МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2004

УДК 531.31

© 2004 г. **И.И. КОСЕНКО**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ СВЯЗКИ С УЧЕТОМ УДАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Решается пространственная задача об устойчивости положений относительного равновесия орбитальной связки, центр масс которой совершает круговое орбитальное движение. Материальные точки, составляющие связку, считаются соединенными гибким невесомым нерастяжимым тросом. Помимо силы притяжения к неподвижному гравитирующему центру эти точки испытывают в моменты выхода на связь упругие удары, что не позволяет им неограниченно удаляться по кеплеровым орбитам от центра масс системы. Рассматриваются вертикальные (в орбитальной системе координат) положения относительного равновесия, существующие в данной задаче при натянутом тросе. При анализе устойчивости применяется техника метода отражения для описания динамики механической системы с односторонней связью.

1. Постановка задачи. Рассматривается пространственное движение орбитальной связки двух тел: станции M_0 массы m_0 и субспутника M_1 массы m_1 в поле сил гравитации планеты P. Для простоты все тела считаются материальными точками. Станция и субспутник соединены гибким невесомым нерастяжимым тросом. Таким образом, кроме попарного гравитационного взаимодействия точек M_0, P и M_1, P соответственно, имеет место взаимодействие точек M_0, M_1 посредством абсолютно упругих ударов в моменты выхода на связь. В промежутках между ударами станция и субспутник совершают каждый по отдельности свободный полет. Задачу рассматриваем в ограниченной постановке, считается, что центр масс C связки совершает круговое орбитальное движение. Кенигова система координат $Cxyz$ выбрана так, что плоскость Cxy совпадает с орбитальной.

Введем обозначения. Пусть $\mathbf{r} = (x, y, z) = M_0M_1$ – вектор относительного положения спутника с координатами – проекциями на инерциальные оси, R – радиус орбиты центра масс C. Тогда кинетическая энергия и силовая функция связки имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_0m_1}{m_0+m_1}|\dot{\mathbf{r}}|^2$$

$$U = \frac{\mu m_0}{|M_0P|} + \frac{\mu m_1}{|M_1P|} = \frac{\mu m_0}{\sqrt{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma}} + \frac{\mu m_1}{\sqrt{R^2+\rho_1^2+2R\rho_1\cos\gamma}}$$

где μ – постоянный гравитационный множитель, $\rho_0 = |M_0C|$, $\rho_1 = |M_1C|$; γ – угол между векторами PC и $\mathbf{r}$.

Пусть $\alpha = m_1/(m_0 + m_1)$. Выполним переход к безразмерным переменным таким образом, чтобы $m_0 + m_1 = 1$, $\mu = 1$, $R = 1$. Динамика относительного движения орбитальной связки описывается канонической системой с тремя степенями свободы и функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2\alpha\beta}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_\lambda^2\right) - \frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2 r^2 - 2\alpha r\cos\gamma}} -$$

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2 r^2 + 2\beta r\cos\gamma}}, \quad \beta = 1-\alpha, \quad \cos\gamma = \cos\varphi\cos(\lambda - t)$$

где r, φ (широта), λ (долгота) – сферические координаты вектора $\mathbf{r}$ такие, что $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \lambda < 2\pi$; p_r, p_φ, p_λ – соответствующие этим обобщенным координатам обобщенные импульсы.

Следует учесть, что в силу наличия односторонней связи имеет место ограничение в виде неравенства $r \le l$, где l – длина троса. В реальных приложениях величину l следует считать (при выбранных единицах измерения) малым параметром. Если перейти к новой единице длины и одновременно провести масштабирующее преобразование переменных вида $r \to r/l$, $p_r \to p_r/l$, $p_\varphi \to p_\varphi/l^2$, $p_\lambda \to p_\lambda/l^2$, $H \to H/l^2$, то будет иметь каноническую систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\alpha\beta}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_\lambda^2\right) - \frac{1}{l^2}\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2 l^2 r^2 - 2\alpha l r\cos(\lambda - t)\cos\varphi}} - \frac{1}{l^2}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2 l^2 r^2 + 2\beta l r\cos(\lambda - t)\cos\varphi}} \tag{1.1}$$

Теперь ограничение будет иметь вид $r \le 1$.

