

УДК 539.3

© 2004 г. И.Т. ДЕНИСЮК

**ЭФФЕКТ СВЯЗНОСТИ ТЕПЛОВЫХ И УПРУГИХ ПОЛЕЙ
ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ЛИНИИ РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ**

Наличие особенностей на границах негладких включений как в двумерном [1–4], так и в трехмерном случае [5–8] приводит к существенной концентрации напряжений при действии силовых или тепловых факторов. В данной статье устанавливаются локальные динамические тепловые и упругие поля вблизи особых линий распространяющейся полости (трещины) и изучается их взаимовлияние (связность).

1. Постановка задачи. Пусть в изотропном термоупругом теле содержится полость, ограниченная поверхностью $S = S_1 \cup S_2$. Пересечение гладких поверхностей S_1, S_2 определяет гладкую особую линию L , являющуюся множеством угловых точек. Натянем на линию L гладкую поверхность S_0 , на которой введем ортогональные криволинейные координаты u, v так, что при $v = v_0 = \text{const}$ определяется особая линия. При этом полагаем, что в результате параметризации $u = s$, где s – длина дуги особой линии, отсчитываемая от некоторой начальной точки [9]. Рассмотрим сопровождающий трехгранник поверхности S_0 в точке $M_0 \in S_0$ $\mathbf{nn}_1\mathbf{n}_2$, где \mathbf{n}_1 – касательный вектор к кривой L в M_0 . Точку M плоскости векторов \mathbf{n}, \mathbf{n}_2 определим полярным радиусом ρ и углом $\theta = \angle(M_0M, \mathbf{n}_2)$.

Переменные ρ, θ, s являются криволинейными ортогональными координатами, определяемые соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \rho(\cos\theta\mathbf{n}_2(s) + \sin\theta\mathbf{n}(s)) \tag{1.1}$$

где \mathbf{r}_0, \mathbf{r} – радиус-векторы точек M_0, M , с коэффициентами Ламе

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1 + \rho H_0, \quad H_0 = -(p \cos\theta + r_1 \sin\theta), \quad p = -|\mathbf{r}_s|_v / |\mathbf{r}_v|,$$

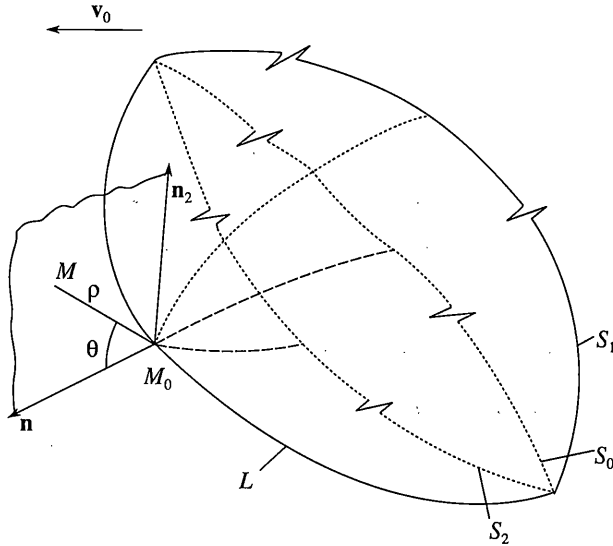
$$r_1 = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{ss}) / |\mathbf{r}_s|$$

Уравнение равновесия и теплопроводности [9]:

$$c_1^2 \text{grad div } \mathbf{u} - c_2^2 \text{rot rot } \mathbf{u} - a_4 \text{grad } T - \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = 0$$

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{u}) = 0$$

где \mathbf{u} – вектор перемещения; T – температурное поле; $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0$, $c_2^2 = \mu/\rho_0$ – скорости волн расширения и сдвига среды, $\lambda = vE/((1 + \nu)(1 - 2\nu))$, E, μ – модули упругости и сдвига; $c = (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{02}/\lambda_q$, $T_{02} = \text{const}$, $a_4 = (3\lambda + 2\mu)\alpha/\rho_0$; $\mathbf{a} = \lambda_q/c_q$, α, λ_q – коэффициенты температуропроводности, теплового расширения и теплопроводности; c_q –



Фиг. 1

удельная теплоемкость; ν – коэффициент Пуассона; ρ_0 – плотность материала среды, должны выполняться во всех точках матрицы, в том числе в точках особой линии

$$\lim(c_1^2 \text{grad div} \mathbf{u} - c_2^2 \text{rot rot} \mathbf{u} - a_4 \text{grad} T - \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2) = 0 \quad (1.2)$$

$$\lim \left[\nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \mathbf{u}) \right] = 0 \quad (1.3)$$

где пределы берутся при $M \rightarrow M_0, M_0 \in L$.

