

УДК (539.3+624.07):534.1

© 2004 г. А.П. МАЛЫШЕВ

**СОВМЕСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТОТНО-НЕЗАВИСИМОГО  
И ВЯЗКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ**

Рассеяние энергии при колебаниях механических систем и сооружений часто определяется конструкционным демпфированием. Коэффициент поглощения для него не зависит от частоты, но существенно зависит от амплитуды. Подобное изменение коэффициента поглощения характерно и для потерь энергии в материале, когда уровень напряжений соизмерим с пределом усталости. При низких уровнях колебаний сильнее сказывается демпфирование с коэффициентом поглощения, зависящим от частоты, а влиянием амплитуды можно пренебречь. Для его учета часто оказываются пригодными вязкоупругие модели. В работе эти виды рассеяния энергии кратко именуется частотно-независимым и вязким демпфированием. Когда исследуется широкий диапазон изменения уровня колебаний или вибрации с широким спектром возбуждения, возникает необходимость учета совместного проявления указанных энергетических потерь. Проблема особенно актуальна для современных конструкций из композитных материалов. В работе предложена дифференциальная модель, которая позволяет учесть оба вида демпфирования. Она пригодна для любого распределения диссипативных сил и произвольного изменения нагрузки по времени. Характеристики модели исследуются на примере вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы и продольных колебаний стержня. Установлены характерные особенности проявления частотно-независимого демпфирования. Оценено его влияние на форму колебаний стержня.

1. Для описания свойств материала воспользуемся моделью, структурная схема которой показана на фиг. 1. Элемент, помеченный угловой стрелкой, передает напряжение, достигнутое к моменту последней смены режима “нагрузка-разгрузка”, т.е. изменения значения функции  $\text{sign}(\dot{\epsilon}\epsilon)$ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sigma/E + \epsilon_\mu + \epsilon_\nu, \quad \sigma = \sigma_\mu + \sigma_m = \sigma_\nu + E_\nu \epsilon_\nu \\ \sigma_\mu &= |\mu \dot{\epsilon}_\mu|^{1/\alpha} \text{sign}(\dot{\epsilon}_\mu), \quad \sigma_\nu = \nu \dot{\epsilon}_\nu, \quad (\cdot) = \partial(\cdot)/\partial t \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $t$  – время,  $\sigma$  и  $\epsilon$  – напряжение и деформация.

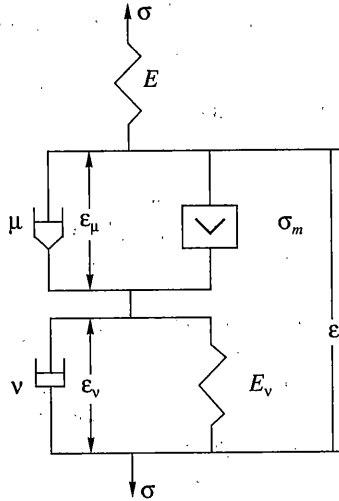
Учитывая, что  $\text{sign}(\sigma_\mu) = \text{sign}(\dot{\epsilon}_\mu) = \text{sign}(\dot{\epsilon})$ , и принимая  $1/\mu = |\dot{\epsilon}| / |\sigma_d|^\alpha$ , имеем

$$|(\sigma - \sigma_m) / \sigma_d|^\alpha \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_\mu \tag{1.2}$$

где  $\sigma_d$  – характерный уровень напряжений, определяющий рассеяние энергии.

Кроме того, из (1.1) следует

$$\sigma = \nu \dot{\epsilon}_\nu + E_\nu \epsilon_\nu \tag{1.3}$$



Фиг. 1

Исключив  $\dot{\epsilon}_\mu$  из (1.2) с помощью первого равенства (1.1) приходим к системе уравнений, описывающих связь напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E(1 - |\gamma(\sigma - \sigma_m)|^\alpha) \dot{\epsilon} + E\eta\epsilon_\nu - \xi\eta\sigma \\ E\dot{\epsilon}_\nu &= \xi\eta\sigma - E\eta\epsilon_\nu, \quad \xi = E/E_\nu, \quad \eta = E_\nu/\nu, \quad \gamma = 1/\sigma_d \end{aligned} \quad (1.4)$$

