МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. М.В. СОРОКИН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Рассматривается решение задач линейной теории упругости методом блуждания по границе. Дается обобщение этого метода на общий случай анизотропии, основанное на численном построении фундаментального решения уравнений статики. Ранее метод применялся при решении задач для изотропной среды и показал ряд преимуществ перед детерминированными разностными и вариационными методами.

При решении задач линейной теории упругости могут быть применены методы Монте-Карло, которые имеют ряд преимуществ перед детерминированными разностными и вариационными методами. Методы Монте-Карло, как правило, являются автоматически распараллеленными. Решение задачи ищется не во всей области, а только в интересующих нас точках, что существенно влияет на объем используемой памяти. Зависимость требуемой памяти ЭВМ от размерности задачи, как правило, близка к линейной. Кроме того, погрешность метода оценивается в ходе вычислений без существенных дополнительных затрат.

Однако методы Монте-Карло не позволяют добиться очень высокой точности, так как их трудоемкость для достижения погрешности ε имеет, как правило, порядок $O(\varepsilon^{-2})$. Поэтому эти методы применимы, когда требуемая точность – несколько процентов.

Можно выделить два основных метода, применяемых для решения задач линейной теории упругости.

Метод блуждания по сферам связан с использованием теорем о среднем и формул Грина для стандартных областей, например шара. В [1–3] этот метод применен к решению задач линейной теории упругости для изотропной однородной среды.

Метод блуждания по границе опирается на интегральные уравнения линейной теории упругости. Для изотропной однородной среды метод был изложен в [3–5]. Ниже рассматривается обобщение этого метода на случай анизотропной среды. Оно связано с построением фундаментального решения для анизотропной среды. В частном случае трансверсальной изотропии это решение может быть получено аналитически [6, 7]. В общем случае анизотропии фундаментальное решение может быть построено численно [6, 8].

Рассмотрим уравнения статики ортотропной упругой среды [7]. Закон Гука при ортотропии имеет вид

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{yy} = c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{23}\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{zz} = c_{13}\varepsilon_{xx} + c_{23}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{yz} = 2c_{44}\varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{xz} = 2c_{55}\varepsilon_{xz}, \quad \sigma_{xy} = 2c_{66}\varepsilon_{xy}$$

Уравнения статики в перемещениях при отсутствии массовых сил записываются следующим образом:

$$c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c_{55}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} = 0$$

$$(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(c_{23}+c_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$(c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+(c_{23}+c_{44})\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+c_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+c_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Для трансверсально-изотропной упругой среды на материальные константы накладываются ограничения

$$c_{44} = c_{55},\quad c_{23} = c_{13},\quad c_{12} = c_{11}-2c_{66},\quad c_{22} = c_{11} \tag{2}$$

При выполнении условий

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) = \mu \tag{3}$$

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda+2\mu,\quad c_{23} = c_{13} = c_{12} = \lambda \tag{4}$$

системы (1) переходит в систему уравнений Ламе для изотропной среды.

В [7] аналитически построено фундаментальное решение для трансверсально-изотропной упругой среды. Компоненты Γ_{ij} этого решения равны

$$4\pi\Gamma_{11}(x,y,z) = \frac{a_1}{c_{55}}\frac{1}{|x|_1}+\frac{a_3-a_1}{c_{55}(|x|_1+|x|_3)}-\frac{c_{11}a_3-c_{55}}{c_{11}c_{55}(|x|_2+|x|_3)}+$$

$$+\frac{(a_1-a_3)x^2(a_1|x|_3+a_3|x|_1)}{c_{55}(|x|_1+|x|_3)^2|x|_1|x|_3}+\frac{(c_{11}a_3-c_{55})x^2(a_2|x|_3+a_3|x|_2)}{c_{11}c_{55}(|x|_2+|x|_3)^2|x|_2|x|_3}$$

$$4\pi\Gamma_{12}(x,y,z) = \frac{(a_1-a_3)xy(a_1|x|_3+a_3|x|_1)}{c_{55}(|x|_1+|x|_3)^2|x|_1|x|_3}+\frac{(c_{11}a_3-c_{55})xy(a_2|x|_3+a_3|x|_2)}{c_{11}c_{55}(|x|_2+|x|_3)^2|x|_2|x|_3}$$