На границе тела S для тепловых потоков и температур выполняются граничные условия четвертого рода [11] (полость заполнена газом):

$$T_0 - T_1 = 0, \quad q_{\theta 0} - q_{\theta 1} = 0; \quad \sigma_{\theta 0} = 0, \quad \tau_{\rho \theta 0} = 0, \quad \tau_{\theta s 0} = 0$$

в точках особой линии

$$\lim(T_0 - T_1) = 0, \quad \lim(q_{\theta 0} - q_{\theta 1}) = 0 \quad (1.4)$$

$$\lim \sigma_{\theta 0} = 0, \quad \lim \tau_{\rho \theta 0} = 0, \quad \lim \tau_{\theta s 0} = 0 \quad (1.5)$$

где пределы берутся при $M \rightarrow M_0$ в плоскости, нормальной к особой линии, $q_{\theta i}$ – компонента вектора плотности теплового потока (значение индекса $i = 0$ в величинах отвечает матрице, а $i = 1$ – среды газа). Тело подвергнуто внешним динамическим силовым и тепловым воздействиям. Начальные условия не задаются, поскольку выполнение соотношений (1.2), (1.3), приводит, как показано ниже, к установившемуся режиму. Таким образом, необходимо найти решение уравнений (1.2), (1.3) при граничных условиях (1.4), (1.5) и исследовать их.

2. Локальные напряжения и смещения. Пусть распространение поверхности полости как жесткого целого определяется вектором $\mathbf{r}_0(t) = \{x_0(t), y_0(t), z_0(t)\}$ в неподвижной

системе координат $Oxyz$. Перейдем в уравнениях теплопроводности и термоупругости (1.2), (1.3) к подвижным координатам x_1, y_1, z_1 согласно формул

$$x = x_1 + x_0(t), \quad y = y_1 + y_0(t), \quad z = z_1 + z_0(t)$$

В результате будем иметь

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \left\{ c_1^2 \text{grad div } \mathbf{u} - c_2^2 \text{rot rot } \mathbf{u} - a_4 \text{grad } T - \right. \\ \left. - \left[(\mathbf{v}_0, \nabla)(\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{v}_0, \nabla) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} ((\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u}) + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right] \right\} = 0 \quad (2.1)$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \left\{ \nabla^2 T + \frac{1}{a} \left[(\text{grad } T, \mathbf{v}_0) - \frac{\partial T}{\partial t} \right] + c \left[(\text{grad div } \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) - \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{u}) \right] \right\} = 0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v}_0 = \left\{ \frac{\partial x_0}{\partial t}, \frac{\partial y_0}{\partial t}, \frac{\partial z_0}{\partial t} \right\}, \quad |\mathbf{v}_0| < c_1, \quad |\mathbf{v}_0| < c_2$$

где ∇ – оператор Гамильтона.

Температурное поле при смещении точек упругой среды в локальной области особой линии представляем в степенном классе относительно переменной ρ локальных координат (1.1), следуя данным работ [1,5]:

$$u_{x_1} = \rho^{m_1} A(\rho, \theta, s, t), \quad u_{y_1} = \rho^{m_2} B(\rho, \theta, s, t), \quad u_{z_1} = \rho^{m_5} C(\rho, \theta, s, t) \quad (2.3)$$

$$T = \rho^{m_6} D(\rho, \theta, s, t) + \rho^{m_7} D(\rho, \theta, s, t), \quad m_q = m_q(s, t) \quad (q = 1, 2, 5, 6, 7) \quad (2.4)$$

Записывая уравнения (2.1) в векторной форме с помощью соотношения

$$(\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u} = 0.5 \{ \text{rot} [\mathbf{u}, \mathbf{v}_0] + \text{grad} (\mathbf{u}, \mathbf{v}_0) - \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \text{div } \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}_0] - [\mathbf{v}_0, \text{rot } \mathbf{u}] \}$$

и переходя к координатам ρ, θ, s при учете (2.3), (2.4), получаем систему уравнений, которая совместима при $m_1 = m_2 = m$ и распадается на систему

$$d_0 A + d_1 \partial A / \partial \theta + a_2 \partial^2 A / \partial \theta^2 + b_0 B + b_1 \partial B / \partial \theta = 0 \\ c_0 A + c_3 \partial A / \partial \theta + d_0 B + d_1 \partial B / \partial \theta + d_2 \partial^2 B / \partial \theta^2 = 0 \quad (2.5)$$

