

УДК 539.3:534.1

© 2004 г. М.А. БЕЛОВА, В.И. ГУЛЯЕВ, И.Л. СОЛОВЬЕВ

**СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ КРИТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПРОСТОМ
И СЛОЖНОМ ВРАЩЕНИЯХ**

Рассмотрены задачи о бифуркациях тонких усеченных параболических оболочек в состояниях их простого и сложного вращения. Выделены сходства и различия в постановках и методиках решения этих задач. Выпучивание оболочки в состоянии простого вращения описывается в системе координат, вращающейся вместе с оболочкой. Уравнения прецессионных колебаний, инициируемых сложным вращением, формулируются в поворачивающейся системе координат, относительно которой вращается оболочка. В обоих случаях форма потери устойчивости описывается первой гармоникой по окружной координате. Численными исследованиями установлено, что для вытянутых вдоль осевой линии параболических оболочек критические значения угловых скоростей оказываются меньше резонансных угловых скоростей сложного вращения. Для пологих параболических оболочек имеет место обратная закономерность.

При исследованиях эффектов статической и динамической потери устойчивости конструкций турбин обычно используются упрощенные модели, в которых роторы заменяются абсолютно твердыми телами и считается, что критическое состояние системы может наступить за счет упругой податливости вала [1–4]. На базе такой модели установлено, например, что под действием центробежных сил инерции упругий вращающийся вал, несущий жесткие диски, может потерять устойчивость, в результате чего его осевая линия в системе координат, вращающейся вместе с валом, выпучивается и принимает форму плоской кривой. Эффект потери устойчивости вращающегося вала обусловлен тем, что действующие на него центробежные силы инерции являются позиционными, поскольку зависят от величины прогиба его оси. При этом оказывается, что уравнение критического равновесия вала по форме совпадает с уравнением его свободных колебаний, а критическое значение его угловой скорости вращения равно первой частоте свободных колебаний упругой системы.

Однако характер механического поведения ротора на упругом валу значительно усложняется при его сложном вращении, когда ротор установлен на летательном аппарате, выполняющем маневры переориентации, и ось ротора совершает дополнительно принудительный поворот в некоторой плоскости. В этом случае в результате наложения и взаимодействия различных видов вращения возбуждаются прецессионные колебания ротора на упругом валу, которые в инерциальной системе отсчета представляются в форме стационарного деформированного состояния в плоскости, проходящей через ось вращения системы и ее плоского поворота. Возникновение критических состояний вращающейся системы в этом случае может быть связано с прецессионными резонансами, реализуемыми при некоторых (критических) значениях угловой скорости вращения системы.

Описанные эффекты возникновения критических состояний валов при простом и сложном вращениях могут быть свойственны и самому ротору, если он является тонкостенным и обладает достаточно упругой податливостью [5–7]. В связи с этим представляет интерес установление возможности возникновения статических и динамических критических состояний простейших оболочечных роторов при простом и сложном вращениях и определение, какой из этих типов неустойчивости наступает раньше. Несмотря на кажущееся различие этих задач, они имеют общие моменты в их постановках, поэтому их совместное решение и сопоставление представляется целесообразным. Ниже это исследование проведено для пологих и удлиненных параболических оболочек.

Ряд смежных вопросов механики тонких вращающихся оболочек рассмотрен в [8–11].

1. Механическая модель и уравнения движения оболочки при сложном вращении.

Возникающие при простом и сложном вращениях критические состояния равновесия и движения тонкой оболочки характеризуются тем, что в обоих случаях бифуркационные эффекты возникают в окрестности некоторого ее преднапряженного состояния, вызванного простым вращением со скоростью ω . Похожими оказываются и формы потери устойчивости, реализуемые во вращающейся и неподвижной системах координат в обоих случаях по первой гармонике в окружном направлении. Этими сходствами обусловлена универсальность методик нахождения критических состояний в обеих постановках, отличающихся, в основном, тем, что для задачи статического выпучивания оболочки разрешающие уравнения формулируются во вращающейся системе координат, в то время как уравнения ее прецессионных колебаний выписываются в системе координат, связанной с носителем. Поскольку уравнения задачи статической потери устойчивости представляют собой частный случай уравнений прецессионных колебаний оболочки при сложном вращении, сформулируем вначале задачу об определении прецессионных резонансов тонких осесимметричных оболочек при сложном вращении, рассматривая задачу о статическом выпучивании как ее более простой вариант.

