, $E = 0.7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$, $m = 1.18$; медь – $\rho = 8960 \text{ кг/м}^3$, $E = 1.2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$, $m = 3.9$. Принимается также, что $\tau \in [0, 0.1]$, $V_0 = 0.05$.

Зависимость ширины области контакта от времени представлена на фиг. 2. Материал ударника и полупространства – сталь. Следует отметить, что соответствующие кривые для других сочетаний материалов мало отличаются от представленной. Распределение контактного давления по области взаимодействия (материал полупрост-



Фиг. 4

ранства – сталь, $\tau = 0.04$) показано на фиг. 3. Сплошная кривая 1 соответствует стальному, штриховая 2 – алюминиевому, штрих – пунктирная 3 – медному ударникам. Заметим, что в отличие от распределений контактного давления для стального и медного ударников соответствующая кривая для алюминиевого ударника не принимает нулевых значений в области контакта. Таким образом, отрыв граничных поверхностей на начальном этапе взаимодействия характерен для материалов, обладающих близкими параметрами (сталь и медь). Для алюминиевого ударника он также характерен, но на более поздних временных значениях.

На фиг. 4 представлено сравнение перемещений ударника и полупространства для различных моментов времени. Штриховые линии относятся к ударнику, а сплошные к полупространству. Материал ударника и полупространства – сталь. Видно, что на начальном этапе взаимодействия перемещения совпадают и, следовательно, область контакта является односвязной. В дальнейшем происходит частичное отслоение граничных поверхностей друг от друга, и область становится многосвязной.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 03-01-00422, 03-01-03007) и в рамках гранта президента РФ № МК-1576.2003.01.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 352 с.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская задача о вертикальном ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 151–158.

Москва

Поступила в редакцию
10.10.2003