$$4\pi\Gamma_{22}(x,y,z) = \frac{a_1}{c_{55}}\frac{1}{|x|_1}+\frac{a_3-a_1}{c_{55}(|x|_1+|x|_3)}-\frac{c_{11}a_3-c_{55}}{c_{11}c_{55}(|x|_2+|x|_3)}+$$

$$+\frac{(a_1-a_3)y^2(a_1|x|_3+a_3|x|_1)}{c_{55}(|x|_1+|x|_3)^2|x|_1|x|_3}+\frac{(c_{11}a_3-c_{55})y^2(a_2|x|_3+a_3|x|_2)}{c_{11}c_{55}(|x|_2+|x|_3)^2|x|_2|x|_3}$$

$$4\pi\Gamma_{13}(x,y,z) = \frac{(c_{13}+c_{55})xz}{c_{11}c_{55}(|x|_2+|x|_3)|x|_2|x|_3}$$

$$4\pi\Gamma_{23}(x,y,z) = \frac{(c_{13}+c_{55})yz}{c_{11}c_{55}(|x|_2+|x|_3)|x|_2|x|_3}$$

$$4\pi\Gamma_{33}(x, y, z) = \frac{1}{c_{55}|x|_2} - \frac{(c_{11}a_3 - c_{55})(x^2 + y^2)}{c_{11}c_{55}(|x|_2 + |x|_3)|x|_2|x|_3}, \quad a_1 = \frac{c_{44}}{c_{66}}$$

$$|x|_k^2 = a_k(x^2 + y^2) + z^2$$

где a_2 и a_3 являются корнями квадратного уравнения

$$c_{11}c_{55}a^2 + (c_{13}^2 + 2c_{13}c_{55} - c_{11}c_{33})a + c_{33}c_{55} = 0$$

Каждый столбец матрицы Γ_{ij} является решением системы (1) при условиях (2) в $R^3\backslash\{0\}$. Компоненты Γ_{ij} обращаются в бесконечность только в точке (0, 0, 0), причем $|\Gamma_{ij}| \le C/r$. Если верны условия (3), (4), то Γ_{ij} совпадает с матрицей фундаментальных решений Кельвина.

В общем случае анизотропии фундаментальное решение строится численно. Рассмотрим систему уравнений равновесия для анизотропной среды под действием сосредоточенной силы

$$C_{ijkl}u_{k,lj}(x_1, x_2, x_3) = -p_i\delta(x_1, x_2, x_3) \tag{5}$$

Применим к (5) прямое преобразование Фурье по всем координатам: $\bar{x}_j\bar{x}_l C_{ijkl}\bar{u}_k = p_i$. Введем обозначение

$$C_{ik} \equiv C_{ijkl}\bar{x}_j\bar{x}_l \tag{6}$$

и $\alpha_{ik} \equiv C_{ik}^{-1}$ для обратной матрицы. Тогда

$$\bar{u}_i = \alpha_{ij}p_j \tag{7}$$

Рассмотрим единичный вектор ω, такой что

$$\bar{x}_i = \bar{r}\omega_i, \quad 0 \le \bar{r} < \infty$$

В силу однородности матрицы α_{ij} будем иметь $\alpha_{ij}(\bar{x}) = \alpha_{ij}(\omega)/\bar{r}^2$. Тогда из (7) следует

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{R^3}\alpha_{ij}(\bar{x})p_j\exp(ix_s\bar{x}_s)d\bar{V}$$

Так как $u_i(x)$ – четная функция, то остается только обратное косинус-преобразование Фурье. Учитывая, что $d\bar{V} = d\bar{\Omega}\bar{r}^2d\bar{r}$ и интегрируя по $\bar{r}$ от 0 до R, получим

$$u_i(\mathbf{x}) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{8\pi^3}\int_{\Omega}\bar{u}_i(\omega)\frac{\sin(R\omega_s x_s)}{\omega_q x_q}d\bar{\Omega}$$

Это выражение можно привести к окончательному виду

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2 r}\oint\bar{u}_i(\boldsymbol{\omega})ds$$

где интеграл берется по дуге единичной окружности, плоскость которой перпендикулярна $\mathbf{x}$, а центр совпадает с началом координат (r – длина вектора $\mathbf{x}$).