Получена модель сферического биллиарда с дополнительным силовым полем. Дальнейший анализ проведем следуя работам [1, 2] при помощи метода отражения. Перейдем к новой канонической системе, в которой вместо ограниченной обобщенной координаты r используем переменную s, не имеющую ограничения, такую, что $r = 1 - |s|$. Заметим здесь же, что при исследовании устойчивости по отношению к ударным движениям малой амплитуды переменная s также предполагается достаточно малой по абсолютной величине. Таким образом, далее в гамильтониане (1.1) везде вместо r следует подставить выражение $1 - |s|$ и вместо p_r – выражение $p_s \operatorname{sgn} s$.

В полученной системе Гамильтона можно избавиться от неавтономности, переходя во вращающуюся орбитальную систему координат при помощи расширенного канонического преобразования

$$(s, \varphi, \lambda, t, p_s, p_\varphi, p_\lambda, -H) \to (s, \varphi, \nu, t, p_s, p_\nu, -K)$$

по формулам $\nu = \lambda - t$, $H = K + p_\lambda$, $p_\lambda = p_\nu$ с новой функцией Гамильтона

$$K = \frac{1}{2\alpha\beta}\left(p_s^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_\nu^2\right) - p_\nu -$$

$$-\frac{1}{l^2}\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2 l^2 r^2 - 2\alpha l r\cos\nu\cos\varphi}} - \frac{1}{l^2}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2 l^2 r^2 + 2\beta l r\cos\nu\cos\varphi}}$$

2. Положения относительного равновесия. Введем вспомогательную переменную $\sigma = |s|$ и исследуем поведение функции Гамильтона

$$K(s, \varphi, \nu, p_s, p_\varphi, p_\nu) = \frac{1}{2\alpha\beta}\left(p_s^2 + \frac{1}{(1-\sigma)^2}p_\varphi^2 + \frac{1}{(1-\sigma)^2\cos^2\varphi}p_\nu^2\right) - p_\nu -$$

$$-\frac{1}{l^2}\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2 l^2(1-\sigma)^2-2\alpha l(1-\sigma)\cos\nu\cos\varphi}}-$$

$$-\frac{1}{l^2}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2 l^2(1-\sigma)^2+2\beta l(1-\sigma)\cos\nu\cos\varphi}}$$

в окрестности точки $(s, \varphi, \nu, p_s, p_\varphi, p_\nu) = (0, 0, 0, 0, 0, \alpha\beta)$ при достаточно малых величинах $\sigma \geq 0$, φ, ν, p_s, p_φ, $p_\nu - \alpha\beta$. При движении с напряженной связью эта точка соответствует одному из положений троса, вытянутому вдоль орбитального радиуса, и является устойчивым по Ляпунову положением равновесия. Известно [3], что положения относительного равновесия, соответствующие тросу, вытянутому по касательной к орбите, в безударном движении неустойчивы и находятся на границе области схода со связи. По указанной причине такие положения рассматриваться не будут. Ограничимся изучением случая $\nu = 0$. Случай, когда $\nu = \pi$, аналогичен предыдущему.

Что касается обобщенной координаты s, то по этой переменной в точке $s = 0$ функция K, очевидно, в общем положении должна терпеть "излом". Для уточнения ситуации найдем степенное разложение функции K по переменным

$$\sigma = |x_1|(x_1 = s),\quad x_2 = \varphi,\quad x_3 = \nu,\quad y_1 = p_s,\quad y_2 = p_\varphi,\quad y_3 = p_\nu$$

в окрестности положения равновесия в виде

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_0 + K_1(x_1) + K_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \ldots,$$

где K_k – однородные формы степени k по фазовым переменным. Очевидно, что постоянную K_0 можно исключить из рассмотрения.