При  $\gamma = 0$ , что соответствует  $1/\mu = 0$ , деформация  $\epsilon_\mu = 0$ . Как видно из структурной схемы на фиг. 1, в этом случае модель описывает стандартное линейное тело. На самом деле, поскольку  $\epsilon_\mu = 0$ , то  $\epsilon_\nu = \epsilon - \sigma/E$ . После подстановки этого выражения для  $\epsilon_\nu$  в (1.4) оба равенства принимают вид уравнений стандартного линейного тела

$$\dot{\sigma} + \eta(1 + \xi)\sigma = E(\dot{\epsilon} + \eta\epsilon) \quad (1.5)$$

С другой стороны, если в (1.4) положить  $\eta = 0$ , то получим

$$\dot{\sigma} = E(1 - |\gamma(\sigma - \sigma_m)|^\alpha) \dot{\epsilon} \quad (1.6)$$

При гармоническом законе изменения напряжений по времени для ряда значений  $\alpha$  удастся выполнить интегрирование (1.6) в квадратурах и получить аналитические выражения, описывающие рассеяние энергии. В качестве меры рассеяния примем коэффициент поглощения  $\psi$ , который определяется как отношение энергии, рассеянной за полный цикл колебаний, к максимальной потенциальной энергии в пределах цикла [1]:

$$\begin{aligned} \psi &= 8\{z + \ln(1-z) + [2(1-z)^3 - 9(1-z)^2 + 18(1-z) - 11 - 6\ln(1-z)]/(3z^2)\}/z^2, \\ \alpha &= 0.5 \\ \psi &= 4[(z-2)\ln(1-z) - 2z]/z^2, \quad \alpha = 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\psi = -2[\ln(1-z) + (1+\sqrt{z})\ln(1+\sqrt{z}) + (1-\sqrt{z})\ln(1-\sqrt{z})]/z, \quad \alpha = 2$$

$$\sigma = A \sin \omega t, \quad z = (\gamma A)^\alpha, \quad z < 1$$

Как следует из (1.7), рассеяние энергии, соответствующее выражению (1.6), не зависит от частоты колебаний, но зависит от амплитуды. При других значениях  $\alpha$  и законах изменения  $\sigma$  выражение (1.6) интегрировалось численно. Расчеты показали, что коэффициент поглощения зависит только от предельных значений напряжения в цикле, и не зависит от изменения  $\sigma$  между ними, если это изменение остается монотонным.

В общем случае модель (1.4) дает возможность описать совместное проявление частотно-независимого и вязкого демпфирования. Наличие в ней четырех свободных параметров  $\alpha, \gamma, \eta, \xi$  позволяет достаточно точно описать демпфирующие свойства конструкций и материалов [1-4].

2. Колебания массы на подвеске, динамические характеристики которой соответствуют модели (1.4), описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} m\dot{U} + N &= P \\ \dot{N} &= c(1 - |\gamma(N - N_m)|^\alpha)U + c\eta w - \xi\eta N \\ c\dot{w} &= \xi\eta N - \eta cw, \quad \xi = c/c_v, \quad \eta = c_v/v \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $m$  – масса,  $U$  – скорость,  $P$  – внешняя сила,  $N$  – сила в подвеске. Смысл остальных обозначений очевиден из сопоставления (1.4) и (2.1).

Отнесем силы к их характерной величине  $P_0$ , смещения – к  $P_0/c$ , скорости – к  $P_0/(cT)$ , а время и  $1/\gamma$  – к  $T$ , где  $T^2 = m/c$ . Уравнения (2.1) в безразмерной форме принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{U} &= P - N \\ \dot{N} &= (1 - |\gamma(N - N_m)|^\alpha)U + \eta w - \xi\eta N \\ \dot{w} &= \xi\eta N - \eta w \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) интегрировались методом Рунге – Кутты четвертого порядка с шагом  $\tau = 0.001$  [5]. При проверочных расчетах с  $\tau = 10^{-4}$  отличия в результатах не превысили трех единиц в четвертом значащем разряде.