Таким образом, фундаментальное решение для общего случая анизотропии равно

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2 r}\oint \alpha_{ij}(\boldsymbol{\omega})ds \tag{8}$$

На основе данных фундаментальных решений задачи линейной теории упругости для анизотропной среды могут быть сведены к граничным интегральным уравнениям. Метод блуждания по границе может быть применен как к первой краевой задаче, когда граничными условиями являются перемещения, так и ко второй краевой задаче, когда на границе задан вектор напряжения. Ниже описывается решение методом Монте-Карло второй краевой задачи, так как непосредственно поле перемещений в случае малых деформаций часто не представляет практического интереса [9].

Пусть имеется область V с границей Σ, в которой решается внутренняя вторая краевая задача. Решение следует искать в виде потенциала простого слоя с неизвестной векторной плотностью $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} 2\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})d\Sigma(\mathbf{y}) \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\Gamma}$ – это матрица фундаментальных решений, задаваемая в общем случае формулой (8). Тогда для векторной плотности $\boldsymbol{\varphi}$ получим систему граничных интегральных уравнений 2-го рода [6, 7]:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) + \int_{\Sigma} 2\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}^{(z)}(\mathbf{z}-\mathbf{y})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})d\Sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{10}$$

где $\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ – точки, принадлежащие Σ, а $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ – это заданный вектор напряжения. Матрица $\mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}^{(z)}(\mathbf{z}-\mathbf{y})$ имеет компоненты

$$T\Gamma_{ij}^{(z)}(\mathbf{z}-\mathbf{y}) = C_{ipst}\Gamma_{js,\,t}(\mathbf{z}-\mathbf{y})n_p^{(z)}$$

где $n_p^{(z)}$ – компоненты вектора внешней нормали к границе области Σ в точке z, и дифференцирование производится по z.

Обозначим $2T\Gamma_{ij}^{(z)}(\mathbf{z}-\mathbf{y}) \equiv K_{ij}(\mathbf{z}-\mathbf{y})$. Тогда (10) перепишется в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) + \int_{\Sigma} \mathbf{K}(\mathbf{z}-\mathbf{y})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})d\Sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{11}$$

Система интегральных уравнений (11) является сингулярной, это означает, что ядро интегрального оператора при $z \to y$ равно

$$K_{ij}(\mathbf{z}-\mathbf{y}) = O(|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^{-2}) \tag{12}$$

Следовательно, интеграл в (11) не существует в обычном смысле, а определяется равенством

$$\int_{\Sigma} \mathbf{K}(\mathbf{z}-\mathbf{y})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})d\Sigma(\mathbf{y}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma^{\varepsilon}} \mathbf{K}(\mathbf{z}-\mathbf{y})\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})d\Sigma(\mathbf{y}) \tag{13}$$

$$\Sigma^{\varepsilon} = \Sigma\backslash\{\mathbf{y} : |\mathbf{z}-\mathbf{y}| \le \varepsilon\}$$

Метод блуждания по границе заключается в построении некоторого функционала на последовательности случайных точек, называемой случайной траекторией, и вычислении моментов этого функционала, которые представляют собой решение задачи.

Фиксируем точку x внутри области V, в которой требуется найти напряженное состояние. Выберем плотность распределения первой случайной точки на границе в виде

$$p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) = |\cos(\mathbf{n}(\mathbf{y}_1), \hat{\mathbf{y}}_1 - \mathbf{x})|(4\pi m|\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}|^2)^{-1}$$

что соответствует равномерному распределению по углу видимости из точки $\mathbf{x}$. Здесь m – число пересечений луча, проведенного вдоль вектора $\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}$ из точки $\mathbf{x}$, с поверхностью Σ. Плотность распределения второй случайной точки положим равной

$$p(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = |\cos(\mathbf{n}(\mathbf{y}_2), \hat{\mathbf{y}}_2 - \mathbf{y}_1)|(2\pi m|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|^2)^{-1}$$

причем здесь m подсчитывается, исключая точку $\mathbf{y}_1$. Распределения следующих точек траектории задаются аналогично.

