

## АНАЛИЗ БИФУРКАЦИЙ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА ВИБРОУДАРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА АМПЛИТУДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Виброударные системы рассматривались многими авторами в различных постановках, что объясняется важностью этих задач в инженерном деле. Теория виброударных систем рассматривается в [1, 2], а обзор результатов представлен [3]. Экспериментальное исследование виброударных осцилляторов содержится в [4, 5]. Предельные циклы и их бифуркации анализируются в [6]. Различные виды движения в виброударном осцилляторе на плоскости двух параметров исследуются в [7, 8]. Семейства субгармонических режимов и их бифуркации рассмотрены в [9, 10]. Моделированию динамики трансмиссий виброударными системами посвящены статьи [11, 12]. Отметим, что теория бифуркаций периодических движений является достаточно разработанной областью прикладной математики [13, 14]. Вместе с тем, анализ бифуркаций периодических движений при изменении двух параметров в виброударных системах практически не проводился. В [7, 8] исследована динамика виброударной системы при изменении двух параметров, однако в ней не рассматривались многозначности колебаний и их бифуркации. По-видимому, такая задача впервые рассматривается в данной статье.

Здесь предлагается метод анализа бифуркаций при изменении двух характерных параметров в виброударном осцилляторе. Основой этого метода является построение амплитудной поверхности, которая наглядно представляет бифуркации при изменении двух параметров. Благодаря использованию этого метода удалось обнаружить различные бифуркационные точки коразмерности два. Кроме того подробно исследованы бифуркации удвоения периода при изменении двух параметров системы. Автору не известны публикации, где амплитудные поверхности использовались для анализа виброударных систем. Отметим, что бифуркационные точки коразмерности два не исследовались для таких систем.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются вынужденные колебания в виброударной системе [1, 2], в которой материальная точка совершает движение в горизонтальном направлении под действием периодически изменяющейся внешней силы  $F \sin(\Omega t) + F_0$ . Движение происходит между двумя ограничениями, представляющими собой нелинейно-упругие элементы, реакции которых при взаимодействии с точкой имеют следующий вид:  $R(\xi) = \xi + c\xi^n$ , где  $\xi$  – деформация элемента. Такие упругие элементы описывают линейную упругую характеристику, пружину Герца и упругую характеристику осциллятора Дуффинга. На материальную точку действует сила вязкого сопротивления  $R = \beta v$ , где  $v$  – скорость точки. Используя обычные безразмерные параметры [1, 6], уравнение движения запишем в виде:

$$\omega^2 \ddot{x} + 2\alpha\omega \dot{x} + H(x) = f \sin(t)$$
$$H(x) = \begin{cases} x + c(x+1)^n, & x > -1 \\ -1, & -2\lambda - 1 < x < -1 \\ x + 2\lambda + (-1)^{n+1} c(x+2\lambda+1)^n, & x < -2\lambda - 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $x$  – обобщенная координата, описывающая колебания,  $\omega$  – частота возмущающего воздействия,  $\alpha$  – коэффициент вязкого сопротивления,  $2\lambda$  – расстояние между ограничениями. В дальнейших исследованиях воспользуемся переменными состояниями  $(y_1, y_2) = (\dot{x}, x)$ .

Приведем один технический пример такой задачи. Система (1.1) является простейшей моделью крутильных колебаний коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания. Тогда угол поворота коленчатого вала описывается координатой  $x$ . Функция  $H(x)$  описывает зазор, который всегда имеет место в силовой передаче двигателя. На коленчатый вал действует возмущающий момент.

Хорошо известно, что в системе (1.1) существуют периодические движения [4, 7]. Причем, если такие движения асимптотически устойчивы, то все соседние траектории с возрастанием времени приближаются к периодическому движению. Такие периодические движения в виброударном осцилляторе при изменении двух параметров исследуются в публикуемой статье. Такая задача имеет инженерные приложения, так как при работе систем, содержащих виброударные осцилляторы, часто меняются два характерных параметра. Например, при работе двигателя внутреннего сгорания может изменяться частота и амплитуда возмущающего воздействия и величина зазора. Рассматриваемая задача является также одним из приложений теории бифуркаций динамических систем.