Продольные колебания однородного призматического стержня описываются системой (1.4), дополненной уравнением движения и соотношением между перемещениями и деформациями

$$\sigma' = \rho\dot{U}, \quad \varepsilon = u', \quad (\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x \quad (2.3)$$

где  $\rho$  – плотность,  $u$  и  $x$  – продольное смещение и осевая координата.

Равенства (1.4) и (2.3) приводятся к безразмерной форме в соответствии с зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma &= E\sigma^0, \quad \gamma = \gamma^0/E, \quad x = lx^0, \quad u = lu^0 \\ U &= c_0U^0, \quad t = lt^0/c_0, \quad \eta = c_0\eta^0/l, \quad c_0^2 = E/\rho \end{aligned} \quad (2.4)$$

где верхним индексом 0 помечены безразмерные параметры,  $l$  – длина стержня,  $c_0$  – скорость звука.

Система уравнений, описывающих динамику стержня, принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \sigma', \quad \dot{\sigma}' = [1 - |\gamma(\sigma - \sigma_m)|^\alpha]U' + \eta\varepsilon_v - \eta\xi\sigma \\ \dot{\varepsilon}_v &= \eta\xi\sigma - \eta\varepsilon_v \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь и далее верхний индекс 0 ради краткости не приводится.

Уравнения (2.5) интегрировались с помощью разностной схемы С.К. Годунов [6]. При вычислении напряжений для решения нелинейного уравнения использовался метод Ньютона. Расчетные соотношения для участка стержня между сечениями  $x_{n-1}$  и  $x_n$  будут

$$U^* = U_* + (\sigma_n - \sigma_{n-1})\tau/h, \quad \varepsilon^* = \varepsilon_* + b$$

$$u^* = u_* + (U^* + U_*)\tau/2, \quad \varepsilon_v^* = (\varepsilon_{v*} + \xi y \sigma^*)/(1 + y)$$

$$\sigma^*(i+1) = \sigma^*(i) - \frac{[\gamma s(\sigma^*(i) - \sigma_m)]^\alpha b + a \sigma^*(i) - b_1}{\alpha \gamma s [\gamma s(\sigma^*(i) - \sigma_m)]^{\alpha-1} b + a} \quad (2.6)$$

$$\sigma^*(0) = b_1/a, \quad y = \eta \tau, \quad a = 1 + \xi y/(1 + y), \quad i = 0, 1, \dots$$

$$b = (U_n - U_{n-1})\tau/h, \quad s = \text{sign} b, \quad b_1 = \sigma_* + b + \varepsilon_{v*} y/(1 + y)$$

где  $(\cdot)^*$  и  $(\cdot)_*$  – среднеинтегральные значения  $(\cdot)$  на сторонах  $t$  и  $t + \tau$  ячейки разностной сетки с шагами  $\tau$  и  $h$  по  $t$  и  $x$  соответственно,  $(\cdot)_n$  и  $(\cdot)_{n-1}$  – среднеинтегральные значения  $(\cdot)$  на сторонах  $x_{n-1}$  и  $x_n$ ,  $\sigma^*(i)$  – величина напряжения на  $i$ -ой итерации.

Параметры на сторонах ячейки  $x_{n-1}$  и  $x_n$  определялись с помощью соотношений на характеристиках линеаризованной системы (2.5)

$$\sigma_n - j U_n = \{ \sigma - j U + [|\gamma(\sigma - \sigma_m)|^\alpha b + y \varepsilon_v - \xi y \sigma]/2 \}_{n-j/2} \quad (2.7)$$