Построим функционал на случайной траектории $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \ldots$

$$\boldsymbol{\Psi}_i = \frac{2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)}{p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1)} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)}{p(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)} \cdots \frac{\mathbf{K}(\mathbf{y}_{i-1} - \mathbf{y}_i)}{p(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i)} \mathbf{f}(\mathbf{y}_i) \tag{14}$$

Тогда математическое ожидание этого случайного функционала будет равно

$$M(\boldsymbol{\Psi}_i) = \iint \cdots \int 2\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)\mathbf{K}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdots K(\mathbf{y}_{i-1} - \mathbf{y}_i)\mathbf{f}(\mathbf{y}_i) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 \cdots d\mathbf{y}_i$$

Таким образом, $(-1)^{i+1} M(\boldsymbol{\Psi}_i)$ равно i-му члену ряда Неймана для системы интегральных уравнений (11), подставленному в (9). Отсюда

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} M(\Psi_i) \tag{15}$$

если ряд Неймана сходится. В случае расходящегося ряда Неймана при наличии информации о характеристических числах интегрального оператора может быть применен один из методов аналитического продолжения резольвенты [3, 4]. При вычислениях математическое ожидание $M(\Psi_i)$ приближенно заменяется на среднее значение функционала на серии независимых случайных траекторий

$$M(\Psi_i) \approx \frac{1}{N} \sum_s \Psi_i^{(s)} \tag{16}$$

где N – количество построенных случайных траекторий.

Однако в случае сингулярного интегрального оператора (12), (13) такое определение функционала (14) требует, чтобы расстояние между соседними точками $|y_{i-1} - y_i|$ было строго больше некоторого положительного числа, иначе дисперсия оценки (16) стремится к ∞. Таким образом, при практических вычислениях получается смещенная оценка для $M(\Psi_i)$ с невысокой точностью. Точность оценки можно увеличить, воспользовавшись следующим свойством ядра интегрального оператора

$$\mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{y}) = -\mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{y}^*) + o(|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*|) \tag{17}$$

которое выполняется при $|\mathbf{z} - \mathbf{y}| \to 0$. Здесь $\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}^*$принадлежат Σ, $|\mathbf{z} - \mathbf{y}| = |\mathbf{z} - \mathbf{y}^*| + o(|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*|)$:

$$\mathbf{y}^* = \chi(\mathbf{y}) \tag{18}$$

есть некоторое однозначное отображение Σ на Σ, для которого верно (17). Например, если z – эллиптическая точка поверхности Σ, введем сферические координаты с началом в точке z, ось $\theta = 0$ направим вдоль внешней нормали в этой точке. Тогда $\mathbf{y} = (|\mathbf{z} - \mathbf{y}|, \theta, \varphi)$, а $\mathbf{y}^* = (d, \theta, \varphi + \pi)$, где d определяется из условия $\mathbf{y}^* \in \Sigma$. Если Σ не выпуклая поверхность, то в качестве точки $\mathbf{y}^*$ берется ближайшая к $\mathbf{y}$.

С помощью (18) построим новый функционал

$$\Psi_i = \frac{2\Gamma(\mathbf{x} - y_1)}{p_1(\mathbf{x}, y_1)}\xi_i(y_1)$$

$$\xi_i(y_1) = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{K}(y_1 - y_{21})}{p(y_1, y_{21})}\xi_{i-1}(y_{21}) + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{K}(y_1 - y_{22})}{p(y_1, y_{22})}\xi_{i-1}(y_{22}) \tag{19}$$

$$\xi_1(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})$$

Тогда y_{21} разыгрывается как обычно, а

$$y_{22} = \chi(y_{21}) \tag{20}$$

Для экономии времени вторую точку (20) можно использовать только тогда, когда расстояние $|y_1 - y_{21}|$ меньше некоторого положительного числа, а в остальных случаях считать $y_{22} = y_{21}$.

При решении краевой задачи теории упругости основной интерес представляет не вектор перемещения, а напряженное состояние в точке. Компоненты тензора напряжений выражаются через вектор перемещения

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}u_{k,l}(\mathbf{x}) \tag{21}$$

Представление (15) допускает дифференцирование по x, поэтому для оценки σ_{ij} надо в (14, 19) заменить Γ_{ks} на $C_{ijkl}\Gamma_{ks,l}$.

Погрешность метода блужданий по границе складывается из двух типов ошибок. Первый тип связан с необходимостью брать конечное число членов в представлении (15). Эта ошибка может быть оценена, если есть информация о характеристических числах интегрального оператора. При практических вычислениях на тестовых примерах устанавливается примерное число членов ряда, которые дают необходимую точность. Обычно для достижения точности в несколько процентов достаточно брать первые три-четыре члена ряда Неймана.