Для анализа бифуркаций при изменении двух параметров можно поступить следующим образом. Исследовать периодические движения при изменении одного параметра и определить бифуркационные точки. Потом с помощью алгоритма продолжения определить бифуркационные линии на плоскости параметров. Однако, имея такую информацию, сложно проследить поведение динамической системы. Поэтому в статье вводится амплитудная поверхность, наглядно представляющая бифуркации. Амплитудная поверхность ранее использовалась в [15, 16] для анализа осциллятора Дуффинга–Релея и действия ветровой нагрузки на конструкцию.

**2. Метод амплитудных поверхностей.** Определим амплитудную поверхность зависимостью полуразмахов периодических движений  $s$  от  $\omega$  и  $f$ . Эту поверхность в пространстве  $(s, \omega, f) \in R^3$  можно представить некоторой функцией  $s = G(\omega, f)$ , алгоритм построения которой рассмотрен ниже.

Следуя [17], циклы системы (1.1) разделим на группы по значениям их мультипликаторов  $(\rho_1, \rho_2)$ : направленно неустойчивые циклы  $(\rho_1 > 1, 0 < \rho_2 < 1)$ ; обратно неустойчивые циклы  $(\rho_1 < -1, -1 < \rho_2 < 0)$ ; устойчивые циклы  $(|\rho_i| < 1 (i = 1, 2))$ . Известно, что циклы одного вида преобразуются в другие вследствие локальных бифуркаций. Отметим, что в системе (1.1) наблюдаются бифуркации удвоения периода и касательные бифуркации. Бифуркации удвоения периода определяются  $\rho_1 = -1$ , а касательные бифуркации –  $\rho_1 = 1$ . Амплитудная поверхность содержит бифуркационные линии удвоения периода. В следующем разделе будут показаны примеры таких линий. Как известно, вдоль этих линий соединяются три вида циклов: устойчивые циклы порядка  $N$ , обратно неустойчивые циклы того же порядка и устойчивые циклы порядка  $2N$ . Последние могут быть неустойчивыми [16]. Вдоль линий касательных бифуркаций устойчивые циклы порядка  $N$  соединяются с направленно неустойчивыми циклами того же порядка. Заметим, что бифуркационные линии соединяются в бифуркационных точках коразмерности два [13, 18].

Теперь изложим метод построения амплитудной поверхности. Пример такой поверхности показан в следующем разделе. Сначала рассчитываются амплитудно-частотные характеристики и определяются бифуркационные точки. Затем по найденным бифуркационным точкам рассчитаем бифуркационные линии в плоскости  $(\omega, f) \in R^2$ . Наконец, по данным о амплитудно-частотных характеристиках и бифуркационных линиях построим амплитудную поверхность. В соответствии с этим, для получения амплитудной поверхности необходимо располагать алгоритмом расчета амплитудно-

частотных характеристик и алгоритмом построения бифуркационных линий. Для расчета амплитудно-частотных характеристик воспользуемся методом, изложенным в [19], не останавливаясь на подробностях этого алгоритма. Рассмотрим метод расчета бифуркационных линий для системы (1.1). Решения уравнений (1.1) представим в виде  $y_i(\omega, f, y_{01}, y_{02}, t)$  ( $i = 1, 2$ ), где  $y_{0i}$  – начальные состояния системы. Тогда циклы порядка  $N$  удовлетворяют двум нелинейным уравнениям:

$$y_i(\omega, f, y_{01}, y_{02}, 2\pi N) - y_{0i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

Негиперболические циклы описываются уравнениями (2.1) и дополнительным уравнением

$$w(\omega, f, y_{01}, y_{02}) = \det \left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} - E\rho \right] = 0 \quad (2.2)$$