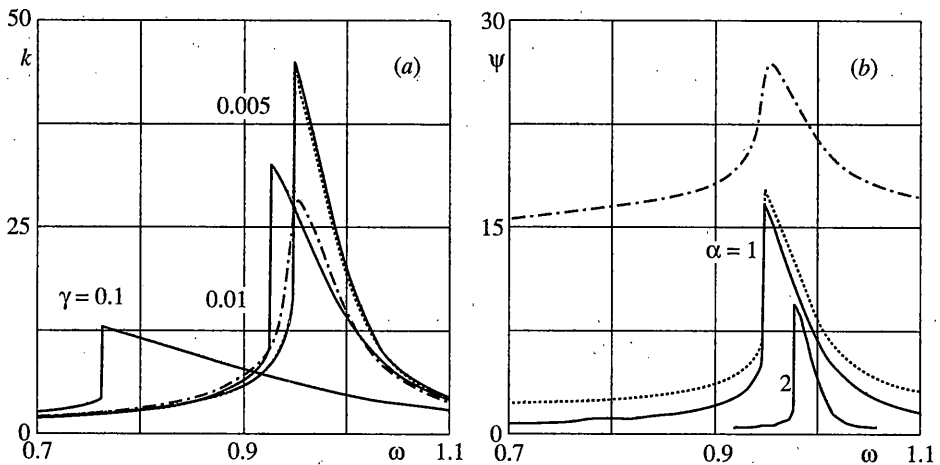
где  $j$  – направляющий косинус внешней нормали к торцу участка стержня в сечении  $x_n$ , индекс  $n - j/2$  относится к участку между сечениями  $x_{n-j}$  и  $x_n$ .

Интегрирование проводилось с шагом  $h = 0.001$  и для повышения устойчивости принималось  $\tau/h = 0.999$ . Количество итераций  $i = 3$  обеспечило практически полную сходимость решения.

**3. Вынужденные колебания** исследовались путем прямого интегрирования уравнений динамики по времени, причем время наблюдения процесса выбиралось достаточным для достижения стационарного режима. В качестве характерных значений параметра  $\alpha$  рассматривались 2.1 и 0.5.

Колебания массы возбуждались внешней силой  $P = A \sin \omega t$ , а колебания стержня – напряжениями, которые изменялись по тому же закону. Все расчеты проводились для  $A = 1$ . Другими словами, решение нормировалось по амплитуде нагрузки. Анализ исходных уравнений показывает, что при произвольной амплитуде нагрузки  $A_1$  результаты можно получить простым умножением на  $A_1$  единичного решения, соответствующего  $\gamma = \gamma_1/A_1$ , где  $\gamma_1$  – требуемая величина данного параметра. Остальные параметры модели при таком пересчете остаются неизменными.

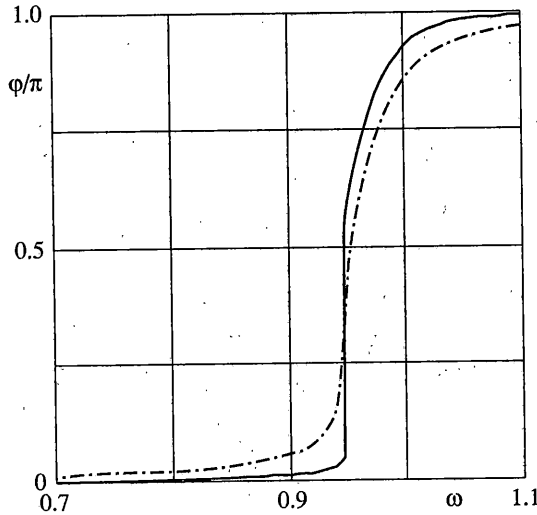
На фиг. 2, а сплошными линиями показаны коэффициенты динамичности  $k$  для системы с одной степенной свободы, когда наблюдается только частотно-независимое демпфирование при  $\alpha = 1$  и различных  $\gamma$ . Коэффициент динамичности, как обычно, принимался равным отношению амплитуды колебаний к статическому смещению. Величина  $\omega = 1$  соответствует частоте свободных колебаний системы без затухания. Обращает на себя внимание несимметричный характер зависимости  $k$  от частоты. При достижении резонанса со стороны низких частот происходит весьма резкое увеличение амплитуды колебаний и зависимость  $k$  от  $\omega$  практически терпит разрыв. Дальнейший рост частоты возмущающей силы ведет к плавному снижению коэффициента динамичности.