Примем, что тонкостенная усеченная осесимметричная параболоидальная оболочка закреплена своим меньшим круговым основанием на жестком носителе, вращающемся вместе с системой координат $Oxuz$ с постоянной по модулю угловой скоростью ω относительно оси симметрии Oz , которая в свою очередь, совершает плоский принудительный поворот с постоянной скоростью ω_0 . Второй контур оболочки свободен от нагрузки и связей. Введем правые системы координат: $OX^*Y^*Z^*$ – инерциальная система координат с началом в центре меньшего опорного контура оболочки, ось Y^* которой коллинеарна вектору ω_0 ; $OXYZ$ – поворачивающаяся система координат, неподвижная ось Y которой совпадает с осью Y^* , а ось Z совпадает с осью z и поворачивается вместе с ней. На срединной поверхности оболочки введем ортогональную криволинейную систему координат $ox^1x^2x^3$, в которой координатная линия x^1 лежит в образующем сечении, x^2 направлена в окружном направлении, x^3 – по внутренней нормали к поверхности оболочки.

Будем считать, что $\omega \geq \omega_0$. Тогда можно принять, что вызванные сложным вращением колебания оболочки являются установившимися и для их исследования использовать геометрически нелинейные уравнения теории тонких оболочек. С учетом условия $\omega \geq \omega_0$ для их решения можно выделить два состояния. В первом состоянии оболочка совершает простое вращение с угловой скоростью ω . Она напряжена стационарными осесимметричными центробежными силами инерции и колебаний не совершает. Во втором состоянии, вызванном поворотом системы, на элементы оболочки

действуют дополнительные, бегущие в окружном направлении периодически изменяющиеся во времени силы инерции, возбуждающие малые колебания оболочки в форме гармонической волны, прецессирующей с частотой ω относительно исходного напряжения состояния. Условие $\omega \gg \omega_0$ позволяет рассматривать эти состояния по очереди, используя решения уравнений первого состояния для вычисления коэффициентов уравнений колебаний оболочки во втором состоянии [5, 6].

С учетом наличия в оболочке при сложном вращении предварительных напряжений простого вращения воспользуемся геометрически нелинейными уравнениями динамического равновесия ее элемента в общем виде [7, 12]. В системе $Oxuz$ они имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} \mathbf{T}^{\alpha} + \mathbf{p} &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3) \\ \nabla_{\gamma} \mathbf{M}^{\gamma} + (\mathbf{e}^{\gamma} \times \mathbf{T}^{\gamma}) \sqrt{a} &= 0 \quad (\gamma = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{T}^{α} – вектор внутренних сил; \mathbf{M}^{γ} – вектор внутренних моментов; ∇_{α} , ∇_{γ} – символы ковариантной производной; \mathbf{p} – вектор интенсивности внешних сил.

Используя соотношения связи между контравариантными компонентами функций внутренних сил T^{ij} и моментов M^{ij} и ковариантными составляющими функций деформации ϵ_{ij} и изменения кривизн μ_{ij} :

$$\begin{aligned} T^{ij} &= Eh\epsilon_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/(1-\nu^2) \\ M^{ij} &= Eh^3\mu_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/12(1-\nu^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

выразив эти функции через ковариантные компоненты u_1, u_2, u_3 вектора перемещений \mathbf{u} и углы поворота сечений ϑ_i :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= (\mathbf{e}_i \cdot \partial \mathbf{u} / \partial x^j + \mathbf{e}_j \cdot \partial \mathbf{u} / \partial x^i + \vartheta_i \cdot \vartheta_j) / 2, \quad \vartheta_i = (\partial \mathbf{u} / \partial x^i) \mathbf{e}_3 \\ \mu_{ij} &= (1/c^{ik} \cdot \mathbf{e}^k \cdot \partial \Omega / \partial x^j + 1/c^{jk} \cdot \mathbf{e}^k \cdot \partial \Omega / \partial x^i) / 2, \quad \Omega = c^{ij} \vartheta_i \mathbf{e}_j \quad (i, j, k = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

и учтя при раскрытии векторных операций в (1.1) изменение параметров b_i^j второй квадратичной формы в процессе деформации оболочки, получим уравнение ее динамического равновесия.

В рассматриваемом случае роль активных сил, действующих на оболочку, играют только силы инерции. Для их вычисления используем равенства

$$\mathbf{p} = -\gamma h \mathbf{a} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \quad (1.5)$$

где γ – плотность материала оболочки, h – ее толщина, \mathbf{a} – вектор абсолютного ускорения.