где  $[\partial(y_1, y_2)/\partial(y_{01}, y_{02})]$  – матрица Якоби,  $E$  – единичная матрица. Бифуркационную линию представим сеточной функцией  $(\omega_1, f_1), (\omega_2, f_2), \dots, (\omega_m, f_m)$ . Каждая точка этой функции является решением системы уравнений (2.1); (2.2). Поэтому для получения бифуркационной линии  $M$  раз решается система (2.1), (2.2). Далее остановимся на численном решении этой системы. Эта система решается относительно вектора  $V_1 = (\omega, y_{01}, y_{02})$  или  $V_2 = (f, y_{01}, y_{02})$ . Если вектором неизвестных является  $V_1$  или  $V_2$ , то перед решением уравнений задается  $f$  или  $\omega$ , соответственно. Переменная, которая задается, называется параметризующей [19]. Выбор параметризующей переменной производится перед расчетом каждой точки бифуркационной линии по методу, изложенному в [19]. Для решения уравнений (2.1), (2.2) воспользуемся методом Ньютона. Остановимся на способе расчета матрицы Якоби, используемой в методе Ньютона. Для краткости записи введем обозначения:  $\pi_1 = \omega, \pi_2 = f$ , тогда матрицу Якоби запишем в следующем виде:

$$\left[ \frac{\partial(y_1 - y_{01}, y_2 - y_{02}, w)}{\partial(y_{01}, y_{02}, \pi_i)} \right] = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} - E P & \\ Q & R \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial y_1}{\partial y_{01}} - 1 & \frac{\partial y_1}{\partial y_{02}} & \frac{\partial y_1}{\partial \pi_i} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_{01}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{02}} - 1 & \frac{\partial y_2}{\partial \pi_i} \\ \frac{\partial w}{\partial y_{01}} & \frac{\partial w}{\partial y_{02}} & \frac{\partial w}{\partial \pi_i} \end{array} \right\| \quad (2.3)$$

Так как применение конечно-разностных формул для определения производных в (2.3) приводит к плохой сходимости метода Ньютона, то воспользуемся следующим способом определения элементов матрицы Якоби.

Хорошо известно, что подматрица  $[\partial(y_1, y_2)/\partial(y_{01}, y_{02})]$  является решением системы дифференциальных уравнений в вариациях:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \right] = [V(t)] \left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \right] \quad (2.4)$$

$$\left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \right]_{t=0} = E, \quad [V(t)] = \left\| \begin{array}{cc} -2\alpha & -\frac{1}{\omega^2} \frac{dH}{dy_2} \\ \omega & 0 \end{array} \right\|$$

Для определения подматрицы  $[P]$  составим две системы дифференциальных уравнений относительно векторов  $[\partial y_1/\partial \pi_i, \partial y_2/\partial \pi_i]$ ,  $i = 1$  или  $2$ . Эти системы получаются

дифференцированием (1.1) по  $\pi$ . Представим их в матричной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \omega} & \frac{\partial y_1}{\partial f} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \omega} & \frac{\partial y_2}{\partial f} \end{vmatrix} = [V(t)] \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \omega} & \frac{\partial y_1}{\partial f} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \omega} & \frac{\partial y_2}{\partial f} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{2\alpha}{\omega^2} y_1 + \frac{2}{\omega^3} H(y_2) - \frac{2f}{\omega^3} \sin(t) & \frac{1}{\omega^2} \sin(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

Решения уравнений (2.5) с нулевыми начальными условиями при  $t = 2\pi N$  являются элементами подматрицы  $[P]$  из (2.3).