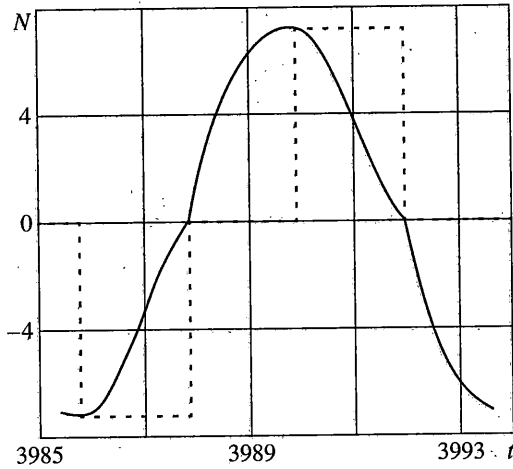
Фиг. 2

С увеличением параметра  $\gamma$  усиление затухания ведет к снижению резонансной частоты и максимума коэффициента динамичности. Область повышенных амплитуд, как и следовало ожидать, становится шире. Однако общий несимметричный вид зависимости  $k$  от частоты остается прежним. Подобный характер носит и изменение с частотой величины  $\varphi$  – угла запаздывания по фазе смещения относительно возмущающей силы. На фиг. 3 сплошной линией показана зависимость  $\varphi$  от частоты для  $\alpha = 1$  и  $\gamma = 0.005$  при наличии только частотно-независимого демпфирования. В окрестности резонанса со стороны низких частот сдвиг фазы меняется весьма резко, а на частотах, выше резонансной, он растет плавно.

Частотно-независимое демпфирование сопровождается нелинейными искажениями гармонических колебаний, особенно заметными при высоких уровнях рассеяния энергии. Характерные искажения закона изменения силы в подвеске видны на рис. 4, где они соответствуют резонансу при  $\alpha = 1$  и  $\gamma = 0.1$ . Там же штриховой линией показано изменение  $N_m$  в течение периода колебаний. Рассеяние энергии такого типа, в силу зависимости от амплитуды быстро убывает по мере ее уменьшения. Именно с этим обстоятельством связан известный из инженерной практики факт распространения на значительные расстояния высокочастотных вибраций малой амплитуды в условиях, когда существенным оказывается только конструкционное демпфирование. На фиг. 2, в приведены зависимости для  $\Psi$  – полной энергии, рассеиваемой за один цикл колебаний. Сплошные линии соответствуют потерям энергии при  $\gamma = 0.005$  за счет одного частотно-независимого демпфирования. Удаление от резонансной частоты вызывает снижение частотно-независимого демпфирования, причем оно происходит тем быстрее, чем больше величина  $\alpha$ . По мере уменьшения этой компоненты энергетических потерь растет роль вязкого демпфирования. Штриховыми линиями на фиг. 2 показаны зависимости для коэффициента динамичности и рассеяния энергии при  $\alpha = \eta = 1$  и  $\gamma = \xi = 0.005$ . Анализ стандартного линейного тела с такими  $\eta$  и  $\xi$  показывает, что максимум коэффициента поглощения за счет одного вязкого демпфирования равен 1.5% и достигается при величине  $\omega$ , практически равной единице. Как видно из приведенных результатов, добавление такого небольшого вязкого сопротивления мало сказывается вблизи резонанса. Его влияние становится заметным вдали от резонансной частоты, где именно оно, в первую очередь, обеспечивает затухание собственных колебаний и формирование стационарного режима. Вязкое демпфирование более высокого