Второй тип ошибки связан с дисперсией оценки (16). По центральной предельной теореме

$$\sqrt{N}\frac{(\Phi - M(\Psi_i))}{\sqrt{D(\Psi_i)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \tag{22}$$

$$\Phi = \frac{1}{N}\sum_s \Psi_i^{(s)} \tag{23}$$

Известно, что дисперсию $D(\Psi_i)$ можно численно оценить так

$$D(\Psi_i) \simeq \frac{1}{N-1}\sum_s (\Psi_i^{(s)} - \Phi)^2 \tag{24}$$

Выражения (22)–(24) дают вероятностную оценку для Φ.

В заключении рассмотрим особенности численной реализации метода блуждания по границе для трансверсальноизотропной и ортотропной сред. В первом случае фундаментальное решение $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ и ядро интегрального оператора $\mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{y})$ строятся аналитически. В качестве тестовых рассматривались задача о шаре и задача о шаре с внутренней полостью. Граничные условия второго рода соответствовали полю перемещений типа $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\alpha x_1 x_3,\ \beta x_2 x_3,\ \gamma x_3^2)$ при $\alpha = \beta = 1$ константа γ определяется из уравнений статики (1) при условиях (2) $\gamma = -(c_{13} + c_{55})/c_{33}$. Соотношения (22)–(24) дают возможность оценить приближенное значение N. При удержании первых трех членов ряда Неймана для достижения статистической точности порядка 3–5 процентов с вероятностью 0.997 необходимо $N \sim 400000$.

Время выполнения вычислений при использовании соотношений для трансверсально-изотропной среды возрастает примерно в 1.6–1.8 раза по сравнению со случаем изотропии.

Для общего случая анизотропии фундаментальное решение строится численно (8). В качестве примера рассматривались задачи для ортотропной среды (1). В этом случае $\gamma = -(c_{13} + c_{23} + c_{44} + c_{55})/2c_{33}$. Для численного интегрирования (8) использовалась квадратурная формула Симпсона с числом узлов ~30. Ядро $\mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{y})$ строится с использованием разностных производных первого порядка. Так как вычисление $\mathbf{K}(\mathbf{z} - \mathbf{y})$ требует значительных затрат времени на каждом шаге, а число независимых случайных траекторий велико, имеет смысл вычислить значение ядра в M узловых точках поверхности Σ. Тогда в остальных точках поверхности ядро определяется при помощи интерполирования с существенной экономией времени.

Необходимое число случайных траекторий практически не возрастает $N \sim 400000$, в задаче о шаре с внутренней полостью $M \sim 10000$. Время выполнения программы возрастает примерно в 1.3 раза по сравнению с трансверсальной изотропией.

На материальные константы, входящие в закон Гука, накладываются ограничения в виде положительной определенности упругой энергии $C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$. При численной реализации невыполнение этого условия приводит к неустойчивому алгоритму, так как определитель матрицы (6) хотя бы в одной точке контура интегрирования оказывается равным нулю.

Выражаю благодарность за постановку задачи и обсуждение результатов работы Победре Б.Е.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. 366 с.
2. *Победря Б.Е., Чистяков П.В.* Решение пространственных задач теории упругости методом Монте-Карло // ПММ. 1988. Т. 2. С. 341–345.
3. *Сабельфельд К.К.* Методы Монте-Карло в краевых задачах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. 280 с.
4. *Sabelfeld K.K., Simonov N.A.* Random walks on boundary for solving PDEs. Utrecht: VSP, 1994. 137 p.
5. *Shia D., Hui C.Y.* A Monte-Carlo solution method for linear elasticity // Int. J. Solids and Struct. 2000. № 37. P. 6085–6105.
6. *Бурчуладзе Т.В., Гегелиа Т.Г.* Развитие метода потенциала в теории упругости. Тбилиси: Мецниереба, 1985. 226 с.
7. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 627 с.
8. *Победря Б.Е.* Задача в напряжениях для анизотропной среды // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 77–85.
9. *Победря Б.Е.* О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений // Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. Т. XL. № 4. С. 15–26.

Москва

Поступила в редакцию
13.01.2003