Для вычисления входящих в (1.5) векторов переносного \mathbf{a}_e , относительного \mathbf{a}_r и кориолисова \mathbf{a}_c ускорений используются соотношения [13]:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}), \quad \mathbf{a}_r = d^2 \boldsymbol{\rho} / dt^2, \quad \mathbf{a}_c = 2 \boldsymbol{\Omega} \times (d\boldsymbol{\rho} / dt) \\ \boldsymbol{\Omega} &= \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – соответственно векторы абсолютной угловой скорости и углового ускорения подвижной системы координат $Oxuz$; $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор элемента оболочки в этой системе.

В результате выполнения векторных операций (1.6) и пренебрежения величиной ω_0^2 найдем контравариантные компоненты векторов ускорений

$$\begin{aligned}
 a_e^1 &= -\omega^2 r \sin(\varphi) \sqrt{a_{11}} + 2\omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \cos \varphi / \sqrt{a_{11}} \\
 a_e^3 &= \omega^2 r \cos \varphi + 2\omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \sin \varphi \\
 a_c^1 &= -2\omega \sin \varphi \dot{u}_2 / \sqrt{a_{11} a_{22}} \\
 a_c^2 &= 2\omega \sin \varphi \dot{u}_1 / \sqrt{a_{11} a_{22}} - 2\omega \cos \varphi \dot{u}_3 / \sqrt{a_{22}} \\
 a_c^3 &= 2\omega \cos \varphi \dot{u}_2 / \sqrt{a_{22}} \\
 a_r^1 &= \ddot{u}_{11} / a_{11}, \quad a_r^2 = \ddot{u}_2 / a_{22}, \quad a_r^3 = \ddot{u}_3
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь r – расстояние от оси вращения до рассматриваемого элемента, φ – угол между касательной к образующей оболочки и осью вращения.

Уравнения динамики оболочки при сложном вращении следуют из соотношений (1.1)–(1.3), преобразованных с учетом (1.4)–(1.7). Однако в равенствах, содержащих большую величину ω^2 , учитываются изменения геометрии оболочки при ее нагружении и вместо r и φ используются величины $r + \Delta r$, $\varphi + \Delta \varphi_1^*$. Тогда уравнения силовой группы из (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned}
 &\partial T^{11} / \partial x^1 + \partial T^{12} / \partial x^2 + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) T^{11} + \Gamma_{22}^1 T^{22} - b_1^1 T^{13} = \\
 &= \gamma h [-\omega^2 (r + \Delta r) \sin(\varphi + \Delta \varphi_1^*) / \sqrt{a_{11}} + 2\omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \cos \varphi / \sqrt{a_{11}} - \\
 &- 2\omega \sin \varphi \dot{u}_2 / \sqrt{a_{11} a_{22}} + \ddot{u}_{11} / a_{11}] \\
 &\partial T^{12} / \partial x^1 + \partial T_{22} / \partial x^2 + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2) T^{12} - b_2^2 T^{23} = \\
 &= \gamma h [\omega^2 (r + \Delta r) \cos \varphi \cos(\pi/2 + \Delta \varphi_2^*) + 2\omega \varphi u / \sqrt{a_{11} a_{22}} - \\
 &- 2\omega \cos \varphi \dot{u}_3 / \sqrt{a_{22}} + \ddot{u}_2 / a_{22}] \\
 &\partial T^{13} / \partial x^1 + \partial T^{23} / \partial x^2 + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) T^{13} + b_{11} T^{11} - b_{22} T^{22} = \\
 &= \gamma h [\omega^2 (r + \Delta r) \cos(\varphi + \Delta \varphi_1^*) + 2\omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \sin \varphi + \\
 &+ 2\omega \cos \varphi \dot{u}_2 / \sqrt{a_{22}} + \ddot{u}_3]
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Отметим, что наличие множителей $\sin(\omega t + x^2)$ в правых частях этих уравнений связано с видом инерционной нагрузки на оболочку, которая является гармонической по x^2 , t и с частотой ω обегает ее по окружности, инициируя прецессионные колебания с частотой ω . При моделировании возбуждаемых этими силами прецессионных колебаний в силу условий $\omega \gg \omega_0$ принимаем, что они малы. Благодаря этому, выделяем вначале напряженно-деформированное состояние простого вращения со скоростью ω и затем исследуем прецессионные колебания с помощью уравнений движения, линеаризованных в окрестности первого состояния