и уравнение

$$g_2 \partial^2 C / \partial \theta^2 + g_1 \partial C / \partial \theta + g_0 C = 0 \quad (2.6)$$

$$a_0 = c_1^2 (m^2 - 1) - v_{01}^2 m (m - 1) + v_{02}^2 (m + 1), \quad a_1 = (2m - 1) v_{01} v_{02}, \quad a_2 = c_2^2 - v_{02}^2,$$

$$b_0 = v_{01} v_{02} (m - 1)$$

$$b_1 = c_1^2 (m - 1) - c_2^2 (m + 1) + 2v_{02}^2, \quad c_0 = (1 - m^2 - m) v_{01} v_{02},$$

$$c_3 = c_1^2 (m + 1) - c_2^2 (m - 1) - v_{02}^2 (m + 2)$$

$$d_0 = c_2^2(m^2 - 1) + v_{02}^2, \quad d_1 = v_{01}v_{02}(1 - 2m)$$

$$d_2 = c_1^2 - v_{02}^2, \quad g_2 = c_2^2 - v_{02}^2, \quad g_1 = v_{01}v_{02}(1 - 2m_5), \quad g_0 = c_2^2m_5^2 - v_{01}^2m_5(m_5 - 1)$$

где v_{01}, v_{02} – компоненты вектора скорости включения в координатах ρ, θ, s .

Аналогично поступая с уравнением (2.2) при учете (2.3), (2.4), находим, что оно удовлетворяется, если $m_7 = m$ и

$$m_6^2 D + \partial^2 D / \partial \theta^2 = 0 \quad (2.7)$$

$$m^2 E + \partial^2 E / \partial \theta^2 = -c[(m^2 - 1)v_{01}A + (m - 1)v_{01}\partial B / \partial \theta + v_{02}(m + 1)\partial A / \partial \theta + v_{02}\partial^2 B / \partial \theta^2] \quad (2.8)$$

Решение системы уравнений (2.5) таково:

$$A(\theta, s, t) = 2\text{Re}(C_{01}e^{\delta_1\theta} + C_{03}e^{\delta_3\theta}), \quad B(\theta, s, t) = 2\text{Re}(n_1C_{01}e^{\delta_1\theta} + n_3C_{03}e^{\delta_3\theta}) \quad (2.9)$$

$$n_q = b_{30}\delta_q^3 + b_{20}\delta_q^2 + b_{10}\delta_q + b_{00} \quad (q = 1, 3)$$

где $\delta_q = \alpha_q + i\beta_q$ – комплексные сопряженные корни характеристического уравнения

$$\delta^4 + d_{30}\delta^3 + d_{20}\delta^2 + d_{10}\delta + d_{00} = 0 \quad (2.10)$$

($b_{30}, b_{20}, b_{10}, b_{00}; \alpha_{30}, \alpha_{20}, \alpha_{10}, \alpha_{00}$ – величины, определяемые v_{01}, v_{02}, c_1, c_2).

Решение уравнения (2.6) имеет вид

$$C(\theta, s, t) = e^{\alpha_5\theta}(C_{51}\cos\beta_5\theta + C_{52}\sin\beta_5\theta)$$

$$\alpha_5 = 0.5v_{01}v_{02}(2m_5 - 1)(c_2^2 - v_{01}^2), \quad \beta_5 = 0.5\sqrt{|D_0|}/(c_2^2 - v_{01}^2) \quad (2.11)$$

$$|D_0| = 4[c_2^2 - (v_{01}^2 + v_{02}^2)]c_2^2m_5^2 + v_{01}^2(4m_5c_2^2 - v_{02}^2)$$

Функции $D(\theta, s, t), E(\theta, s, t)$ определяются из (2.7), (2.8):

$$D(\theta, s, t) = H_{01}\cos m_6\theta + H_{02}\sin m_6\theta \quad (2.12)$$

$$E(\theta, s, t) = G_{01}\cos m_6\theta + G_{02}\sin m_6\theta + 2\text{Re}(h_{01}\exp(\delta_1\theta) + h_{03}\exp(\delta_3\theta)) \quad (2.13)$$

$$h_{01} = C_{01}g_1/(m^2 + \delta_1^2), \quad h_{03} = C_{03}g_3/(m^2 + \delta_3^2),$$

$$g_1 = -c(v_{01}(m^2 - 1) + v_{01}(m - 1)n_1\delta_1 + v_{02}(m + 1)\delta_1 + v_{02}n_1\delta_1^2),$$

$$g_3 = -c(v_{01}(m^2 - 1) + v_{01}(m - 1)n_3\delta_3 + v_{02}(m + 1)\delta_3 + v_{02}n_3\delta_3^2)$$