Фиг. 3

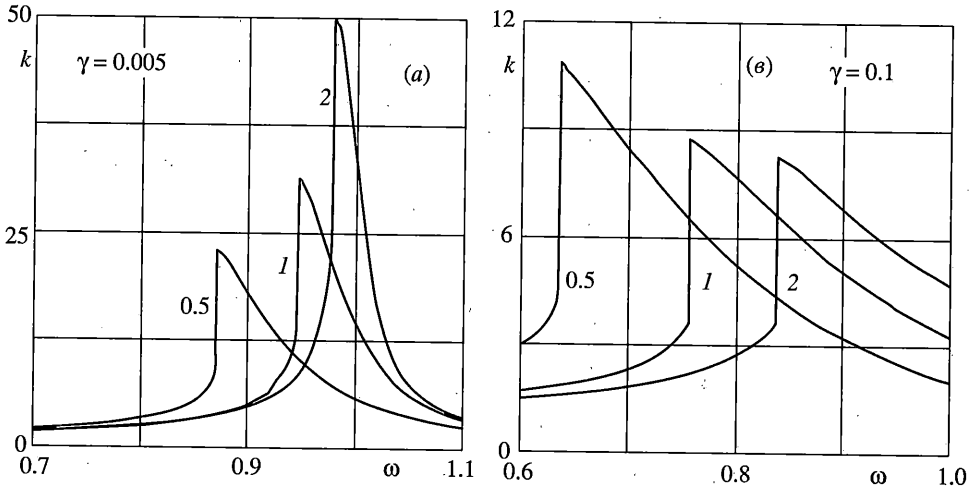


Фиг. 4

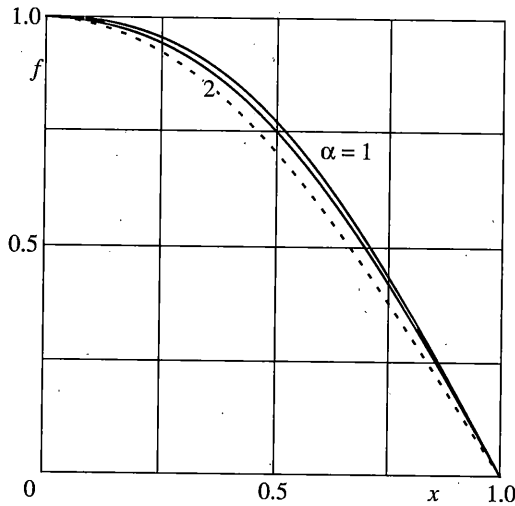
уровня оказывает уже значительное влияние на все амплитудные и фазовые характеристики колебаний, в том числе и при резонансе. Штрихпунктирными линиями на фиг. 2, 3 показаны зависимости для  $\xi = 0.05$ , когда вязкое и частотно-независимое рассеяние энергии при резонансе близки по величине. В частности видно, что вязкое демпфирование делает изменение коэффициента динамичности по частоте более близким к симметричному.

При исследовании продольных колебаний стержня полагалось, что на его торце  $x = 0$  действуют гармоническое напряжение единичной амплитуды, а торец  $x = 1$  неподвижно закреплен.

На фиг. 5 для различных  $\alpha$  и  $\gamma$  приведены коэффициенты динамичности, которые определялись по установившимся колебаниям торца  $x = 0$ . Во всех случаях полагалось,



Фиг. 5



Фиг. 6

что  $\eta = 1$  и  $\xi = 0.01$ . Зависимость коэффициентов динамичности от частоты имеет несимметричный вид, как и в случае системы с одной степенью свободы. В окрестности резонанса со стороны низких частот также наблюдается скачок. Характерные точки в обоих случаях мало отличаются. Это говорит о том, что при резонансе и в его окрестности колебания стержня происходят по одному тону с образованием устойчивой формы. На фиг. 6 для  $\gamma = 0.1$  и различных  $\alpha$  показана форма колебаний стержня  $f$ . Она фиксировалась в момент максимального смещения торца  $x = 0$  и нормировалась по его величине. Когда демпфирование отсутствует, форма колебаний рассматриваемого стержня описывается функцией  $\cos(\pi x/2)$ , которая показана на фиг. 6 штриховой линией.

Уменьшение параметра  $\alpha$  сопровождается снижением резонансной частоты, однако при этом замедляется падение коэффициента динамичности с ростом  $\gamma$ . Форма ко-

лебаний с увеличением  $\alpha$  приближается к  $\cos(\pi x/2)$ . Влияние частотно-независимого демпфирования на форму колебаний оказывается, в общем, довольно умеренным и сводится к некоторому росту ее ординат.

Описанный подход позволяет моделировать внутренние потери энергии с учетом их амплитудной и частотной зависимости. Важным достоинством предложенной модели является возможность ее использования при произвольном изменении нагрузки по времени и любом распределении диссипативных сил в конструкции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
2. Писаренко Г.С. Рассеяние энергии при механических колебаниях. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. 436 с.
3. Мальшев А.П. Численное моделирование динамики и статики стержневых конструкций на шероховатой поверхности // Изв. АН. МТТ. 2000. № 4. С. 165–172.
4. Мальшев А.П. Моделирование распределенного конструкционного демпфирования при установившихся и переходных процессах // Изв. АН. МТТ. 2001. № 4. С. 143–150.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
6. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.

Москва

Поступила в редакцию  
12.09.2001