В этом случае из (1.8) следует

$$\begin{aligned}
 & \partial \Delta T^{11} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{12} / \partial x^2 + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) \Delta T^{11} + \Gamma_{22}^1 \Delta T^{22} - b_1^1 \Delta T^{13} - \\
 & - \gamma h [-\omega^2 \sin \varphi \Delta r / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 r \cos \varphi \Delta \vartheta_1^* / \sqrt{a_{11}} - \\
 & - 2\omega \sin \varphi \Delta \dot{u}_2 / \sqrt{a_{11} a_{22}} + \Delta \dot{u}_1 / a_{11}] = 2\gamma h \omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \cos \varphi / \sqrt{a_{11}} \\
 & \partial \Delta T^{12} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{22} / \partial x^2 + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) \Delta T^{12} - b_2^2 \Delta T^{23} - \\
 & - \gamma h [-\omega^2 r \cos \varphi \Delta \vartheta_2^* + 2\omega \sin \varphi \Delta \dot{u}_1 / \sqrt{a_{11} a_{22}} - 2\omega \cos \varphi \Delta \dot{u}_3 / \sqrt{a_{22}} + \Delta \dot{u}_2 / a_{22}] = 0 \quad (1.9) \\
 & \partial \Delta T^{13} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{23} / \partial x^2 + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) \Delta T^{13} + b_{11} \Delta T^{11} + \Delta b_{11} T^{11} + b_{22} \Delta T^{22} + \Delta b_{22} T^{22} - \\
 & - \gamma h [\omega^2 \cos \varphi \Delta r - \omega^2 r \sin \varphi \Delta \vartheta_1^* + 2\omega \cos \varphi \Delta \dot{u}_2 / \sqrt{a_{22}} + \Delta \dot{u}_3] = \\
 & = 2\gamma h \omega_0 \omega r \sin \varphi \sin(\omega t + x^2)
 \end{aligned}$$

В левых частях этих уравнений слагаемые, содержащие множители Δr , $\Delta \vartheta_1^*$, $\Delta \vartheta_2^*$, определяют так называемые позиционные силы; слагаемые с множителями \dot{u}_1 , \dot{u}_2 , \dot{u}_3 характеризуют гироскопические силы; выражения в правых частях играют роль активных сил.

2. Механическая модель и уравнения критического состояния оболочки при простом вращении. Моделирование потери устойчивости оболочки при простом вращении проводится на основе приведенных в предыдущем пункте соотношений, упрощенных с учетом того, что $\omega_0 = 0$ и оболочка не совершает колебаний. Тогда отпадает необходимость в использовании поворачивающейся системы координат $OXYZ$ и становится возможным рассматривать статическое деформирование оболочки во вращающейся системе координат $Oxyz$. В этом случае вместо (1.7) имеем

$$\begin{aligned}
 a_e^1 &= -\omega^2 r \sin(\varphi) / \sqrt{a_{11}}, \quad a_e^2 = 0, \quad a_e^3 = \omega^2 r \cos \varphi \\
 a_c^1 &= 0, \quad a_c^2 = 0, \quad a_c^3 = 0 \quad (2.1) \\
 a_r^1 &= 0, \quad a_r^2 = 0, \quad a_r^3 = 0
 \end{aligned}$$

Подставляя равенства (2.1) в (1.8) и линеаризуя их в окрестности состояния простого вращения, получим однородную систему уравнений равновесия оболочек в некотором возмущенном состоянии

$$\begin{aligned}
 & \partial \Delta T^{11} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{12} / \partial x^2 + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) \Delta T^{11} + \Gamma_{22}^1 \Delta T^{22} - b_1^1 \Delta T^{13} - \\
 & - \gamma h [-\omega^2 r \cos \varphi \Delta \vartheta_1^* / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 \Delta u_1 \sin^2 \varphi / a_{11} + \omega^2 \Delta u_3 \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{a_{11}}] = 0 \\
 & \partial \Delta T^{12} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{22} / \partial x^2 + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) \Delta T^{12} - b_2^2 \Delta T^{23} + \gamma h \omega^2 r \cos \varphi \Delta \vartheta_2^* = 0 \quad (2.2) \\
 & \partial \Delta T^{13} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{23} / \partial x^2 + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) \Delta T^{13} + b_{11} \Delta T^{11} + \Delta b_{11} T^{11} + \\
 & + b_{22} \Delta T^{22} + \Delta b_{22} T^{22} - \gamma h [-\omega^2 r \sin \varphi \Delta \vartheta_1^* + \omega^2 \Delta u_1 \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 \Delta u_3 \cos^2 \varphi] = 0
 \end{aligned}$$

Она должна быть дополнена соответствующими соотношениями связи между функциями внутренних сил и моментов и деформаций и изменения кривизн, а также равенствами

$$\Delta \vartheta_1^* = \left(-\frac{\partial \Delta u_3}{\partial x^1} - b_1^1 \Delta u_1 \right) / \sqrt{a_{11}}, \quad \Delta \vartheta_2^* = (-\Delta u_3 - b_2^2 \Delta u_2) / \sqrt{a_{22}}$$

и величиной Δr , которая представляет собой радиальную составляющую вектора перемещений \mathbf{u} .