Удовлетворяя условиям на границе полости (1.5) с помощью (2.3), (2.9), (2.11), при значениях $\theta = \theta_1(s) = \arccos((\text{grad} f_1, \text{grad} f_0)/(\|\text{grad} f_1\|\|\text{grad} f_0\|))$ и $\theta = \theta_2(s) = \arccos((\text{grad} f_2, \text{grad} f_0)/(\|\text{grad} f_2\|\|\text{grad} f_0\|))$ в точке $M_0 \in L$ (уравнения $f_i(x, y, z) = 0$ определяют поверхности $S_i (i = \overline{0, 2})$), приходим к системе уравнений

$$g_{01}^0 \partial B_0 / \partial \theta + g_{02}^0 A_0 = 0, \quad h_{01}^0 B_0 + h_{02}^0 \partial A_0 / \partial \theta = 0 \quad (2.14)$$

$$\partial C_0 / \partial \theta = 0$$

$$g_{01}^0 = \mu_{00}/2, \quad g_{02}^0 = 1 + (m + 1)v_0/(1 - 2v_0), \quad h_{01}^0 = m - 1, \quad h_{02}^0 = 1 \quad (2.15)$$

Удовлетворяя (1.4), получаем уравнения

$$D_1 = D_0, \quad \gamma_0 \partial D_0 / \partial \theta = \partial D_1 / \partial \theta \quad (2.16)$$

$$E_1 = E_0, \quad \gamma_0 \partial E_0 / \partial \theta = \partial E_1 / \partial \theta, \quad \gamma_0 = \lambda_{q0} / \lambda_{q1} \quad (2.17)$$

Подставляя представления (2.9) в систему (2.14), приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_{01}, C_{03} . Приравнивая определитель такой системы нулю, получим характеристическое уравнение для определения порядка особенностей динамических напряжений

$$\begin{aligned} |\sin(i\omega(\delta_{01} - \delta_{03})/2)| &= n_2 |\sin(i\omega(\delta_{01} - \overline{\delta_{03}})/2)| \\ n_2 &= |h_{03}g_{01} - h_{01}g_{03}| / |\overline{h_{03}g_{01}} - \overline{h_{01}g_{03}}| \end{aligned} \quad (2.18)$$

и полное решение системы алгебраических уравнений.

На основе полученного решения системы и представлений (2.3) находим распределение локальных динамических напряжений и перемещений в окрестности особой линии распространяющейся полости в матрице

$$\begin{aligned} u_\rho^{(0)} &= \sum_{j=1}^1 (\rho^{m_j} M_{01j} K_j) + O(\rho^{m^*+1}), \quad u_\theta^{(0)} = \sum_{j=1}^1 (\rho^{m_j} M_{02j} K_j) + O(\rho^{m^*+1}) \\ \sigma_\rho^{(0)} &= 2\mu_0 \sum_{j=1}^1 \left(\rho^{m_j-1} \left(\frac{m_j + \nu_0(1-m_j)}{1-2\nu_0} M_{01j} + \frac{\nu_0}{1-2\nu_0} \frac{\partial M_{02j}}{\partial \theta} \right) K_j \right) + O(1) \\ \sigma_\theta^{(0)} &= 2\mu_0 \sum_{j=1}^1 \left(\rho^{m_j-1} \left(\frac{1-3\nu_0 + \nu_0 m_j}{1-2\nu_0} M_{01j} + \frac{1-\nu_0}{1-2\nu_0} \frac{\partial M_{02j}}{\partial \theta} \right) K_j \right) + O(1) \\ \tau_{\rho\theta}^{(0)} &= \mu_0 \sum_{j=1}^1 \left(\rho^{m_j-1} \left((m_j-1) M_{02j} + \frac{\partial M_{01j}}{\partial \theta} \right) K_j \right) + O(1) \\ M_{01j} &= 2\text{Re}(n_{01} P_{0j} \exp(\delta_{01}\theta) + n_{03} S_{0j} \exp(\delta_{03}\theta)), \\ M_{02j} &= 2\text{Re}(P_{0j} \exp(\delta_{01}\theta) + S_{0j} \exp(\delta_{03}\theta)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

где l – число корней $m_j \in (0, 1)$ сингулярного характеристического уравнения (2.18), P_{ij}, S_{ij} ($i = 0, 1$) – величины, зависящие от упругих постоянных матриц, K_j – коэффициенты интенсивности напряжений.