Учитывая, что величина l является малым параметром, в степенном разложении функции K по переменным σ, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 при представлении коэффициентов для простоты ограничимся членами первого порядка по l. В этом случае удобнее всего воспользоваться разложением силовой функции задачи в ряд по полиномам Лежандра от $\cos\gamma$. Имеем

$$U = \frac{1}{l^2}\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2 l^2(1-\sigma)^2-2\alpha l(1-\sigma)\cos\gamma}}+$$

$$+\frac{1}{l^2}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2 l^2(1-\sigma)^2+2\beta l(1-\sigma)\cos\gamma}}=$$

$$=\frac{1}{l^2}\sum_{n=0}^{\infty}(\beta\alpha^n P_n(\cos\gamma)+\alpha\beta^n P_n(-\cos\gamma))l^n(1-\sigma)^n=$$

$$=\frac{1}{l^2}+\alpha\beta\sum_{n=2}^{\infty}[\alpha^{n-1}-(-\beta)^{n-1}]P_n(\cos\gamma)(1-\sigma)^n l^{n-2}$$

или без учета аддитивной постоянной

$$U(\sigma, \varphi, \nu) = \alpha\beta(1-\sigma)^2 P_2(\cos\gamma) + l\alpha\beta(\alpha-\beta)(1-\sigma)^3 P_3(\cos\gamma) + \ldots =$$

$$=\frac{\alpha\beta}{2}(1-\sigma)^2(3\cos^2\nu\cos^2\varphi-1)+$$

$$+\,l\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{2}(1-\sigma)^3(5\cos^3\nu\cos^3\varphi-3)+\ldots=$$

$$=\frac{\alpha\beta}{2}(1-2\sigma+\sigma^2)\left[3\left(1-\frac{1}{2}\nu^2+\ldots\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\varphi^2+\ldots\right)^2-1\right]+$$

$$+\,l\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{2}(1-3\sigma+3\sigma^2-\ldots)\times$$

$$\times\left[5\left(1-\frac{1}{2}\nu^2+\ldots\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\varphi^2+\ldots\right)^3-3\right]=$$

$$=\frac{\alpha\beta}{2}(1-2\sigma+\sigma^2)[3(1-\nu^2+\ldots)(1-\varphi^2+\ldots)-1]+$$

$$+\,l\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{2}(1-3\sigma+3\sigma^2-\ldots)\times$$

$$\times\left[5\left(1-\frac{3}{2}\nu^2+\ldots\right)^3\left(1-\frac{3}{2}\varphi^2+\ldots\right)^3-3\right]=$$

$$=\frac{\alpha\beta}{2}(1-2\sigma+\sigma^2)(2-3\nu^2-3\varphi^2+\ldots)+$$

$$+\,l\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{2}(1-3\sigma+3\sigma^2-\ldots)\left(2-\frac{15}{2}\nu^2-\frac{15}{2}\varphi^2+\ldots\right)=$$

$$=\alpha\beta[1+l(\alpha-\beta)]-\alpha\beta[2+3l(\alpha-\beta)]\sigma+\alpha\beta[1+3l(\alpha-\beta)]\sigma^2-$$

$$-\alpha\beta\left[\frac{3}{2}+\frac{15}{4}l(\alpha-\beta)\right]\nu^2-\alpha\beta\left[\frac{3}{2}+\frac{15}{4}l(\alpha-\beta)\right]\varphi^2+\ldots$$

Отбрасывая здесь члены нулевой степени, получим следующие выражения для однородных форм степенного разложения функции Гамильтона

$$K_1=3\alpha\beta[1+l(\alpha-\beta)]\sigma$$

$$K_2=\alpha\beta\left[\frac{1}{2}-3l(\alpha-\beta)\right]\sigma^2+2\sigma y_3+\alpha\beta\left[2+\frac{15}{4}l(\alpha-\beta)\right]x_2^2+$$

$$+\,\alpha\beta\left[\frac{3}{2}+\frac{15}{4}l(\alpha-\beta)\right]x_3^2+\frac{1}{2\alpha\beta}y_1^2+\frac{1}{2\alpha\beta}y_2^2+\frac{1}{2\alpha\beta}y_3^2$$

3. Анализ устойчивости. Для решения задачи об устойчивости достаточно убедиться в положительной определенности функции $F(\mathbf{x},\mathbf{y})=K_1(x_1)+K_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$. В этом случае гамильтониан $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ будет также положительно определен и будут выполняться достаточные условия устойчивости (теорема Ляпунова с функцией Ляпунова $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$). Заметим, что несмотря на негладкость задачи при $x_1=0$ функция полной энергии $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ является интегралом и обеспечивает устойчивость положения равновесия. Заметим также, что результат об устойчивости остается справедливым и при пластическом ударе, когда коэффициент восстановления меньше единицы.