Значения ω , при которых однородная система (2.2) имеет нетривиальные решения, являются критическими, а сами решения определяют формы потери устойчивости. Как правило, практический интерес представляет только низшее критическое значение ω .

3. Методика построения решений. При построении решений неоднородной системы уравнений вида (1.9) будем исходить из того, что ее правые части являются функциями фазовой координаты $\omega t + x^2$. Это позволяет представить искомые функции в форме бегущих в окружном направлении гармонических волн

$$\begin{aligned} \Delta T^{ii} &= T^{(ii)}(x^1) \sin(\omega t + x^2), & \Delta T^{12} &= T^{(12)}(x^1) \cos(\omega t + x^2) \\ \Delta T^{13} &= T^{(13)}(x^1) \sin(\omega t + x^2), & \Delta T^{23} &= T^{(23)}(x^1) \cos(\omega t + x^2) \\ \Delta M^{ii} &= M^{(ii)}(x^1) \sin(\omega t + x^2), & \Delta M^{12} &= M^{(12)}(x^1) \cos(\omega t + x^2) \\ \Delta u_1 &= u_{(1)}(x^1) \sin(\omega t + x^2), & \Delta u_2 &= u_{(2)}(x^1) \cos(\omega t + x^2) \\ &..... \\ \Delta u_3 &= u_{(3)}(x^1) \sin(\omega t + x^2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

С помощью этих замен после сокращения в (1.9) на $\sin(\omega t + x^2)$ и $\cos(\omega t + x^2)$ исключается фазовая координата $\omega t + x^2$, производные по x^2, t и строится неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно искомых функций $u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}, \vartheta_{(1)}, \epsilon_{(11)}, \epsilon_{(12)}, \mu_{(11)}, T^{(13)}$ с независимой переменной x^1 .

Отметим, что такая замена равносильна рассмотрению динамики вращающейся оболочки относительно невращающейся (но поворачивающейся со скоростью ω_0) системы координат $OXYZ$. В общем виде эта система уравнений может быть представлена в форме

$$dy/dx = A_1(x)y + f(x) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{y} = (u_{(1)}, u_{(3)}, \vartheta_{(1)}, \epsilon_{(11)}, \mu_{(11)}, T^{(13)}, u_{(2)}, \epsilon_{(12)})^T \tag{3.5}$$

Здесь $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ – искомая вектор-функция размерности восемь; $x \equiv x^1$ – независимая переменная, изменяющаяся в пределах $0 \leq x \leq l$; $\mathbf{f}(x)$ – заданный вектор правых частей; $A_1(x)$ – матрица коэффициентов восьмого порядка, определяемая уравнениями теории оболочек и соотношениями, задающими коэффициенты первой и второй квадратичных форм, а также внутренними силами простого вращения, преднапрягающими оболочку.

Определение этих сил осуществлялось путем решения нелинейных уравнений равновесия невозмущенной оболочки, вращающейся с угловой скоростью ω . Для решения использован метод продолжения по параметру совместно с методом Ньютона – Рафсона [12]. В качестве ведущего параметра использовалась переменная ω .

Решение системы (3.4) должно подчиняться краевым условиям

$$By(0) = 0, \quad Dy(l) = 0 \tag{3.6}$$

где постоянные матрицы B и D имеют размеры 4×8 .

Вектор $y(x)$ строим в форме

$$y(x) = y_0(x) + Y(x)C \tag{3.7}$$

где $y_0(x)$ – решение задачи Коши для системы (3.5) при нулевых начальных условиях, $Y(x)$ – матрица размера 8×8 решений соответствующей однородной системы при соответствующих начальных условиях, $C = (c_1, c_2, \dots, c_8)^T$ – вектор констант, определяемых из условий (3.6).

Задача об устойчивости оболочки, вращающейся относительно неподвижной оси, решается на основе уравнений (2.2) путем определения собственных значений ω , при которых эта система имеет нетривиальные собственные решения. Среди таких решений имеются формы, обладающие циклической симметрией относительно оси z , и включающие осесимметричные формы и формы, содержащие множители в виде гармоник $\sin nx^2, \cos nx^2$ с различными значениями n . Для оболочек рассматриваемого вида наименее энергоемкими формами оказываются формы с номерами гармоник $n = 1$, поэтому нетривиальное решение системы (2.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} \Delta T^{ii} &= T^{(ii)}(x^1) \sin x^2, & \Delta T^{12} &= T^{(12)}(x^1) \cos x^2 \\ \Delta T^{13} &= T^{(13)}(x^1) \sin x^2, & \Delta T^{23} &= T^{(23)}(x^1) \cos x^2 \\ \Delta M^{ii} &= M^{(ii)}(x^1) \sin x^2, & \Delta M^{12} &= M^{(12)}(x^1) \cos x^2 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= u_{(1)}(x^1) \sin x^2, & \Delta u_2 &= u_{(2)}(x^1) \cos x^2 \\ \Delta u_3 &= u_{(3)}(x^1) \sin x^2 \end{aligned}$$