Наконец, рассмотрим способ определения подматриц  $[Q]$  и  $[R]$ , входящих в (2.3). Определим  $\partial W/\partial y_{0v}$ :

$$\frac{\partial W}{\partial y_{0v}} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{01} \partial y_{0v}} & \frac{\partial y_1}{\partial y_{02}} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{01} \partial y_{0v}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{02}} - \rho \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y_{01}} - \rho & \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{02} \partial y_{0v}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_{01}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{02} \partial y_{0v}} \end{vmatrix} \quad (v = 1, 2) \quad (2.6)$$

Формула для  $\partial W/\partial \pi_i$  ( $i = 1, 2$ ) имеет аналогичный вид. Теперь рассмотрим метод определения вторых производных, входящих в (2.6). Получим системы дифференциальных уравнений относительно векторов, состоящих из этих вторых производных. Эти системы дифференциальных уравнений получаются дифференцированием (2.4) по  $y_{0\mu}$  и  $\pi_i$ . В матричном виде эти системы принимают такой вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega \partial y_{0v}} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial \omega \partial y_{0v}} \end{vmatrix} = [V(t)] \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega \partial y_{0v}} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial \omega \partial y_{0v}} \end{vmatrix} + \frac{1}{\omega^2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} -H'' \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} & -H'' \frac{\partial y_2}{\partial f} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} & 2\alpha \frac{\partial y_1}{\partial y_{0v}} + \frac{2}{\omega} H' \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} - H'' \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Уравнения (2.7) имеют нулевые начальные условия. Рассмотрим способ решения уравнений (2.7). Функцию  $d^2 H/dy_2^2$  представим в следующем виде:

$$\frac{d^2 H}{dy_2^2} = \sigma(t) + q(y_2), \quad \sigma(t) = \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\delta(t - \tau_j)}{|y_1(\tau_j)|} - \sum_{v=1}^{p_2} \frac{\delta(t - T_v)}{|y_1(T_v)|} \quad (2.8)$$

где  $q(y_2)$  – нелинейная функция,  $\delta$  – дельта-функция;  $\tau_j$  ( $j = \overline{1, p_1}$ );  $T_v$  ( $v = \overline{1, p_2}$ ) – значения  $t$ , определяющиеся из нелинейных уравнений

$$y_2(\tau_j) = -1, \quad y_2(T_v) = -1 - 2\lambda \quad (2.9)$$

Представим решения уравнений (2.7) в виде

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} = u_{\mu v}^{(i)} + v_{\mu v}^{(i)}, \quad \frac{\partial^2 y_i}{\partial f \partial y_{0v}} = w_v^{(i)} + p_v^{(i)}, \quad \frac{\partial^2 y_i}{\partial \omega \partial y_{0v}} = r_v^{(i)} + s_v^{(i)} \quad (2.10)$$

$(i = 1, 2, \mu = 1, 2, v = 1, 2)$

Правые части соотношений (2.10) удовлетворяют матричным уравнениям

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_{\mu\nu}^{(1)} & w_{\nu}^{(1)} & r_{\nu}^{(1)} \\ u_{\mu\nu}^{(2)} & w_{\nu}^{(2)} & r_{\nu}^{(2)} \end{vmatrix} = [V(t)] \begin{vmatrix} u_{\mu\nu}^{(1)} & w_{\nu}^{(1)} & r_{\nu}^{(1)} \\ u_{\mu\nu}^{(2)} & w_{\nu}^{(2)} & r_{\nu}^{(2)} \end{vmatrix} - \frac{\sigma(t)}{\omega^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} & \frac{\partial y_2}{\partial f} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} v_{\mu\nu}^{(1)} & p_{\nu}^{(1)} & s_{\nu}^{(1)} \\ v_{\mu\nu}^{(2)} & p_{\nu}^{(2)} & s_{\nu}^{(2)} \end{vmatrix} &= [V(t)] \begin{vmatrix} v_{\mu\nu}^{(1)} & p_{\nu}^{(1)} & s_{\nu}^{(1)} \\ v_{\mu\nu}^{(2)} & p_{\nu}^{(2)} & s_{\nu}^{(2)} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \frac{q(y_2)}{\omega^2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} & \frac{q(y_2)}{\omega^2} \frac{\partial y_2}{\partial f} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{2\alpha}{\omega^2} \frac{\partial y_1}{\partial y_{0\nu}} + \frac{2}{\omega^3} \frac{dH}{dy_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} - \frac{q(y_2)}{\omega^2} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Линейные дифференциальные уравнения (2.11) имеют полуаналитические решения благодаря дельта-функциям, входящим в эти уравнения. Запишем решения уравнений (2.11), используя метод вариаций произвольных постоянных и формулу Остроградского–Лиувилля:

$$u_{\mu\nu}^{(i)}(2\pi N) = \sum_{k=1}^{p_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=T_k} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} \Big|_{t=T_k} \Delta_i(T_k) - \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=\tau_j} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} \Big|_{t=\tau_j} \Delta_i(\tau_j) \quad (2.13)$$

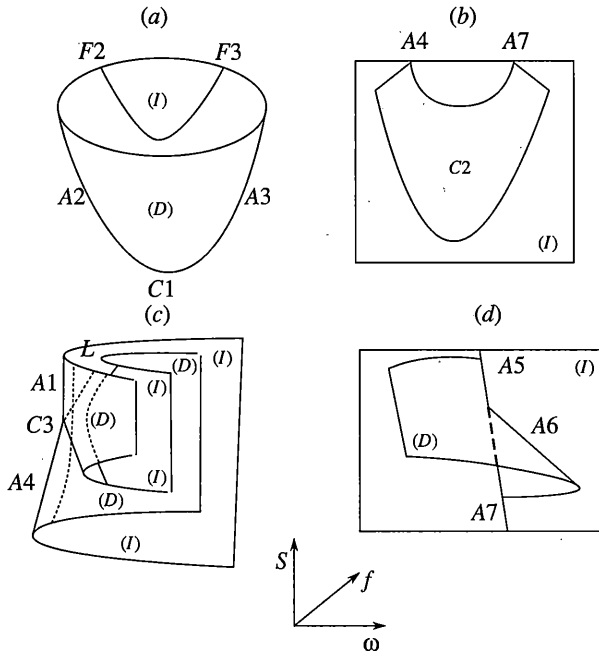
$$w_{\nu}^{(i)}(2\pi N) = \sum_{k=1}^{p_2} \frac{\partial y_2}{\partial f} \Big|_{t=T_k} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=T_k} \Delta_i(T_k) - \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial y_2}{\partial f} \Big|_{t=\tau_j} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=\tau_j} \Delta_i(\tau_j) \quad (2.14)$$

$$r_{\nu}^{(i)}(2\pi N) = \sum_{k=1}^{p_2} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \Big|_{t=T_k} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=T_k} \Delta_i(T_k) - \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \Big|_{t=\tau_j} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=\tau_j} \Delta_i(\tau_j) \quad (2.15)$$

$$\Delta_i(z) = \frac{\exp(2\alpha z/\omega)}{\omega^2 |y_1(z)|} \left( \frac{\partial y_i}{\partial y_{01}} \Big|_{t=2\pi N} \frac{\partial y_2}{\partial y_{02}} \Big|_{t=z} - \frac{\partial y_i}{\partial y_{02}} \Big|_{t=2\pi N} \frac{\partial y_2}{\partial y_{01}} \Big|_{t=z} \right) \quad (2.16)$$

Формулы (2.3)–(2.16) позволяют численно определить матрицу Якоби для того чтобы методом Ньютона решить систему (2.1), (2.2). Далее представлен анализ бифуркационного поведения рассмотренной системы со следующими параметрами:  $c = 0$ ,  $\alpha = 0.005$ ,  $\lambda = 5$ . В этом анализе использованы алгоритмы, рассмотренные выше.