Удовлетворяя с помощью (2.11) системе (2.15), находим аналогично предыдущему характеристическое уравнение

$$\text{Im} \delta_5 = \pi / \omega, \quad \omega = \theta_1(s) - \theta_2(s) \quad (2.20)$$

где $\delta_5 = \alpha_5 + i\delta_5$ приведено в представлении (2.11).

Распределение соответствующих смещений и напряжений имеет вид

$$u_s^{(0)} = \sum_{j=1}^{l_5} (\rho^{m_{5j}} M_{3j} K_{3j}) + O(\rho^{m^*+1}), \quad \tau_{\rho s}^{(0)} = \mu_0 \sum_{j=1}^{l_5} (\rho^{m_{5j}-1} m_{5j} M_{03j} K_j) + O(1) \quad (2.21)$$

$$\tau_{\theta s}^{(0)} = \mu_0 \sum_{j=1}^{l_5} \left(\rho^{m_{5j}-1} \frac{\partial M_{3j}}{\partial \theta} K_{3j} \right) + O(1) \quad (2.22)$$

где $M_{3j} = 2\text{Re}(P_{3j} \exp(\delta_{50}\theta))$, l_5 – число корней $m_{5j} \in (0,1)$ уравнения (2.20). Отметим, что (2.19), (2.20) соответствуют плоской динамической задаче, а (2.22) динамической задаче продольного сдвига. Удовлетворяя системе (2.16) с помощью (2.12) аналогично вышеописанному находим

$$m_6 = \pi/\omega \quad (2.23)$$

Распределение температурного поля и компонент теплового потока на основе решений, найденных с помощью (2.4), (2.13), (2.17), имеет вид

$$\begin{aligned} T_0 &= \rho^{m_6} (\gamma_0 - 1)^{-1} (k_{41} \cos m_6 (\theta - \theta_1) + k_{42} \sin m_6 (\theta - \theta_1)) + \\ &+ \sum_{j=1}^l (\rho^{m_j} (G_{01j} \cos m_j \theta + G_{02j} \sin m_j \theta + F_{0j}(\theta))) + O(\rho^{m^*+1}) \\ q_{\rho 0} &= \lambda_0 m_6 \rho^{m_6-1} (\gamma_0 - 1)^{-1} (-k_{41} \cos m_6 (\theta - \theta_1) + k_{42} \sin m_6 (\theta - \theta_1)) - \\ &- \lambda_0 \sum_{j=1}^l (m_j \rho^{m_j-1} (G_{01j} \cos m_j \theta + G_{02j} \sin m_j \theta + F_{0j}(\theta))) + O(\rho^{m^*+1}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} q_{\theta 0} &= \lambda_0 m_6 \rho^{m_6-1} (\gamma_0 - 1)^{-1} (-k_{41} \cos m_6 (\theta - \theta_1) + k_{42} \sin m_6 (\theta - \theta_1)) - \\ &- \lambda_0 \sum_{j=1}^l (m_j \rho^{m_j-1} (-G_{01j} \sin m_j \theta + G_{02j} \cos m_j \theta + \partial F_{0j}(\theta)/\partial \theta)) + O(1), \quad q_{s0} = O(1) \end{aligned}$$

$$F_{0j}(\theta) = 2\text{Re}(C_{01} \exp(\delta_{01}\theta)/(m_j^2 + \delta_{01}^2) + C_{02} \exp(\delta_{03}\theta)/(m_j^2 + \delta_{03}^2))$$

где $q_{\rho 0}$, $q_{\theta 0}$, q_{s0} – компоненты вектора плотности теплового потока; k_{41} , k_{42} – коэффициенты интенсивности плотности теплового потока; G_{01j} , G_{02j} определяются на основе (2.17).