С использованием этих замен исключается зависимая переменная x^2 и производные по x^2 и строится однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка

$$dy/dx = A_2(x)y \tag{3.9}$$

относительно вектора (3.5) искомым переменных с граничными условиями (3.6).

Нетривиальное решение системы (3.9) формируется в виде

$$y(x) = Y(x)C \tag{3.10}$$

где $Y(x)$ – матрица фундаментальных решений системы (3.9), а компоненты вектора C находятся из граничных условий (3.6). Значения ω , при которых определитель матрицы, вытекающей из условий (3.6), обращается в нуль, являются критическими. Для построения формы потери устойчивости одна из компонент вектора C задается произвольно, а другие находятся из системы (3.6), после чего по (3.10) определяется форма выпучивания.

4. Результаты исследований. На основе предложенного подхода были численно исследованы критические состояния осесимметричных параболических оболочек при простом и сложном вращениях. При исследованиях изменялись диаметр d меньшего

контура оболочек, по которому они были защемлены во вращающемся теле, и форма меридионального сечения оболочек. Уравнение сечения задавалось в виде

$$y = k\sqrt{x+a} \quad (4.1)$$

где a, k – геометрические параметры, характеризующие размеры контурных окружностей и пологость оболочки.

На основе формулы (4.1) вычислялись используемые в разрешающих уравнениях параметры первой и второй квадратичных форм $a_{11}, a_{22}, b_1^1, b_2^2, b_{11}, b_{22}$. Были рассмотрены относительно пологие оболочки ($k = 1 \text{ м}^{1/2}$) и вытянутые вдоль осевой линии ($k = 0.2 \text{ м}^{1/2}$) оболочки. Во всех случаях толщина оболочки составляла $h = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, расстояние L между контурными сечениями вдоль осевой линии менялось и выбиралось равным $L = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \text{ м}$.

При построении частных решений система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.7) или (3.9) интегрировалась методом Рунге – Кутты. Особенность его применения заключается в том, что рассматриваемая система уравнений, описывающих осесимметричное деформирование вращающейся оболочки, является жесткой и среди ее частных решений имеются быстро возрастающие функции. Поэтому при численном построении матрицы ее фундаментальных решений дополнительно применялся метод дискретной ортогонализации. Для проверки точности вычислений интервал интегрирования $0 \leq x \leq l$ разбивался на 16000 и 32000 дискретных участков с выбором 40 и 80 точек ортогонализации. Поскольку решения в этих случаях практически совпали, все численные исследования проводились с шагом $\Delta x = l/16000$ и 40 точками ортогонализации.

Поиск критических значений ω осуществляется в диапазоне $0 \leq \omega \leq 2500 \text{ с}^{-1}$ с шагом $\Delta\omega = 25 \text{ с}^{-1}$, в окрестности критических значений этот шаг уменьшался до $\Delta\omega = 1 \text{ с}^{-1}$. В случаях сложного вращения принималось $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$. Значения критических угловых скоростей при простом вращении (ω^0) и скоростей ω , при которых возбуждались резонансные прецессионные колебания (ω_r) приведены в таблице для значений $k = 1 \text{ м}^{1/2}$ (пологие оболочки) и $k = 0.2 \text{ м}^{1/2}$ (вытянутые оболочки). Видно, что для рассмотренных пологих оболочек резонансы прецессионных колебаний сложного вращения наступают значительно раньше состояний потери устойчивости равновесия при простом вращении. Укажем также, что в ряде случаев в выбранном диапазоне изменения ω потери устойчивости равновесия оболочек достигнуть не удалось.

Для вытянутых параболических оболочек ($k = 0.2 \text{ м}^{1/2}$) имеет место обратный эффект. Для них потеря устойчивости равновесия простого вращения достигается при значениях угловых скоростей ω^0 , меньших резонансных скоростей сложного вращения. При этом у оболочек с диаметром $d = 0.03 \text{ м}$ резонансные режимы прецессионных колебаний в диапазоне частот $0 \leq \omega \leq 2500 \text{ с}^{-1}$ не реализуется вообще.