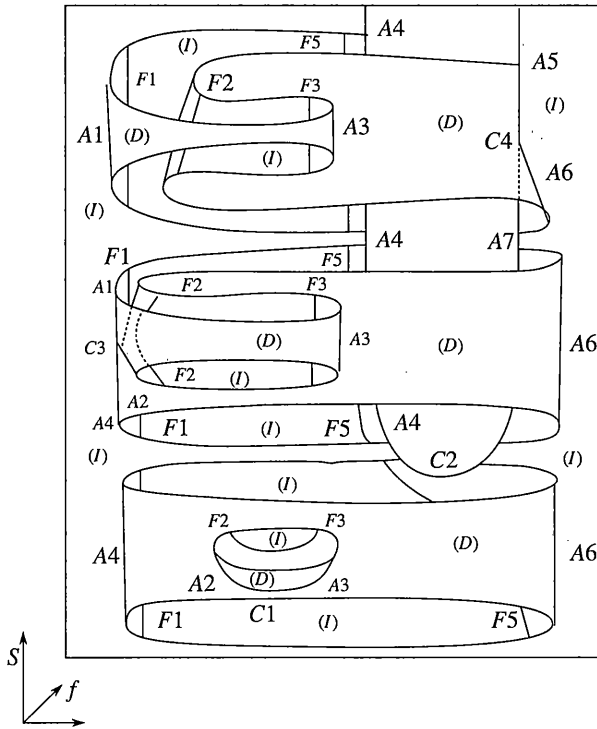
**3. Бифуркационное поведение системы.** Бифуркационные точки коразмерности два образуются в результате соединения бифуркационных линий [13]. Амплитудные поверхности около бифуркационных точек коразмерности два качественно показаны на фиг. 1. На этой фигуре они эскизно изображаются в трехмерном пространстве  $(s, f, \omega) \in R^3$ . Эти точки были получены в результате численного анализа бифуркаций удвоения периода в системе (1.1). Место этих бифуркационных точек на амплитудной поверхности рассматривается ниже. Из фиг. 1 видно, что амплитудная поверхность представляет собой совокупность листов, которые соединяются вдоль бифуркационных линий. Листы с направленно неустойчивыми циклами обозначаются буквой  $D$ , а листы с обратно неустойчивыми циклами буквой  $I$ . Листы с устойчивыми циклами не обозначаются какой-либо буквой.



Фиг. 1

Бифуркационная точка коразмерности два  $C_1$  образуется в результате соединения двух седло-узловых бифуркационных линий периодических движений второго порядка  $A_2$  и  $A_3$ . Рассмотрим сечение этой амплитудной поверхности при  $f = \text{const}$ . Это сечение является амплитудно-частотной характеристикой. Она имеет вид замкнутой петли. При уменьшении  $f$  величина этой петли уменьшается. В пределе эта петля стягивается в бифуркационную точку коразмерности два  $C_1$ . В бифуркационной точке коразмерности два  $C_2$  соединяются две бифуркационные линии удвоения периода  $A_4$  и  $A_7$ . Рассмотрим сечения амплитудной поверхности при  $f = \text{const}$ . Тогда наблюдаются две бифуркационные точки удвоения периода, в которых рождаются предельные циклы удвоенного периода. При уменьшении  $f$  эти две бифуркационные точки сближаются. В пределе точки  $A_4$  и  $A_7$  соединяются в  $C_2$ . В этом случае амплитудно-частотная характеристика состоит из трех ветвей, которые сливаются в точке  $C_2$ . Рассмотрим бифуркационную точку коразмерности два  $C_3$ . В этой точке соединяются четыре седло-узловых бифуркационных линии  $A_1, L, A_4, A_2$ . Предположим, что бифуркационная точка коразмерности два  $C_4$  наблюдается при  $f = f_{C_4}$ . При  $f > f_{C_4}$  в результате бифуркации удвоения периода  $A_5$  рождается направленно неустойчивое периодическое движение удвоенного периода, а при  $f < f_{C_4}$  в результате бифуркации удвоения периода  $A_7$  рождается устойчивое периодическое движение. Такое изменение бифуркации удвоения периода обусловлено тем, что в бифуркационной точке коразмерности два  $C_4$  соединяются две бифуркационные линии: удвоения периода и седло-узловая.