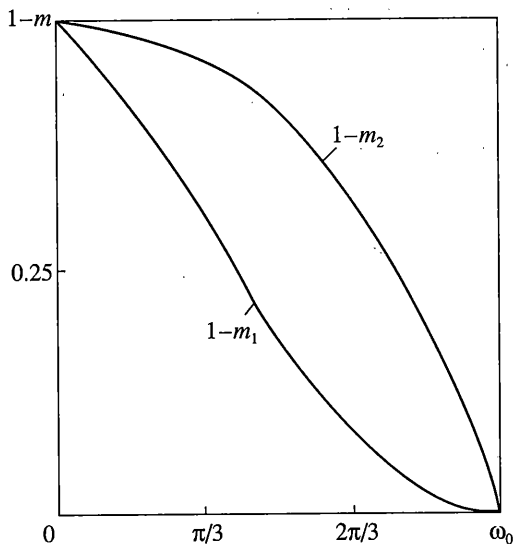
Полагая в (2.18), (2.21) $v_{01} = v_{02} = v_{03} = 0$, получаем характеристические уравнения, определяющее порядок особенностей термонапряжений вблизи особой линии неподвижной полости

$$\sin m\omega = \pm m \sin \omega, \quad m_5 = \pi/\omega \quad (2.25)$$

где $\omega(s) = \theta_1(s) - \theta_2(s)$, совпадающие с известными уравнениями для внешних силовых статических воздействий [5]. При этом распределение локальных термонапряжений и смещений (2.19), (2.22) переходит в распределение, совпадающее с распределением при внешних силовых статических воздействиях для полости, которое приведено в [5], где необходимо заменить θ_1 , θ_2 на $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$ соответственно. Распределение температурного поля и компонент теплового потока (2.24) при этом совпадает с распределением для стационарного случая [7].

Таким образом, в случае неподвижной полости (трещины) распределение локальных напряжений и смещений, температурного поля и теплового потока вблизи особой линии одинаково как при динамических, так и при статических нагрузках и стационарных тепловых воздействиях. В частном случае трещин ($\mu_1 = 0$, $\omega(s) = 2\pi$) и силовых динамических воздействиях этот результат согласуется с данными работ [12, 13].

3. Анализ результатов и выводы. Сингулярные составляющие плотности теплового потока, как следует из (2.24), состоят из двух частей, а именно, одна, имеющая порядок



Фиг. 2

$1 - m_6$, вызывается теплофизическими свойствами среды, другая, имеющая порядки $1 - m_j$ ($j = \overline{1, 1}$), обусловлена термоупругими свойствами среды и определяется коэффициентами интенсивности термонапряжений. В этом и состоит эффект связности тепловых и упругих полей на негладкости поверхности распространяющейся полости, то есть локальные деформации вблизи особой линии приводят к возмущению теплового поля. В случае неподвижной трещины такой эффект исчезает. Отметим, что выполнение уравнений равновесия (1.2) и теплопроводности (1.3) приводят к системе дифференциальных уравнений (2.14)–(2.17), не содержащих производных по переменной t .

Зависимость порядка сингулярности напряжений $1 - m_1$, $1 - m_2$ и вследствие эффекта связности компонент плотности теплового потока вблизи особой линии распространяющегося в полости от угла ее раствора ω_0 в нормальной к ней плоскости показано на фиг. 2 при относительных скоростях движения полости $\eta_1 = v_{01}/c_1 = 10^{-3}$, $\eta_2 = v_{02}/c_1 = 10^{-3}$.

Анализ уравнений (2.18), (2.20) показывает, что изменение величины угла раствора ω_0 влияет гораздо сильнее на интенсивность локальных напряжений и плотности теплового потока в сравнении с величиной относительных скоростей движения $\eta_1, \eta_2, \eta_3 = v_{01}/c_2, \eta_4 = v_{02}/c_2$ в диапазоне их изменения (0, 0.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисюк И.Т. Термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 148–155.
2. Денисюк И.Т. Напряжения изотропной пластинки с угловыми включениями // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 2. С. 76–84.
3. Денисюк И.Т. Термонапряжения в анизотропной пластине с кутковыми включениями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1999. Т. 35. № 3. С. 59–68.
4. Денисюк И.Т. Одна модель тонких упругих включений в изотропной пластинке // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 140–148.

5. Денисюк И.Т. Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 64–70.
6. Денисюк І.Т. Напруження біля конічних та пірамідальних включень // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2000. Т. 36. № 2. С. 16–20.
7. Денисюк І.Т. Термонапруження біля вершини кутового многогранного включення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2001. Т. 37. № 6. С. 41–47.
8. Денисюк И.Т. Напряжения вблизи конической точки поверхности раздела сред // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 3. С. 68–77.
9. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958. 244 с.
10. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
11. Лыков А.В. Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 479 с.
12. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
13. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Луцк

Поступила в редакцию
12.11.2001