На фиг. 1 показана форма потери устойчивости оболочки с параметрами $k = 0.2 \text{ м}^{1/2}$, $a = 2.25 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $d = 0.03 \text{ м}$, $L = 0.5 \text{ м}$, реализованная при $\omega^0 = 449 \text{ с}^{-1}$. Штриховые кривые соответствуют предкритическому состоянию оболочки, сплошные кривые – форме выпучивания оболочки.

Для оболочки с параметрами $k = 1 \text{ м}^{1/2}$, $a = 2.25 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $d = 0.03 \text{ м}$, $L = 0.1 \text{ м}$, потеря устойчивости при простом вращении в выбранном диапазоне изменения ω не реализуется. В случае сложного вращения прецессионные колебания переходят в резонансный режим при $\omega_r = 375 \text{ с}^{-1}$. Для этого режима были подсчитаны как функции угловой скорости ω результирующий момент M_p в заделке оболочки и общий гироскопический момент M_g , действующий на вращающуюся эквивалентную твердотельную оболочку,

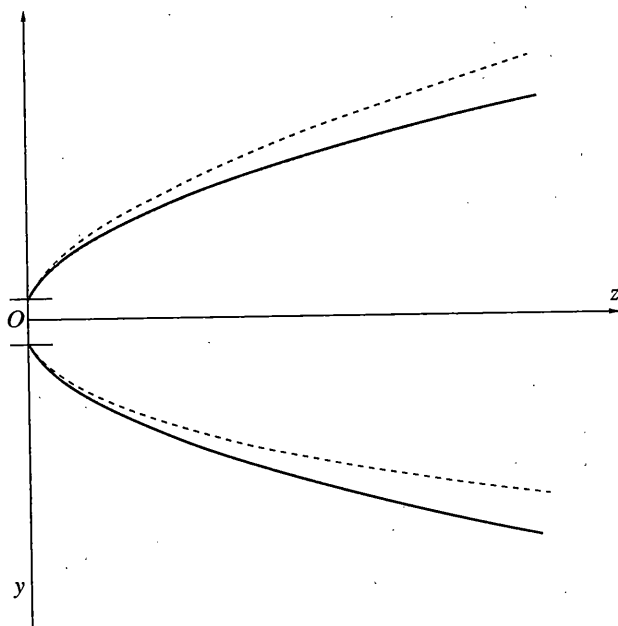
k [м ^{1/2}]	a [м]	d [м]	L [м]	ω^0 [с ⁻¹]	ω_r [с ⁻¹]
1	$2.5 \cdot 10^{-5}$	0.01	0.1	—	192
			0.2	—	71
			0.3	—	41
			0.4	1669	28
			0.5	546	21
1	$1 \cdot 10^{-4}$	0.02	0.1	—	274
			0.2	—	103
			0.3	—	59
			0.4	1821	40
			0.5	590	29
1	$2.25 \cdot 10^{-4}$	0.03	0.1	—	375
			0.2	—	140
			0.3	—	80
			0.4	1939	54
			0.5	624	40
0.2	$2.5 \cdot 10^{-5}$	0.01	0.1	1814	—
			0.2	533	2017
			0.3	263	1217
			0.4	160	852
			0.5	109	647
0.2	$1 \cdot 10^{-4}$	0.02	0.1	—	—
			0.2	1279	—
			0.3	629	—
			0.4	381	2045
			0.5	258	1546
0.2	$2.25 \cdot 10^{-4}$	0.03	0.1	—	—
			0.2	2214	—
			0.3	1096	—
			0.4	663	—
			0.5	449	—

ось вращения которой совершает дополнительный принудительный плоский поворот. Для последнего случая имеем [13]:

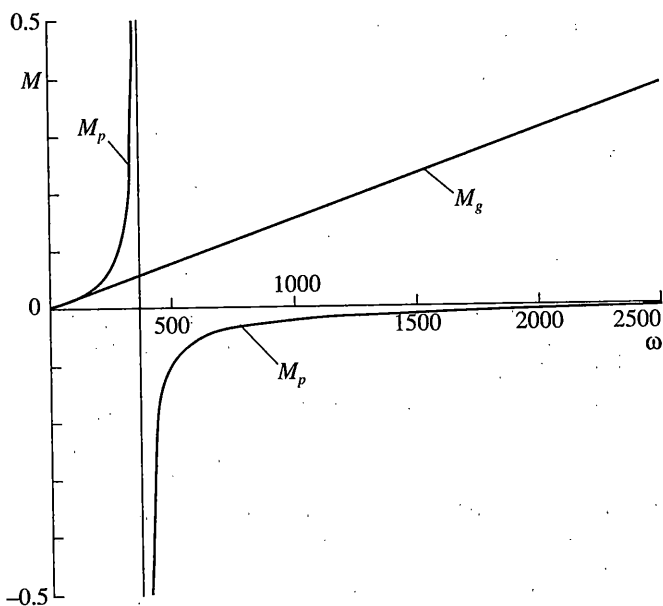
$$\mathbf{M}_g = I_x \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_0 \quad (4.2)$$

где I_x – момент инерции оболочки относительно оси вращения.