Рассмотренные бифуркационные точки коразмерности два были получены в результате численного анализа амплитудной поверхности, описывающей бифуркацию удвоения периода в системе (1.1). Эта поверхность показана на фиг. 2. Рассмотрим бифуркационное поведение, представленное на этой фигуре. В результате бифуркации удвоения периода  $A_4$  рождается устойчивый цикл. Этот цикл становится обратно не-



Фиг. 2

устойчивым благодаря бифуркации удвоения периода F5. При этом рождается периодическое движение учетверенного периода, которое здесь не рассматривается. Далее обратно неустойчивые циклы становятся устойчивыми в результате бифуркации удвоения периода F1. Такие устойчивые циклы испытывают седло-узловую бифуркацию A1. Остальные детали бифуркационного поведения можно проследить из фиг. 2.

Автор благодарит Морачковского О.К., Михлина Ю.В. и Маневича Л.И. за обсуждение проблем, представленных в этой статье.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352.
2. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 320.
3. Bishop S.R. Impact oscillator // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1994. V. 347. № 1683. P. 347–351.
4. Masri S.F., Mariamy Y.A., Anderson J.C. Dynamic response of a beam with a geometric nonlinearity // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1981. V. 48. № 2. P. 404–410.
5. Moon F.C., Shaw S.W. Chaotic vibration of a beam with non-linear boundary conditions // Intern. J. Non-Linear Mech. 1983. V. 18. № 6. P. 465–477.
6. Shaw S.W., Holmes P.J. A periodically forces piecewise linear oscillator // J. Sound and Vibration. 1983. V. 90. № 1. P. 129–155.
7. Peterka F., Vacik J. Transition to chaotic motion in mechanical systems with impacts // J. Sound and Vibration. 1992. V. 154. № 1. P. 95–115.
8. Peterka F., Kotera T. Four ways from periodic to chaotic motion in the impact oscillator // Machine Vibration. 1996. V. 5. № 2. P. 71–82.

9. Фейгин М.И. О рождении семейств субгармонических режимов в кусочно-непрерывной системе // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 810–818.
10. Фейгин М.И. О поведении динамических систем вблизи границ области существования периодических движений // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 628–636.
11. Аврамов К.В., Беломытцев А.С., Карабан В.Н. Области хаотических колебаний дискретных механических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 5. С. 81–88.
12. Аврамов К.В., Карабан В.Н. Особенности развития вынужденных колебаний нелинейных силовых передач // Изв. вузов. Машиностроение. 1994. № 4–6. С. 3–8.
13. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
14. Guckenheimer J.M., Holmes Ph. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. N.Y.: Springer, 1983. 453 p.
15. Qriouet M., Mira C. Fractional harmonic synchronization in the Duffing-Rayleigh differential equation // Intern. J. Bifurcat. and Chaos. 1994. V. 4. № 2. P. 411–426.
16. Holmes P.J., Lin Y.K. Deterministic stability analysis of a wind loaded structure // Trans. ASME J. of Appl. Mech. 1978. V. 45. № 1. P. 165–169.
17. Kawakami H. Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1984. V. 31. № 3. P. 248–260.
18. Allam R., Mira C. “Crossroad area-dissymmetrical spring area-symmetrical spring area” and “double crossroad area-double spring area” transitions // Intern. J. Bifurcat. and Chaos. 1993. V. 3. № 2. P. 429–435.
19. Беломытцев А.С., Карабан В.Н. Алгоритм решения нелинейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в области многозначности // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 7. С. 1099–1102.

Харьков

Поступила в редакцию  
13.12.2001