Положительную определенность $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно проверить перейдя от переменных $\sigma, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ к переменным $x_1', x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ по формуле $\sigma = x_1'^2$. В этом случае в $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно выделить квадратичные по новым переменным члены наинизшей степени

$$F_2 = 3\alpha\beta[1+3l(\alpha-\beta)]x_1'^2 + \alpha\beta\left[2+\frac{15}{4}l(\alpha-\beta)\right]x_2^2 +$$

$$+\alpha\beta\left[\frac{3}{2}+\frac{15}{4}l(\alpha-\beta)\right]x_3^2 + \frac{1}{2\alpha\beta}y_1^2 + \frac{1}{2\alpha\beta}y_2^2 + \frac{1}{2\alpha\beta}y_3^2$$

Как видно, функция F_2, $(x_1', x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ в силу малости параметра l является положительно определенной квадратичной формой. Следовательно, функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также положительно определена, а, значит, такова же и функция $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Задача об устойчивости решена. Заметим, что функция K неодинаково быстро убывает к нулю по различным переменным. Окрестность положительной определенности сильно "вытянута" по координате x_1.

Ясно, что устойчивость не будет нарушена, если коэффициент восстановления при ударе будет меньше единицы. В этом случае просто амплитуда колебаний вблизи связи будет уменьшаться и движение системы все больше будет походить на движение сферического маятника, на которое будет накладываться гаснущее "дребезжание" ударных взаимодействий.

В заключение заметим, что аналогичного результата можно достичь, используя теорему об устойчивости в системах с неудерживающими связями [4]. Для этого при переходе во вращающуюся орбитальную систему координат необходимо рассмотреть приведенный потенциал $U^*(\sigma, \varphi, \nu) = T_0(\sigma, \varphi) + U(\sigma, \varphi, \nu)$, где T_0 – форма нулевой степени, входящая в выражение для кинетической энергии. Эту функцию легко вычислить

$$T_0(\sigma, \varphi) = \frac{\alpha\beta}{2}r^2\cos^2\varphi = \frac{\alpha\beta}{2}(1-\sigma)^2\left(1-\frac{1}{2}\varphi^2+\ldots\right)^2 =$$

$$= \frac{\alpha\beta}{2}(1-2\sigma+\sigma^2)(1-\varphi^2+\ldots) = \frac{\alpha\beta}{2} - \alpha\beta\sigma + \frac{\alpha\beta}{2}\sigma^2 - \frac{\alpha\beta}{2}\varphi^2 + \ldots$$

Поэтому из выражения для приведенного потенциала в окрестности положения равновесия

$$U^*(\sigma, \varphi, \nu) = \alpha\beta\left[\frac{3}{2}+l(\alpha-\beta)\right] - \alpha\beta[3+3l(\alpha-\beta)]\sigma + \alpha\beta\left[\frac{3}{2}+3l(\alpha-\beta)\right]\sigma^2 -$$

$$-\alpha\beta\left[\frac{3}{2}+\frac{15}{4}l(\alpha-\beta)\right]\nu^2 - \alpha\beta\left[2+\frac{15}{4}l(\alpha-\beta)\right]\varphi^2 + \ldots$$

переходя к уже рассмотренной переменной x_1', можно сделать вывод о строгом максимуме у функции $U^*(\sigma, \varphi, \nu)$. Следовательно, по теореме из [4] это положение устойчиво по Ляпунову.

Автор благодарит А.А. Бурова и А.П. Иванова за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00196, НШ-200.2003.1) и Минобразования РФ(Т02-14.0-1054).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 781–788.
2. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
3. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1977. 432 с.
4. *Иванов А.П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725–732.

Москва

Поступила в редакцию
12.12.2001