На фиг. 2 показаны графики функции $M_p(\omega)$, $M_g(\omega)$ [Н·м]. Можно заметить, что гироскопический момент M_g (как следует из (4.2)) линейно зависит от ω . При значениях $\omega < 200$ с⁻¹ M_p и M_g практически совпадают, однако при приближении к значению угловой скорости упругих резонансных колебаний M_p резко возрастает и при переходе через ω_r меняет свой знак.

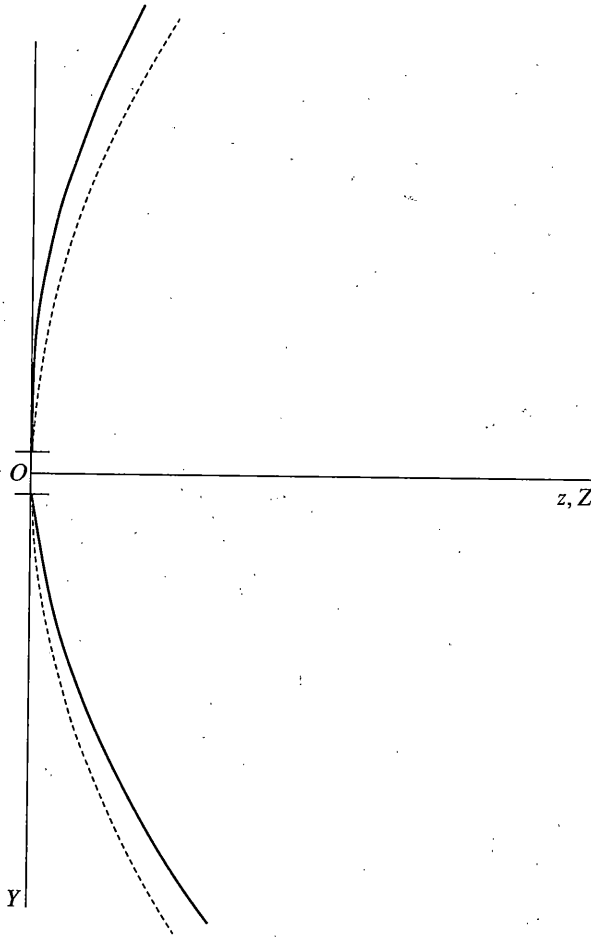


Фиг. 1



Фиг. 2

Форма прецессионных колебаний оболочки оказывается симметричной относительно плоскости YOZ , не вращающейся, но поворачивающейся со скоростью ω_0 системы координат $OXYZ$.



Фиг. 3

На фиг. 3 показаны меридианальные сечения оболочки в недеформированном состоянии (штриховые линии) и в состоянии предрезонансных прецессионных колебаний (сплошные линии). Они аналогичны представленным на фиг. 1 кривым выпучивания оболочки в системе координат $Oxuz$ при простом вращении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
2. Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. М.: Наука, 1982. 280 с.
3. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов. М.: Машиностроение, 1980. 151 с.
4. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. Л.: Энергия, 1971. 387 с.
5. Гуляев В.И., Гром А.А., Снежко Н.А. Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // Изв. РАН. МТГ. 1999. № 2. С. 156–163.
6. Гуляев В.И., Соловьев И.Л. Прецессионные колебания и резонансы составных оболочек при сложном вращении // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 6. С. 74–81.
7. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Lugovyy P.Z. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation // J. Sound and Vibrat. 2001. V. 246. № 3. P. 491–504.

8. *Егармин Н.Е.* О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 142–148.
9. *Смирнов А.Л., Товстик П.Е.* Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 280–290.
10. *Padovan Y.* Natural frequencies in rotating prestressed cylinders // J. Sound and Vibrat. – 1973. V. 31. № 4. P. 469–482.
11. *Sivadas K.R.* Vibration analysis of pre-stressed rotating thick circular conical shell // J. Sound and Vibrat. 1995. V. 186. № 1. P. 99–109.
12. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. и др.* Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. Львов: Выща. шк. 1983. 287 с.
13. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Киев

Поступила в редакцию
6.09.2001